Zbirčica zadataka iz kvantne elektrodinamike

Pomoć u polaganju ispita, pa makar ona imala i oblik zbirčice zadataka, uvek je dobrodošla. Zato sam odlučio da na jednom mestu saberem sve zadatke koje sam kao asistent na predmetima *Kvantna elektrodinamika* i *Kvantna teorija polja* u toku školske 2002/2003. godine uradio na vežbama, kao i sve domaće zadatke, a koji se ne nalaze u *Zbirci rešenih zadataka iz kvantne teorije polja* Voje Radovanovića (Zbirka). Rezultat je pred vama.

Beograd, 19. maj 2003. godine — Antun Balaž

---

1. Pokazati da za matrični element ${\Lambda^0}_0$ Lorencove grupe važi $|{\Lambda^0}_0| \geq 1$.

2. Pokazati da za simetrični tenzor $S_{\mu\nu}$ i antisimetrični tenzor $A_{\mu\nu}$ važi $S_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0$. Pokazati i da se svaki tenzor $T_{\mu\nu}$ ranga 2 može razložiti na simetrični deo $T^{(s)}_{\mu\nu}$ i antisimetrični deo $T^{(a)}_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu} = T^{(s)}_{\mu\nu} + T^{(a)}_{\mu\nu}$, pri čemu je $T_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = T^{(s)}_{\mu\nu}S^{\mu\nu}$ i $T_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = T^{(a)}_{\mu\nu}A^{\mu\nu}$.

3. Izračunati: a) $\mathrm{Tr}\, e^{\not a}$, b) $\mathrm{Tr}\, e^{\not a}e^{\not b}$ i c) $\mathrm{Tr}\, e^{\not a_1}\ldots e^{\not a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Ako definišemo matrice $\eta_\mu = \sin\gamma_\mu$, naći $\{\eta_\mu, \eta_\nu\}$.

5. Ako definišemo matrice $\eta_\mu = \cos\gamma_\mu$, naći $\{\eta_\mu, \eta_\nu\}$.

6. Ako uvedemo oznake $S_\pm = S^1 \pm iS^2$, gde su $S^1 = S^x$ i $S^2 = S^y$ projekcije na x– i y–osu operatora spina Dirakove čestice u sistemu mirovanja, pokažite da važi $S_\mp S_\pm = \frac{1}{2} \mp S^3$.

7. Pokazati da je moguće naći vektore u_r i v_r (r=1, 2) koji zadovoljavaju relacije (4.C) i (4.D) iz Zbirke, kao i da ti vektori mogu da se odaberu tako da su jednaki odgovarajućim vektorima nađenim u zadatku 4.2 iz Zbirke.

8. Izvesti relacije ortogonalnosti između baznih spinora u_r i v_r (r=1, 2) koje su ekvivalentne relacijama (4.D) iz Zbirke, samo što u njima, umesto $\bar{u}_r$ i $\bar{v}_r$, stoji $u_r^\dagger$ i $v_r^\dagger$.

9. Ako se γ–matrice γ_μ zamene nekom drugom reprezentacijom $\gamma'_\mu = U^{-1}\gamma_\mu U$, gde je U unitarna matrica, tada je matrica konjugacije naboja C' u novoj reprezentaciji povezana sa matricom konjugacije naboja u originalnoj reprezentaciji. Naći tu vezu. Da li korisne relacije $C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^{\mathrm{T}}$, koje važe u originalnoj reprezentaciji, važe i u novoj reprezentaciji?

10. Ispitati kako se veličina $Z(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5 \not\partial \psi(x)$ transformiše pri pravim ortohronim Lorencovim transformacijama, kao i pri diskretnim C, P, T i CPT transformacijama.

11. Razmotriti proces rasejanja dva fermiona. Pokazati da je $|\vec{J}_{in}| = \frac{1}{V}\left(\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{E_2}\right)$ u sistemu centra mase, gde su E_1 i $\vec{p}_1$ energija i impuls jedne fermiona, a E_2 i $\vec{p}_2$ energija i impuls drugog fermiona.

12. Napisati Fajnmanovu amplitudu $\mathcal{M}$ u najnižem redu teorije perturbacije i nacrtati odgovarajući Fajnmanov dijagram za proces $e^- + e^- \to e^- + e^-$. Izračunati $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ usrednjeno po spinskim stanjima početnih i finalnih elektrona.

13. Izračunati totalni presek po jedinici zapremine σ/V za kreiranje elektron–pozitron para u spoljašnjem elektromagnetnom potencijalu $A^\mu = (a\, e^{-i\omega t}, 0, 0, 0)$ u najnižem redu teorije perturbacije.

14. Izračunati totalni presek po jedinici zapremine σ/V za kreiranje elektron–pozitron para u spoljašnjem elektromagnetnom potencijalu $A^\mu = (a\, e^{-i\omega t},\, 0,\, a\, e^{-i\omega t},\, 0)$ u najnižem redu teorije perturbacije. Naći vrednost dobijenog izraza za $\omega \gg m$, gde je m masa elektrona.

15. Izraziti hamiltonijan elektromagnetnog polja pomoću operatora $a_r(\vec{k})$ i $a_r^\dagger(\vec{k})$ u Kulonovom gejdžu.

16. Za koherentno stanje $|c\rangle$ (definisano u zadatku 1.1 u udžbeniku *Mandl and Shaw: Quantum Field Theory*, glava 1) izračunati očekivanu vrednost i disperziju električnog polja, kao i disperziju magnetnog polja.

17. Lagranžijan masenog vektorskog polja A_μ u trodimenzionalnom prostor–vremenu sa metričkim tenzorom $g = \mathrm{diag}(1,\, -1,\, -1)$ je $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}$, gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, a $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ je totalno antisimetričan tenzor u tri dimenzije. Naći jednačine kretanja za polje A_μ.

18. Naći jednačine kretanja za lagranžijan kvantne elektrodinamike
$$\mathcal{L} = \overline{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m\overline{\psi}\psi.$$

19. Naći komutatore $[Q,\, \phi(x)]$ i $[Q,\, \phi^\dagger(x)]$ za slobodno kompleksno skalarno polje. Na osnovu dobijenih rezultata izračunati naelektrisanja koja odgovaraju stanjima $\phi(x)|q\rangle$ i $\phi^\dagger(x)|q\rangle$, gde je $|q\rangle$ svojstveno stanje operatora Q sa svojstvenom vrednošću q.

20. Izračunati $\langle 0|\psi(x_1)\psi(x_2)|0\rangle$ i $\langle 0|\overline{\psi}(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\rangle$.

21. Izračunati $\langle 0|\overline{\psi}(x_1)\overline{\psi}(x_2)\psi(x_3)|0\rangle$ i $\langle 0|\overline{\psi}(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)|0\rangle$.

22. Izračunati $\langle 0|\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\overline{\psi}(x_3)\psi(x_4)|0\rangle$.

23. Izračunati $\langle 0|\overline{\psi}(x_1)\psi(x_2)\overline{\psi}(x_3)\psi(x_4)\overline{\psi}(x_5)\psi(x_6)|0\rangle$.

24. Ispitati kako se operatori $\overline{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)$ i $\overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ transformišu pri Lorencovim i pri diskretnim transformacijama.

25. Primenom Vikove teoreme izračunati sledeće vakuumske očekivane vrednosti:

    a) $\langle 0|T(\phi^3(x)\phi^3(y))|0\rangle$,
    b) $\langle 0|T(\phi^5(x)\phi^5(y))|0\rangle$,
    c) $\langle 0|T(\phi^6(x)\phi^6(y))|0\rangle$,
    d) $\langle 0|T(\overline{\psi}(x)\psi(x)\overline{\psi}(y)\psi(y)\overline{\psi}(z)\psi(z))|0\rangle$ i
    e) $\langle 0|T((\overline{\psi}(x)\psi(x))^2(\overline{\psi}(y)\psi(y))^2)|0\rangle$.

26. Naći prvi netrivijalni član u razvoju S-matrice i odgovarajuću Fajnmanovu amplitudu za proces
$$e^+(\vec{p}_1,\, r_1) + e^-(\vec{p}_2,\, r_2) \to \mu^+(\vec{q}_1,\, s_1) + \mu^-(\vec{q}_2,\, s_2).$$

27. Napisati Dirakovu jednačinu u polarnom koordinatnom sistemu, odnosno u obliku
$$(i\gamma^t\partial_t + i\gamma^r\partial_r + i\gamma^\varphi\partial_\varphi + i\gamma^z\partial_z - m)\,\psi(t,\, r,\, \varphi,\, z) = 0,$$
i naći antikomutatore $\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\}$, gde je $\mu,\, \nu = t,\, r,\, \varphi,\, z$. Pokazati da i u polarnom koordinatnom sistemu važi $\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.