

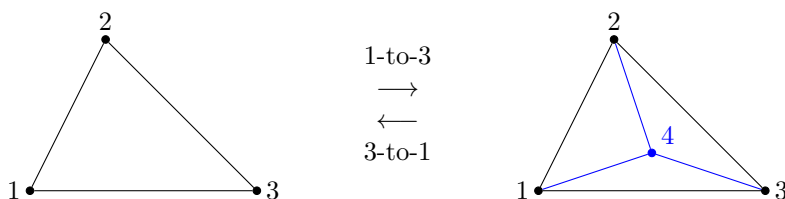
Definicije Pachner-ovih poteza

Marko Vojinović

19.04.2022.

1 Dimenzija $D = 2$

1.1 2D Pachner-ovi potezi 1-u-3 i 3-u-1



Potez 1-u-3 u dati trougao dodaje nov verteks, spaja ga sa postojećim verteksima, i iseca početni trougao na tri manja. Potez 3-u-1 vrši inverznu operaciju.

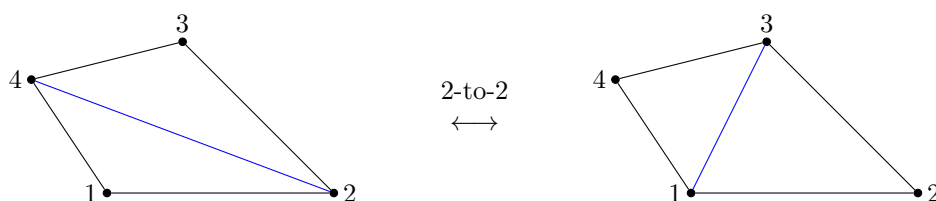
Početna tablica k -simpleksa (crveni se brišu, plavi se dodaju, crni ostaju isti):

$k = 0:$	(1), (2), (3)
$k = 1:$	(1-2), (1-3), (2-3)
$k = 2:$	(1-2-3)

Finalna tablica k -simpleksa:

$k = 0:$	(1), (2), (3), (4)
$k = 1:$	(1-2), (1-3), (2-3), (1-4), (2-4), (3-4)
$k = 2:$	(1-2-4), (1-3-4), (2-3-4)

1.2 2D Pachner-ov potez 2-u-2



Potez 2-u-2 briše edge koji je zajednički za dva trougla, i umesto njega četvorougao seče novim edge-om na druga dva trougla. Inverzan je sam sebi.

Početna tablica k -simpleksa:

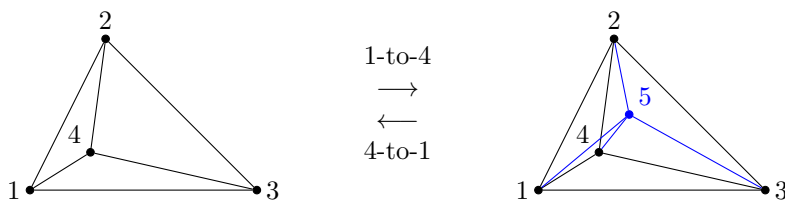
$k = 0:$	(1), (2), (3), (4)
$k = 1:$	(1-2), (2-3), (3-4), (4-1), (4-2)
$k = 2:$	(1-2-4), (2-3-4)

Finalna tablica k -simpleksa:

$k = 0:$	(1), (2), (3), (4)
$k = 1:$	(1-2), (2-3), (3-4), (4-1), (1-3)
$k = 2:$	(1-2-3), (1-3-4)

2 Dimenzija $D = 3$

2.1 3D Pachner-ovi potezi 1-u-4 i 4-u-1



Potez 1-u-4 polazi od zadatog tetraedra, dodaje nov verteks u njegovu unutrašnjost, i povezuje ga sa svim ostalim temenima. Time iseca početni tetraedar na četiri manja tetraedra. Potez 4-u-1 radi inverznu operaciju.

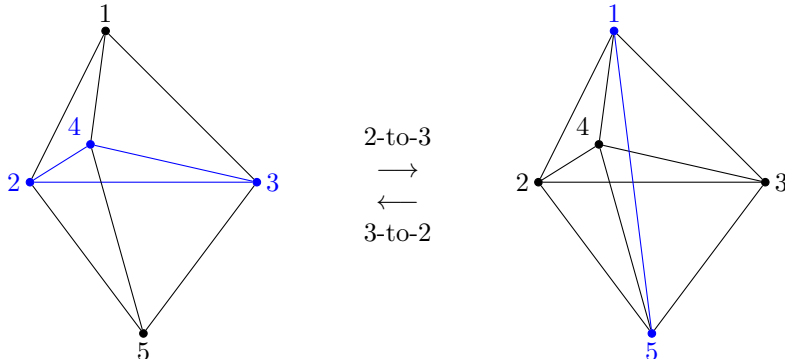
Početna tablica k -simpleksa:

$k = 0:$	(1), (2), (3), (4)
$k = 1:$	(1-2), (1-3), (1-4), (2-3), (2-4), (3-4)
$k = 2:$	(1-2-3), (1-2-4), (1-3-4), (2-3-4)
$k = 3:$	(1-2-3-4)

Finalna tablica k -simpleksa:

$k = 0:$	(1), (2), (3), (4), (5)
$k = 1:$	(1-2), (1-3), (1-4), (2-3), (2-4), (3-4), (1-5), (2-5), (3-5), (4-5)
$k = 2:$	(1-2-3), (1-2-4), (1-3-4), (2-3-4), (1-2-5), (1-3-5), (1-4-5), (2-3-5), (2-4-5), (3-4-5)
$k = 3:$	(1-2-3-5), (1-2-4-5), (1-3-4-5), (2-3-4-5)

2.2 3D Pachner-ovi potezi 2-u-3 i 3-u-2



Potez 2-u-3 briše trougao koji je zajednički za dva tetraedra (gornji i donji), i umesto njega dodaje edge koji iseca figuru na tri nova tetraedra (poput kriški pomorandže). Potez 3-u-2 vrši inverznu operaciju.

Početna tablica k -simpleksa:

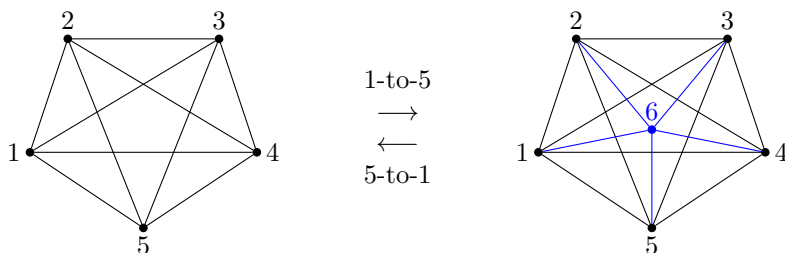
$k = 0:$	(1), (2), (3), (4), (5)
$k = 1:$	(1-2), (1-3), (1-4), (2-3), (2-4), (3-4), (2-5), (3-5), (4-5)
$k = 2:$	(1-2-3), (1-2-4), (1-3-4), (2-3-4), (2-3-5), (2-4-5), (3-4-5)
$k = 3:$	(1-2-3-4), (2-3-4-5)

Finalna tablica k -simpleksa:

$k = 0:$	(1), (2), (3), (4), (5)
$k = 1:$	(1-2), (1-3), (1-4), (2-3), (2-4), (3-4), (2-5), (3-5), (4-5), (1-5)
$k = 2:$	(1-2-3), (1-2-4), (1-3-4), (2-3-5), (2-4-5), (3-4-5), (1-2-5), (1-3-5), (1-4-5)
$k = 3:$	(1-2-3-5), (1-2-4-5), (1-3-4-5)

3 Dimenzija $D = 4$

3.1 4D Pachner-ovi potezi 1-u-5 i 5-u-1



Potez 1-u-5 polazi od jednog 4-simpleksa, dodaje jedan verteks u njegovu unutrašnjost, i spaja novi verteks sa svim postojećim verteksima. Time se 4-simpleks iseca na 5 manjih 4-simpleksa. Potez 5-u-1 je inverzna operacija.

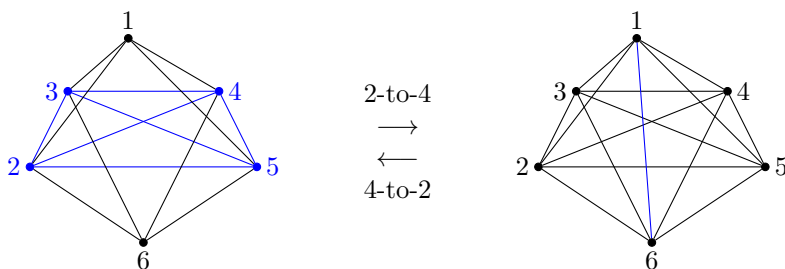
Početna tablica k -simpleksa:

$k = 0$:	(1), (2), (3), (4), (5)
$k = 1$:	(1-2), (1-3), (1-4), (1-5), (2-3), (2-4), (2-5), (3-4), (3-5), (4-5)
$k = 2$:	(1-2-3), (1-2-4), (1-2-5), (1-3-4), (1-3-5), (1-4-5), (2-3-4), (2-3-5), (2-4-5), (3-4-5)
$k = 3$:	(1-2-3-4), (1-2-3-5), (1-2-4-5), (1-3-4-5), (2-3-4-5)
$k = 4$:	(1-2-3-4-5)

Finalna tablica k -simpleksa:

$k = 0$:	(1), (2), (3), (4), (5), (6)
$k = 1$:	(1-2), (1-3), (1-4), (1-5), (2-3), (2-4), (2-5), (3-4), (3-5), (4-5), (1-6), (2-6), (3-6), (4-6), (5-6)
$k = 2$:	(1-2-3), (1-2-4), (1-2-5), (1-3-4), (1-3-5), (1-4-5), (2-3-4), (2-3-5), (2-4-5), (3-4-5), (1-2-6), (1-3-6), (1-4-6), (1-5-6), (2-3-6), (2-4-6), (2-5-6), (3-4-6), (3-5-6), (4-5-6)
$k = 3$:	(1-2-3-4), (1-2-3-5), (1-2-4-5), (1-3-4-5), (2-3-4-5), (1-2-3-6), (1-2-4-6), (1-2-5-6), (1-3-4-6), (1-3-5-6), (1-4-5-6), (2-3-4-6), (2-3-5-6), (2-4-5-6), (3-4-5-6)
$k = 4$:	(1-2-3-4-6), (1-2-3-5-6), (1-2-4-5-6), (1-3-4-5-6), (2-3-4-5-6)

3.2 4D Pachner-ovi potezi 2-u-4 i 4-u-2



Potez 2-u-4 briše tetraedar koji je zajednički za dva 4-simpleksa (gornji i donji), i dodaje nov edge koji preseca figuru na četiri nova 4-simpleksa (poredjanih kao kriške pomorandže). Potez 4-u-2 je inverzna operacija.

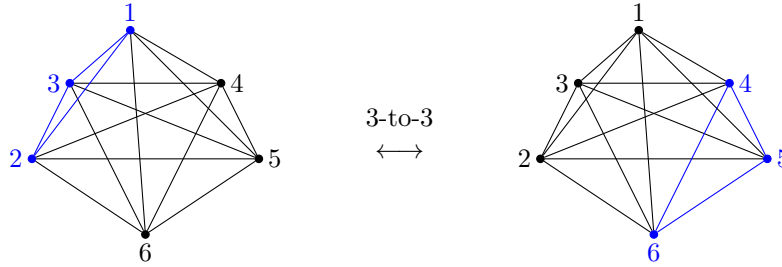
Početna tablica k -simpleksa:

$k = 0$:	(1), (2), (3), (4), (5), (6)
$k = 1$:	(1-2), (1-3), (1-4), (1-5), (2-3), (2-4), (2-5), (3-4), (3-5), (4-5), (6-2), (6-3), (6-4), (6-5)
$k = 2$:	(1-2-3), (1-2-4), (1-2-5), (1-3-4), (1-3-5), (1-4-5), (2-3-4), (2-3-5), (2-4-5), (3-4-5), (6-2-3), (6-2-4), (6-2-5), (6-3-4), (6-3-5), (6-4-5)
$k = 3$:	(1-2-3-4), (1-2-3-5), (1-2-4-5), (1-3-4-5), (2-3-4-5), (6-2-3-4), (6-2-3-5), (6-2-4-5), (6-3-4-5)
$k = 4$:	(1-2-3-4-5), (6-2-3-4-5)

Finalna tablica k -simpleksa:

$k = 0$:	(1), (2), (3), (4), (5), (6)
$k = 1$:	(1-2), (1-3), (1-4), (1-5), (2-3), (2-4), (2-5), (3-4), (3-5), (4-5), (6-2), (6-3), (6-4), (6-5), (1-6)
$k = 2$:	(1-2-3), (1-2-4), (1-2-5), (1-3-4), (1-3-5), (1-4-5), (2-3-4), (2-3-5), (2-4-5), (3-4-5), (6-2-3), (6-2-4), (6-2-5), (6-3-4), (6-3-5), (6-4-5), (1-2-6), (1-3-6), (1-4-6), (1-5-6)
$k = 3$:	(1-2-3-4), (1-2-3-5), (1-2-4-5), (1-3-4-5), (6-2-3-4), (6-2-3-5), (6-2-4-5), (6-3-4-5), (1-2-3-6), (1-2-4-6), (1-2-5-6), (1-3-4-6), (1-3-5-6), (1-4-5-6)
$k = 4$:	(1-2-3-4-6), (1-2-3-5-6), (1-2-4-5-6), (1-3-4-5-6)

3.3 4D Pachner-ov potez 3-u-3



Potez 3-u-3 polazi od figure koja se sastoji od tri 4-simpleksa koji dele zajednički trougao. Potezom se briše taj trougao, i umesto njega se dodaje drugi (naspramni) trougao, koji je sada zajednički za nova tri 4-simpleksa (stari su razmontirani). Potez je inverzan sam sebi.

Početna tablica k -simpleksa:

$k = 0$:	(1), (2), (3), (4), (5), (6)
$k = 1$:	(1-2), (1-3), (1-4), (1-5), (1-6), (2-3), (2-4), (2-5), (2-6), (3-4), (3-5), (3-6), (4-5), (4-6), (5-6)
$k = 2$:	(1-2-3), (1-2-4), (1-2-5), (1-2-6), (1-3-4), (1-3-5), (1-3-6), (1-4-5), (1-4-6), (1-5-6), (2-3-4), (2-3-5), (2-3-6), (2-4-5), (2-4-6), (2-5-6), (3-4-5), (3-4-6), (3-5-6)
$k = 3$:	(1-2-3-4), (1-2-3-5), (1-2-3-6), (1-2-4-5), (1-2-4-6), (1-2-5-6), (1-3-4-5), (1-3-4-6), (1-3-5-6), (2-3-4-5), (2-3-4-6), (2-3-5-6)
$k = 4$:	(1-2-3-4-5), (1-2-3-4-6), (1-2-3-5-6)

Finalna tablica k -simpleksa:

$k = 0$:	(1), (2), (3), (4), (5), (6)
$k = 1$:	(1-2), (1-3), (1-4), (1-5), (1-6), (2-3), (2-4), (2-5), (2-6), (3-4), (3-5), (3-6), (4-5), (4-6), (5-6)
$k = 2$:	(1-2-4), (1-2-5), (1-2-6), (1-3-4), (1-3-5), (1-3-6), (1-4-5), (1-4-6), (1-5-6), (2-3-4), (2-3-5), (2-3-6), (2-4-5), (2-4-6), (2-5-6), (3-4-5), (3-4-6), (3-5-6), (4-5-6)
$k = 3$:	(1-2-4-5), (1-2-4-6), (1-2-5-6), (1-3-4-5), (1-3-4-6), (1-3-5-6), (1-4-5-6), (2-3-4-5), (2-3-4-6), (2-3-5-6), (2-4-5-6), (3-4-5-6)
$k = 4$:	(1-2-4-5-6), (1-3-4-5-6), (2-3-4-5-6)

4 Proizvoljna dimenzija D

Za slučaj proizvoljne dimenzije D , postoji opšta definicija Pachner-ovih poteza [1], koja glasi otprilike ovako (parafraziram Wikipediju):

Neka je Δ_{D+1} neki $(D+1)$ -simpleks. Obeležimo sa $\partial\Delta_{D+1}$ kombinatornu D -sferu, čija je triangulacija definisana granicom $(D+1)$ -simpleksa. Tada, za zadatu triangulaciju deo-po-deo ravne mnogostrukosti \mathcal{M} dimenzije D , i za zadati pod-kompleks $C \subset \mathcal{M}$ kodimenzije 0, zajedno sa simplicijalnim izomorfizmom $\phi : C \rightarrow C' \subset \partial\Delta_{D+1}$, **Pachner-ov potez u \mathcal{M} asociran sa C** je po definiciji triangulacija mnogostrukosti $\mathcal{M}' = (\mathcal{M} \setminus C) \cup_{\phi} (\partial\Delta_{D+1} \setminus C')$.

Iako definicija zvuči relativno kriptično, sve ovo u suštini znači da u datom simplicijalnom kompleksu \mathcal{M} dimenzije D , mi izaberemo pod-kompleks C iste dimenzije, koji se “izvadi” iz \mathcal{M} , i na njegovo mesto se “ubaci” pod-kompleks $\partial\Delta_{D+1} \setminus C'$, što predstavlja ostatak D -sfere iz koje smo “izvadili” isti takav pod-kompleks C' (izomorfan sa C). U našoj terminologiji gore, ovo bi bio potez tipa (C) -u- $(\partial\Delta_{D+1} \setminus C')$. Obratite pažnju da se u svim našim potezima gore, spajanjem leve i desne slike dobija triangulacija D -sfere, koja je granica $(D+1)$ -simpleksa Δ_{D+1} .

Medjutim, ono što je malo nezgodno u svemu ovome je kako konstruisati C i $\partial\Delta_{D+1} \setminus C'$ eksplicitno za proizvoljnu dimenziju D . Svaka D -sfera sadrži u sebi ukupno $D+2$ D -simpleksa, pa bi trebalo particionisati sferu na sve moguće neekvivalentne kombinacije simpleksa, odnosno konstruisati sve poteze po sledećoj šemi:

Potez	C	$\partial\Delta_{D+1} \setminus C'$
1-u- $(D+1)$	jedan D -simpleks	preostalih $D+1$ D -simpleksa koji dele jedan verteks
2-u- D	dva D -simpleksa koji dele jedan $(D-1)$ -simpleks	preostalih D D -simpleksa koji dele jedan edge
3-u- $(D-1)$	tri D -simpleksa koji dele jedan $(D-2)$ -simpleks	preostalih $D-1$ D -simpleksa koji dele jedan trougao
k -u- $(D+2-k)$	\vdots	\vdots
$(D+1)$ -u-1	$D+1$ D -simpleksa koji dele jedan verteks	preostali D -simpleks

Ovde su inverzni potezi prvi sa poslednjim, drugi sa preposlednjim, itd. Tablica se “u sredini” razlikuje za parne i neparne dimenzije D . Za parno D ukupan broj Pachner-ovih poteza je neparan, jer u sredini tablice postoji potez $(\frac{D+2}{2})$ -u- $(\frac{D+2}{2})$ koji je sam sebi inverzan. Za neparno D u sredini imamo dva susedna poteza, $(\frac{D+1}{2})$ -u- $(\frac{D+3}{2})$ i $(\frac{D+3}{2})$ -u- $(\frac{D+1}{2})$, koji su inverzni jedan drugom.

Teorijski gledano, moguće je osmisliti algoritam koji bi implementirao proizvoljan Pachner-ov potez pomoću jedne opšte funkcije k -u- $(D+2-k)$, koja bi primala k i D kao parametre. Ali u praksi, uopšte nemam ideju koliko bi to bilo komplikovano napraviti. O konstrukciji opšteg D -dimenzionalnog slučaja možemo da meditiramo, a u medjuvremenu treba da implementiramo poteze u $D = 2, 3, 4$, i potez 1-u- $(D+1)$ za opšti slučaj (koji je relativno lak za napraviti).

References

[1] Udo Pachner,

“P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings”,

Eur. Jour. Combinat. **12**, 129–145 (1991).

DOI: 10.1016/s0195-6698(13)80080-7