

Nenad Simonović • Darko Kapor



KVANTNA MEHANIKA 1

Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Banjoj Luci

Nenad Simonović – Darko Kapor
KVANTNA MEHANIKA 1
prvo izdanje

recenzenti

dr Tasko Grozdanov
naučni savetnik Instituta za fiziku, Beograd
redovni profesor Fizičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu
dr Zoran Ivić
naučni savetnik Instituta za nuklearne nauke "Vinča", Beograd

izdavač

Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Banjoj Luci

ISBN 978-99955-21-64-6

štampa

"Art Print"
Petra Preradovića 2, Banja Luka

Predgovor

Ovaj udžbenik je namenjen pre svega studentima III godine Odsjeka za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta (PMF) u Banjoj Luci, iako ga mogu koristiti i svi drugi studenti koji rade po sličnom planu i programu. Udžbenik je u potpunosti usklađen sa planom i programom kursa Kvantna mehanika 1 i usklađen sa sadržajima koje su studenti već upoznali na kursovima Matematičke i Teorijske fizike kao i različitim predmetima vezanim za Eksperimentalnu fiziku.

Rukopis je zasnovan na predavanjima iz Kvantne mehanike koja su na PMF u kontinuitetu od osnivanja Odsjeka do danas držali autori, prvo prof. Kapor a potom prof. Simonović. Na ovim predavanjima i pri pisanju su korišćena iskustva kvalitetnih udžbenika sa univerziteta širom sveta. Na taj način je nastao tekst koji pokušava da ostvari ravnotežu između eksperimentalnih činjenica, njihovog teorijskog tumačenja i primene matematike u svemu tome. U želji da ne preopteretimo tekst, niz digresija namenjenih pre svega radoznalijim studentima je izložen u fusnotama.

Tokom rada smo imali u vidu pitanja koja su studenti postavljali na predavanjima, konsultovali smo po određenim pitanjima kolege sa Odsjeka, a i sami recenzenti su imali niz konstruktivnih primedaba, što je sve doprinelo poboljšanju kvaliteta teksta i stoga im svima najtoplije zahvaljujemo. Autori su svesni da je lako moguće da su se i u konačnoj verziji potkrale određene greške i bićemo zahvalni svim korisnicima knjige ako nam na njih ukažu kako bi one bile ispravljene u kasnijim izdanjima.

Mart 2018.

Autori

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Priroda svetlosti	1
1.1.1	Razvoj ideje o prirodi svetlosti od XVII do kraja XIX veka	1
1.1.2	Ajnštajnova teorija svetlosti. Fotoni	2
1.1.3	Potvrda čestične prirode svetlosti. Komptonov efekat	3
1.1.4	Talasno-čestični dualizam	5
1.2	Stara kvantna teorija	5
1.2.1	Planetarni model atoma i Borova teorija	5
1.2.2	Kvant dejstva	7
1.2.3	Uopštenje Borove teorije	8
1.2.4	Princip korespondencije	9
1.3	Nastanak kvantne mehanike	10
1.3.1	Hajzenbergova kritika stare kvantne teorije i matrična mehanika	11
1.3.2	De Broljeva hipoteza i Šredingerova talasna mehanika	11
1.3.3	Različite formulacije kvantne mehanike	12
1.4	Osnovne ideje i principi kvantne mehanike	13
1.4.1	Talasno-čestični dualizam. Analiza eksperimenta sa dva proreza	13
1.4.2	Kvantno ponašanje	15
1.4.3	Princip neodređenosti i komplementarnost	16
1.4.4	Relacije neodređenosti	17
1.4.5	Stanje kvantnog sistema i princip superpozicije	19
1.4.6	Značaj pojma merenja u kvantnoj mehanici	20
1.4.7	Kvantni ansambli. Čista i mešana stanja	21
2	Matematičke osnove kvantne mehanike	23
2.1	Vektorski prostori	23
2.1.1	Algebarske strukture	23
2.1.2	Linearna zavisnost vektora i bazis vektorskog prostora	25
2.1.3	Jednoznačnost predstavljanja vektora u bazisu. Izomorfizam prostora	26
2.1.4	Skalarni proizvod i ortogonalnost. Unitarni i Hilbertovi prostori	28
2.1.5	Prostor stanja kvantnog sistema	30
2.2	Linearni operatori	31
2.2.1	Definicija operatora i osnovne operacije sa njima	31
2.2.2	Predstavljanje operatora matricama	32
2.2.3	Osnovne vrste operatora i njihove osobine	33
2.2.4	Svojstveni problem operatora	35

2.2.5	Svojstveni problem ermitskog operatora. Svojstveni bazis. Opserveable	36
2.2.6	Neprekidni spektar ermitskog operatora	38
2.2.7	Dirakova delta funkcija	40
3	Osnovni pojmovi i principi kvantne mehanike	43
3.1	Talasna funkcija i njena interpretacija	43
3.1.1	Opis stanja kvantnog sistema pomoću talasne funkcije	43
3.1.2	Kretanje slobodne čestice. Ravni talasi	44
3.1.3	Princip superpozicije	45
3.1.4	Grupna brzina talasa. Talasni paket	46
3.1.5	Statistička interpretacija talasne funkcije	48
3.1.6	Normiranje ravnih talasa u ograničenoj zapremini	51
3.2	Izračunavanje srednjih vrednosti fizičkih veličina	54
3.2.1	Srednja vrednost rezultata merenja, srednje kvadratno odstupanje i standardna devijacija	54
3.2.2	Izračunavanje srednje vrednosti koordinate i veličina koje su funkcije koordinate	56
3.2.3	Izračunavanje srednje vrednosti impulsa	57
3.2.4	Izračunavanje srednje vrednosti funkcije impulsa	59
3.2.5	Srednja vrednost zbira funkcija koordinate i impulsa. Izračunavanje srednje vrednosti energije čestice	60
3.3	Operatori fizičkih veličina	60
3.3.1	Opšti oblik izraza za srednju vrednost	60
3.3.2	Osobine operatora koji opisuju fizičke veličine. Opserveable	61
3.3.3	Operatori koordinate i impulsa. Multiplikativni i diferencijalni operatori	62
3.3.4	Pridruživanje operatora fizičkim veličinama. Kvantizacija	63
3.3.5	Komutacione relacije između komponenti koordinate i impulsa. Osnovni operatori u kvantnoj mehanici	65
3.4	Svojstvena stanja i spektri opservabli	67
3.4.1	Uslov da fizička veličina ima određenu vrednost. Svojstveni problem opservable	67
3.4.2	Moguće vrednosti fizičke veličine i promena stanja kao rezultat merenja	69
3.4.3	Primeri rešavanja svojstvenog problema operatora fizičkih veličina	71
3.4.4	Osobine svojstvenih funkcija opservabli sa diskretnim spektrom	73
3.4.5	Verovatnoća dobijanja određene vrednosti fizičke veličine iz diskretnog spektra	76
3.4.6	Osobine svojstvenih funkcija opservabli sa neprekidnim spektrom	77
3.4.7	Verovatnoća dobijanja vrednosti iz neprekidnog spektra	80

3.4.8	Primeri normiranja svojstvenih funkcija opservabli sa neprekidnim spektrom	81
3.4.9	Istovremeno merenje više fizičkih veličina. Kompatibilne opservable	82
3.4.10	Relacije neodređenosti	83
3.4.11	Određivanje stanja kvantnih sistema. Kompletan skup kompatibilnih opservabli	84

4 Promena stanja kvantnog sistema sa vremenom i stacionarna stanja 87

4.1	Šredingerova jednačina	87
4.1.1	Opšti uslovi koje treba da ispunjava jednačina evolucije kvantnog stanja	87
4.1.2	Šredingerova jednačina za česticu u datom potencijalu	88
4.1.3	Veza sa klasičnom mehanikom	90
4.1.4	Održavanje norme talasne funkcije, gustina struje verovatnoće i jednačina kontinuiteta	90
4.1.5	Promena stanja kvantnog sistema	92
4.2	Stacionarna stanja i opšte rešenje Šredingerove jednačine	93
4.2.1	Razdvajanje promenljivih. Stacionarna stanja	93
4.2.2	Opšte rešenje Šredingerove jednačine	95
4.2.3	Promena srednje vrednosti fizičke veličine sa vremenom	96
4.3	Jednodimenzioni kvantni sistemi. Primeri rešavanja Šredingerove jednačine	97
4.3.1	Čestica u asimetričnoj pravougaonoj potencijalnoj jami	98
4.3.2	Pravougaona potencijalna jama sa simetričnim zidovima	103
4.3.3	Beskonačno duboka pravougaona potencijalna jama	104
4.3.4	Potencijalni prag	106
4.3.5	Potencijalna barijera. Tunel efekat	108
4.3.6	Linearni harmonijski oscilator	111

5 Čestica u centralnosimetričnom potencijalu. Teorija orbitalnog ugaonog momenta 115

5.1	Šredingerova jednačina za česticu u centralnosimetričnom potencijalu	115
5.1.1	Hamiltonijan čestice u polju centralnih sila	115
5.1.2	Šredingerova jednačina u sfernim koordinatama i razdvajanje radijalne od ugaonih promenljivih	117
5.2	Teorija orbitalnog ugaonog momenta	118
5.2.1	Komutacione relacije	118
5.2.2	Svojstveni problem operatora \hat{L}^2 . Razdvajanje promenljivih	119
5.2.3	Rešenja jednačine za funkciju Θ u slučaju $m = 0$	120
5.2.4	Rešenja jednačine za funkciju Θ za proizvoljno m	122
5.2.5	Sferni harmonici	125
5.2.6	Parnost sfernih harmonika	125

5.3	Radijalni problem	126
5.3.1	Opšta teorija	126
5.3.2	Rešavanje radijalne jednačine za Kulonov potencijal. Diskretni energijski spektar atoma sa jednim elektronom	127
5.3.3	Svojstvene funkcije vezanih stanja atoma sa jednim elektronom	130
Bibliografija		135
Indeks		137

1 Uvod

Krajem XIX veka u fizici su postojale dve zaokružene i gotovo nezavisne teorije koje su opisivale dva osnovna vida egzistencije materije – supstancu (čestice, tela, višestruke sisteme, fluide) i zračenje (svetlost i elektromagnetne talase uopšte).¹ To su Njutnova mehanika i Maksvelova elektrodinamika. Međutim, za mnoge pojave, posebno za one koje se javljaju na atomskim i subatomskim dimenzijama, nije bilo moguće naći zadovoljavajuće objašnjenje u okviru ovih teorija. Teškoće su naročito bile velike kada se radilo o pojavama čiji opis je zahtevao angažovanje obeju teorija (apsorpcija i emisija zračenja iz atoma, zračenje apsolutno crnog tela, fotoelektrični efekat, itd.). Neslaganje između eksperimentalnih rezultata i postojećih teorija je ukazivalo na potrebu izgradnje nove teorije, primenljive na atomskoj skali, koja bi zahtevala fundamentalnu izmenu nekih od osnovnih fizičkih koncepata i zakona. Na drugoj strani neuspeh eksperimenata čiji je cilj bio potvrda teorije etra² doveo je do novih interpretacija u elektrodinamici vezanih za prostiranje elektromagnetnih talasa, promene u poimanju prostora i vremena i formulacije novih principa relativnosti. Tako su se početkom XX veka u fizici pojavile dve revolucionarne ideje – kvantna mehanika i relativistička mehanika. U novom okruženju klasična fizika se pojavljuje kao njihova aproksimacija koja može na zadovoljavajući način da opiše makroskopske sisteme i njihovu dinamiku pri brzinama mnogo manjim od brzine svetlosti. Nove teorije su značajno doprinele sprezanju gore pomenutih fundamentalnih oblasti fizike – mehanike i elektrodinamike. Međutim, kvantna i relativistička mehanika su u velikoj meri ostale nezavisne i do danas nije formirana potpuno zadovoljavajuća teorija koja objedinjava relativističke i kvantne fenomene.

1.1 Priroda svetlosti

1.1.1 Razvoj ideje o prirodi svetlosti od XVII do kraja XIX veka

Na nastanak kvantne mehanike je posebno uticao razvoj ideje o prirodi svetlosti. Ova ideja se nekoliko puta menjala u poslednjih nekoliko vekova varirajući između dve osnovne koncepcije – talasne i čestične. Dekart (René Descartes, XVII vek) je smatrao da svetlost predstavlja neku vrstu spoljašnjeg impulsa (pritiska) koji vrše svetleća tela na transparentnu sredinu i da se prostire kroz nju slično zvučnim talasima. Iako je

¹Ovde treba napomenuti da se u anglosaksonskoj literaturi pod materijom obično podrazumeva samo supstanca, a za zračenje (fizičko polje) se često koristi i izraz energija.

²Do kraja XIX veka u fizici je bila aktuelna hipoteza o etru – medijumu koji ispunjava ceo prostor i omogućava prostiranje elektromagnetnih talasa. Danas je ova hipoteza potpuno odbačena.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

530.14(075.8)

СИМОНОВИЋ, Ненад

Kvantna mehanika. 1 / Nenad Simonović, Darko Kapor. - 1. izd. -
Banja Luka : Univerzitet u Banjoj Luci, Prirodno-matematički fakultet,
2018 ([s.l. : s.n.]). - VIII, 141 str. : ilustr. ; 24 cm

Tiraž 100. - Napomene i bibliografske reference uz tekst. - Bibliografija:
str. 135-136. - Registar.

ISBN 978-99955-21-64-6

1. Капор, Дарко [аутор]

COBISS.RS-ID 7274008