Zbirčica zadataka iz teorije elementarnih čestica

Pomoć u polaganju ispita, pa makar ona imala i oblik zbirčice zadataka, uvek je dobrodošla. Zato sam odlučio da na jednom mestu saberem sve zadatke koje sam kao asistent na predmetu *Teorija elementarnih čestica* u toku školske 2002/2003. godine uradio na vežbama, kao i sve domaće zadatke, a koji se ne nalaze u *Zbirci rešenih zadataka iz kvantne teorije polja* Voje Radovanovića. Rezultat je pred vama.

Beograd, 22. maj 2003. godine — Antun Balaž

---

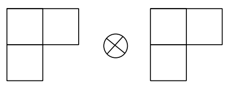
1. Naći hamiltonijan za teoriju u tri prostorno–vremenske dimenzije, sa metričkim tenzorom $g = \mathrm{diag}(1,\, -1,\, -1)$, čija je gustina lagranžijana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho}\,,\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,.$$

2. Naći hamiltonijan za teoriju čija je gustina lagranžijana data sa

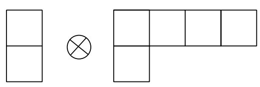
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,,\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,.$$

3. Za grupu SU(3) razložiti direktan proizvod



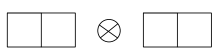
i proveriti rezultat računajući dimenzije reprezentacija.

4. Za grupu SU(4) razložiti direktan proizvod



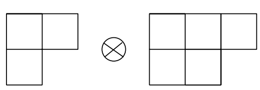
i proveriti rezultat računajući dimenzije reprezentacija.

5. Za grupu SU(3) razložiti direktan proizvod



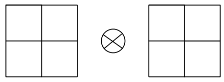
i proveriti rezultat računajući dimenzije reprezentacija.

6. Za grupu SU(4) razložiti direktan proizvod



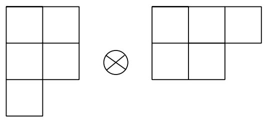
i proveriti rezultat računajući dimenzije reprezentacija.

7. Za grupu SU(5) razložiti direktan proizvod



i proveriti rezultat računajući dimenzije reprezentacija.

8. Za grupu SU(5) razložiti direktan proizvod



i proveriti rezultat računajući dimenzije reprezentacija.

9. U kojim reprezentacijama se nalaze mezoni i barioni u okviru SU(6) kvark modela?

10. Koristeći Jangove šeme konstruisati težinske dijagrame grupe SU(3) za reprezentacije dimenzija 3, 3^*, 8, 10, 10^*.

11. U kojim reprezentacijama se nalaze barioni i mezoni u okviru SU(4) kvark modela? Da li u sudaru bariona iz 20–dimenzionalne reprezentacije i mezona iz 15–dimenzionalne reprezentacije može da nastane barion iz 20^*–dimenzionalne reprezentacije i mezon iz 15–dimenzionalne reprezentacije?

12. Na osnovu zakona održanja kvantnih brojeva ispitati da li su mogući procesi:

    a) $\pi^0 + p \longrightarrow K^+ + K^0 + n$,
    b) $\pi^0 + n \longrightarrow K^+ + K^-$,
    c) $K^- + p \longrightarrow \pi^0 + \Lambda^0$,
    d) $\mu^+ \longrightarrow e^+ + \gamma$.

13. Na osnovu zakona održanja kvantnih brojeva ispitati da li su mogući procesi:

    a) $\mu^- \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$,
    b) $\Sigma^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + n$,
    c) $\Sigma^+ + p \longrightarrow K^+ + p$,
    d) $\omega \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$.

14. Na osnovu kvantnih brojeva odrediti kvarkovsku strukturu piona π^+.

15. Na osnovu kvantnih brojeva naći kvarkovsku strukturu čestica π^-, π^0, K^0, p, n, Σ^+ i Ω^-.

16. Izračunati strukturne konstante i Kartanov metrički tenzor za SU(3) grupu.

17. Neka se pri gejdž–transformacijama polja materije transformišu po nekoj reprezentaciji gejdž–grupe G. Kako treba da se transformišu gejdž–potencijali A_μ i A_μ^a da bi se kovarijantni izvod $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ transformisao kovarijantno, tj. $D_\mu\psi \longrightarrow D'_\mu\psi' = U(\theta)D_\mu\psi$ pri pri transformaciji polja $\psi \longrightarrow \psi' = U(\theta)\psi$?

18. Izračunati tenzor jačine polja $F_{\mu\nu} = -\frac{i}{g}[D_\mu,\, D_\nu]$, kao i komponente $F^a_{\mu\nu}$.

19. Ispitati kako se tenzor $F_{\mu\nu}$ transformiše u odnosu na gejdž–transformacije.

20. Na osnovu zakona transformacije tenzora jačine polja $F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1}$ naći zakon transformacije komponenti $F^a_{\mu\nu}$ za infinitezimalne gejdž–transformacije.

21. Pokazati da je član $-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invarijantan, a član $\frac{1}{2}m^2\mathrm{Tr}A_\mu A^\mu$ nije invarijantan na lokalne gejdž–transformacije koristeći matrični oblik zakona transformacije za $F_{\mu\nu}$ i A_μ. Nakon toga uraditi isto, ali u komponentnom zapisu, tj. pokazati da je član $-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$ invarijantan, a član $\frac{1}{2}m^2A^a_\mu A^{\mu a}$ nije invarijantan na infinitezimalne gejdž–transformacije.

22. Dat je lagranžijan $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$, gde je $\phi = (\phi_1\ \phi_2)^{\mathrm{T}}$ dublet kompleksnih skalarnih polja. Pokazati da je ovaj lagranžijan invarijantan na globalne SU(2) transformacije, a zatim napisati lagranžijan koji se dobija lokalizacijom te SU(2) simetrije, odnosno njenim pretvaranjem u gejdž–grupu.

23. Naći jednačine kretanja za polja ϕ, $\phi^\dagger$ i A^a_μ iz lokalizovanog lagranžijana iz zadatka 22 i prevesti ih u oblik sa kovarijantnim izvodima po poljima.

24. Pokazati da je lokalizovani lagranžijan iz zadatka 22 invarijantan na infinitezimalne lokalne gejdž–transformacije SU(2) grupe.

25. Polazeći od definicije kovarijantnog izvoda koji deluje na polje materije ψ i Lajbnicovog pravila za kovarijantne izvode $D_\mu(M_1M_2) = (D_\mu M_1)M_2 + M_1 D_\mu M_2$, pokazati da važi $D_\mu\xi = \partial_\mu\xi + ig[A_\mu,\, \xi]$, gde je $\xi = \xi^a T^a$ element Lijeve algebre.

26. Odrediti Neter struju J^μ za lokalne gejdž–transformacije u slučaju slobodnog Jang–Milsovog lagranžijana.

27. Proveriti da za struju iz zadatka 26 važi $\partial_\mu J^\mu = 0$.

28. Odrediti Neter struju J^μ za globalne gejdž–transformacije u slučaju slobodnog Jang–Milsovog lagranžijana.

29. Pokazati Bjankijev identitet $D_\mu F_{\nu\rho} + D_\rho F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0$.

30. Pokazati da važi $[D_\mu,\, D_\nu]\theta = ig[F_{\mu\nu},\, \theta]$, gde je $\theta = \theta^a T^a$ element Lijeve algebre gejdž–grupe G.

31. Pokazati da važi Jakobijev identitet $[D_\mu,\, [D_\nu,\, D_\rho]] + [D_\rho,\, [D_\mu,\, D_\nu]] + [D_\nu,\, [D_\rho,\, D_\mu]] = 0$.

32. Dualni tenzor $\tilde{F}_{\mu\nu}$ tenzora jačine polja $F_{\mu\nu}$ definisan je sa $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$. Pokazati da je $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) = \partial_\lambda K^\lambda$, gde K^λ treba odrediti.

33. Dokazati Goldstonovu teoremu: Ukoliko lagranžijan $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - V(\phi)$ ima kontinualnu grupu simetrije G sa n generatora, a vakuum je invarijantan na grupu $H < G$ (pravu podgrupu od G) sa n' generatora ($n' < n$), tada će se u ovoj teoriji nakon spontanog narušenja simetrije pojaviti $n - n'$ bezmasenih Goldstonovih bozona.

34. Dat je lagranžijan $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2$, gde je ϕ kompleksno skalarno polje. Pokazati da je ovaj lagranžijan invarijantan na globalnu U(1) simetriju. Naći vakuum teorije pod pretpostavkom da je $\mu^2 < 0$. Uz izbor vakuuma $\langle\phi\rangle_0 = v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ analizirati maseni spektar teorije i proveriti važenje Goldstonove teoreme.

35. Lagranžijan je dat sa $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi - V(\phi)$, gde je $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \phi^T \phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^T\phi)^2$, a $\phi = (\phi_1\ \phi_2\ \phi_3)^T$ je triplet realnih skalarnih polja.

   a) Naći minimum potencijalne energije $V(\phi)$. Uzimajući za vakuum $\langle\phi\rangle_0 = (0\ 0\ v)^T$, gde je $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, izvršiti smenu $\phi = \phi' + \langle\phi\rangle_0$ u lagranžijanu i ispitati maseni spektar teorije. Proveriti važenje Goldstonove teoreme.

   b) Koristeći smenu $\phi = e^{i\xi^i T^i/v}(0\ 0\ v+\eta)^T$, gde su T^i $(i = 1,\ 2)$ generatori koji narušavaju vakuum $\langle\phi\rangle_0$, a ξ^i $(i = 1,\ 2)$ i η su nova polja, ispitati maseni spektar teorije.

36. Dat je lagranžijan $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$, gde je $\phi = (\phi_1\ \phi_2)^T$ dublet kompleksnih skalarnih polja. Pokazati da je ovaj lagranžijan invarijantan na globalnu SU(2) simetriju. Naći vakuum teorije pod pretpostavkom da je $\mu^2 < 0$. Uz izbor vakuuma $\langle\phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v\ 0)^T$, gde je $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, analizirati maseni spektar teorije i proveriti važenje Goldstonove teoreme.

37. Za lagranžijan $\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, gde je izvod $D_\mu\phi = (\partial_\mu + igA_\mu)\phi$, $V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$, a ϕ je kompleksno skalarno polje, izvršiti smenu $\phi = \phi' + \langle\phi\rangle_0$, gde je $\langle\phi\rangle_0 = v/\sqrt{2}$, $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, i ispitati maseni spektar teorije.

38. Za lagranžijan $\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$, gde je $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ig\frac{\sigma^a}{2}A^a_\mu)\phi$, σ^a su Paulijeve matrice, $V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$, a $\phi = (\phi_1\ \phi_2)^T$ je dublet kompleksnih skalarnih polja, izvršiti smenu $\phi = \phi' + \langle\phi\rangle_0$, gde je $\langle\phi\rangle_0 = (0\ v/\sqrt{2})^T$, $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, i ispitati maseni spektar teorije.

39. Eksplicitno izraziti gejdž–transformacije pomoću kojih suvišna polja iz zadatka 38 mogu da se odgejdžiraju.

40. Za lagranžijan $\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^T(D^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, gde je $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^T\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^T\phi)^2$, a $\phi = (\phi_1\ \phi_2)^T$ je dublet realnih skalarnih polja, izvršiti smenu $\phi = \phi' + \langle\phi\rangle_0$, $\langle\phi\rangle_0 = (v\ 0)^T$, $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, ispitati maseni spektar teorije, prebrojati stepene slobode pre i posle spontanog narušenja simetrije i eksplicitno izraziti gejdž–transformacije pomoću kojih suvišna polja mogu da se odgejdžiraju.

41. Za lagranžijan $\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^T(D^\mu\phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$, gde je $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^T\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^T\phi)^2$, a $\phi = (\phi_1\ \phi_2\ \phi_3)^T$ je triplet realnih skalarnih polja, izvršiti smenu $\phi = \phi' + \langle\phi\rangle_0$, gde je $\langle\phi\rangle_0 = (0\ 0\ v)^T$, $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, ispitati maseni spektar teorije i prebrojati stepene slobode pre i posle spontanog narušenja simetrije.

42. Eksplicitno izraziti gejdž–transformacije pomoću kojih suvišna polja iz zadatka 41 mogu da se odgejdžiraju.

43. U okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija izračunati u najnižem redu teorije perturbacije širinu raspada $W^- \longrightarrow e^- + \overline{\nu}_e$.

44. U okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija izračunati u najnižem redu teorije perturbacije širinu raspada $H \longrightarrow e^- + e^+$.

45. U okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija nacrtati sve Fajnmanove dijagrame koji u najnižem redu teorije perturbacije opisuju proces $e^- + e^+ \longrightarrow \nu_e + \overline{\nu}_e$.

46. U okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija izračunati u najnižem redu teorije perturbacije širinu raspada $Z^0 \longrightarrow W^- + W^+$.

47. U okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija izračunati u najnižem redu teorije perturbacije $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ za proces $\mu^+ + \overline{\nu}_e \longrightarrow e^+ + \overline{\nu}_\mu$ u sistemu centra masa u ultrarelativističkom limesu.

48. U okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija izračunati u najnižem redu teorije perturbacije širinu raspada $Z^0 \longrightarrow e^- + e^+$.

49. Pokazati $\overline{e}\gamma_\mu e = \overline{e}_L\gamma_\mu e_L + \overline{e}_R\gamma_\mu e_R$, gde je $e_L = P_L e = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)e$ i $e_R = P_R e = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)e$.

50. Ispitati da li je član $m\bar{e}e$ invarijantan na delovanje grupe $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$.

51. Pokazati da je $\overline{L}\gamma_\mu L = \frac{1}{2}\overline{\nu}_L\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_L + \frac{1}{2}\overline{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e$, gde je $L = (\nu_L \ e_L)^T$.

52. Nacrtati sve Fajnmanove dijagrame sa dva verteksa za proces $e^- + e^+ \longrightarrow \nu_e + \overline{\nu}_e$ u okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija.

53. Nacrtati sve Fajnmanove dijagrame sa jednim, dva i tri verteksa koji opisuju proces raspada Higsovog bozona u okviru Vajnberg–Salamovog modela elektroslabih interakcija.
