GRAVITACIJA
I LOKALNE SIMETRIJE

Biblioteka Horizonti. Posle devet godina postojanja časopisa *Sveske fizičkih nauka*, osetila se u našoj sredini potreba za pokretanjem nove, monografske serije, u kojoj bi se na koherentan način izlagale čitave oblasti savremene fizike. U svakoj knjizi ove serije biće dat ne samo stručan pregled, već i kompletan prikaz osnovnih ideja odredjene oblasti, koji će čitaoca voditi od uvodnih razmatranja, preko sistematskog izlaganja savremenih istraživačkih rezultata, pa sve do onih problema koji leže u blizini samog horizonta našeg razumevanja fizičkih pojava. Biblioteka *Horizonti* namenjena je mladjim istraživačima, studentima poslediplomskih i osnovnih studija, kao i svima onima koji žele da se aktivno i efikasno uključe u savremeno istraživanje u fizici.

MILUTIN BLAGOJEVIĆ

GRAVITACIJA
I LOKALNE SIMETRIJE

INSTITUT ZA FIZIKU — BEOGRAD, 1997

SVESKE FIZIČKIH NAUKA Institut za fiziku — Beograd

Biblioteka HORIZONTI

Milutin Blagojević: GRAVITACIJA I LOKALNE SIMETRIJE

Recenzenti: dr Djordje Šijački
dr Zvonko Marić

Lektor: dr Asim Peco

Izdavač: Institut za Fiziku — 11001 Beograd, pp. 57
Zemun, Pregrevica 118
Za izdavača: dr Dragan Popović

CIP – Katalogizacija u publikaciji Narodne biblioteke Srbije, Beograd

531.51.01

BLAGOJEVIĆ, Milutin
Gravitacija i lokalne simetrije / Milutin Blagojević. – Beograd: Institut za fiziku, 1997 (Beograd: Tehnološko metalurški fakultet). – XI, 483 str. ; 27 cm. – (Biblioteka Horizonti. Sveske fizičkih nauka)

Tiraž: 250. – Bibliografija: str. 445–470. – Registar.

ISBN 86–82441–04–7

539.12 514.7
a) Gravitacija b) Atomi – Elementarne čestice c) Diferencijalna geometrija
d) Teorija polja
ID = 53584908

Izdavanje ove knjige delimično je finansiralo Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije.

Štampa: Zavod za grafičku tehniku, Tehnološko–metalurški fakultet, Beograd, Karnegijeva 4.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ideja o jedinstvenoj prirodi osnovnih fizičkih interakcija razvijala se paralelno sa razvojem našeg shvatanja dinamičke strukture ovih interakcija. Ona ima korene u Maksvelovom ujedinjenju elektriciteta i magnetizma u drugoj polovini prošlog veka, stekla je zrelost u pokušajima ujedinjenja elektrodinamike i gravitacije u prvoj polovini ovog veka, da bi se, sedamdesetih godina, uspešno iskazala nastankom jedinstvene teorije elektroslabih i, u izvesnoj meri, jakih interakcija. Na veliki problem u ostvarenju ove ideje nailazimo pri pokušaju ujedinjenja gravitacije sa drugim osnovnim interakcijama, u okviru konzistentne kvantne teorije.

U toku razvoja teorije elektroslabih i jakih interakcija postao je jasan veliki dinamički značaj principa lokalne (unutrašnje) simetrije. Manje je poznato da se i princip ekvivalencije, koji predstavlja jednu od osnovnih dinamičkih osobina gravitacije, može izraziti jezikom lokalne (prostorno–vremenske) simetrije. Osnovni predmet ove knjige je izlaganje veze izmedju strukture gravitacione interakcije i principa lokalne simetrije.

U prvom delu ove knjige, glave I–VI, sistematski je izložena struktura gravitacije kao teorije sa lokalnom prostorno–vremenskom simetrijom. U prvoj glavi, koja ima uvodni karakter, izlažu su neke osnovne osobine prostora, vremena i gravitacije. U drugoj glavi se uvode elementi Poenkareove i konformne simetrije koji su neophodni za izlaganje postupka lokalizacije ovih simetrija; izgradnja odgovarajućih teorija gravitacije data je u glavama III i IV. Zatim se, u glavama V i VI, izlažu osnovi Hamiltonove dinamike lokalne Poenkareove teorije, razmatra veza izmedju lokalne simetrije i zakona održanja, i uvodi pojam gravitacione energije i drugih održanih veličina. U drugom delu knjige, glave VII–XI, izloženi su važni pokušaji izgradnje jedinstvene teorije polja koja sadrži i gravitaciju. U glavama VII i VIII razmatra se mogućnost izgradnje gravitacije kao teorije polja u ravnom prostor–vremenu. U glavama IX, X i XI izlažu se ideje supersimetrije i supergravitacije, višedimenzione teorije gravitacije i teorije struna — ideje bez kojih je teško zamisliti ostvarenje jedinstvene teorije osnovnih fizičkih interakcija.

Knjiga je namenjena diplomiranim studentima fizike i drugih, srodnih disciplina, kao uvod u izučavanje teorije gravitacije sa gledišta fizike elementarnih čestica. Pisana je tako da predstavlja kompletnu i nezavisnu celinu, i može se koristiti bez prethodnog poznavanja klasične teorije gravitacije i teorije lokalnih simetrija. Naravno, poznavanje ovih disciplina znatno će olakšati praćenje izlaganja.

Prvi deo knjige (I–VI) predstavlja osnovu kursa *Teorija gravitacije II*, koji dugo godina teče na postdiplomskim studijama iz teorijske fizike, odsek *Elementarne čestice i teorija gravitacije*, na Fizičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Glave IX–XI su korišćene kao osnova za kurs *Unifikacija osnovih interakcija*, u toku školske 1995/96 godine.

Posebne osobine. Da bi se knjiga efikasno koristila, korisno je istaći neke njene osobine.

— Primeri u tekstu služe da ilustruju osnovno izlaganje i učine ga jasnijim.

— Zadaci koji prate svaku glavu sastavni su deo knjige. Bez njih nije moguće aktivno praćenje osnovnog izlaganja.

— Na kraju svake glave dat je kratak pregled izvesnog broja važnih ideja i radova, čime su ilustrovani savremeni problemi i metodi istraživanja.

— U Dodatku se nalaze teme koje se, po odnosu prema osnovnom tekstu, mogu podeliti u nekoliko grupa.

a) Tehnički dodaci J i L (teorija Dirakovih spinora, Furijeovi redovi) su *neophodni* za praćenje izlaganja u glavama IX i XI.

b) Poznavanje materijala iz dodataka A, H i I (teorija unutrašnjih lokalnih simetrija, teorija Lorencove i Poenkareove grupe) *veoma je poželjno* za uspešno praćenje izlaganja u glavama III (A) i IX (H, I).

c) Teme izložene u dodacima C, D, E, F i G predstavljaju *dopune* osnovnog izlaganja, koje se mogu studirati po izboru čitaoca.

d) Teme izložene u dodacima B i K *nisu neophodne* za praćenje osnovnog izlaganja. One daju dublju matematičku osnovu za geometrijska razmatranja u glavama III, IV i X.

— U spisku literature navedene su reference koje pokrivaju materijal izložen u tekstu. Osnovne reference za pojedine glave označene su simbolom •.

— Glava IV u prvom delu knjige, i glave VII i VIII u drugom, mogu se preskočiti pri prvom čitanju, bez narušenja osnovne niti izlaganja.

Napomene. Materijal izložen u ovoj knjizi nastao je pod jakim uticajem istraživačkih interesa u grupi *Čestice i polja*, u Beogradu, u toku poslednjih 15–20 godina. Želeo bih, ovom prilikom, da pomenem ljude koji su, na jedan ili drugi način, uticali na formiranje mog pogleda na gravitaciju. To su: Djordje Živanović, koji je mnogima od nas bio i ostao inspiracija za izučavanje gravitacije; Pavle Senjanović, od koga sam naučio Dirakov metod za sisteme sa vezama; Ignjat Nikolić i Milovan Vasilić, najpre moji studenti a zatim dugogodišnji i veoma uspešni saradnici; Branislav Sazdović, koji je uticao na moje shvatanje supersimetrije i teorije struna; tu su, zatim, Dragan Popović, saradnik iz ranog perioda naših studija gravitacije, i Djordje Šijački, koji nam je neumorno ukazivao na važnu ulogu simetrije u teoriji gravitacije.

Za veoma korisne primedbe koje su mi dali pri čitanju pojedinih delova teksta i izradi nekih grupa zadataka, zahvaljujem se koleginici Tatjani Vukašinac, i kolegama Milovanu Vasiliću, Djordju Šijačkom, Branislavu Sazdoviću, Nenadu Manojloviću i Aleksandru Bogojeviću. Ipak, najveću pomoć u tome su mi pružili studenti Olivera Mišković i Dejan Stojković, koji su, svake nedelje u toku šest meseci, pažljivo slušali moja predavanja, detaljno proučili ceo tekst sa izuzetkom VII i VIII glave, i uradili sve prateće zadatke i seminare.

Posebnu zahvalnost dugujem Ignjatu Nikoliću, koautoru rukopisa *Teorija gravitacije II*, napisanog 1986. godine za studente istoimenog kursa gravitacije, za dozvolu da koristim svoj doprinos tom rukopisu, sa manjim ili većim izmenama, i pri pisanju ove knjige. Tako je u ovu knjigu ušao i deo onog duha saradnje, koji je nastao u toku našeg dugogodišnjeg zajedničkog rada na problemima gravitacije.

Najzad, želim da se zahvalim Snežani Milanović na pažljivoj izradi slika.

Beograd, oktobar 1996. Milutin Blagojević

PROSTOR, VREME I GRAVITACIJA

Specijalna i opšta teorija relativnosti predstavljaju veliki preokret ne samo u razumevanju strukture prostora i vremena, već i u shvatanju njihove uloge u formulisanju zakona prirode. Dok specijalna teorija izražava uticaj fizičke realnosti na opšte karakteristike i povezanost *prostora i vremena*, u opštoj teoriji se geometrija prostor–vremena povezuje sa prirodom *gravitacione* interakcije. Možda se najveća prepreka razumevanju ovih ideja nalazi u činjenici da nismo uvek spremni da posumnjamo u neke osobine prostora i vremena koje je u našu svest usadilo svakodnevno iskustvo. U ovoj glavi ćemo izložiti odredjene elemente strukture prostora, vremena i gravitacije koji su važni za razumevanje gravitacije kao lokalno invarijantne teorije. Ti elementi su:

a) razvoj principa relativnosti iz klasične mehanike i elektrodinamike, i njegov uticaj na strukturu prostora i vremena;

b) formulacija principa ekvivalencije, i uvodjenje gravitacije i odgovarajuće geometrije krivog prostora.

Cilj ovog izlaganja je da se osvetle one osobine prostora, vremena i gravitacije koje su imale značajnu ulogu u procesu izgradnje opšte teorije relativnosti, a koje predstavljaju važne elemente u pokušajima izgradnje alternativnih pristupa teoriji gravitacije (Sciama, 1969; Rindler, 1977; Hoffmann, 1983).

1. RELATIVNOST PROSTORA I VREMENA

1.1 Istorijski uvod

Za potpunije shvatanje uticaja koji je teorija relativnosti imala na razvoj pojmova prostora i vremena, korisno je osvrnuti se na neka ranija učenja o ovom predmetu.

U antičko doba kretanje tela bilo je razmatrano uglavnom na *filozofskoj* osnovi. Mnoga od tih razmatranja nalazimo kod Aristotela (IV vek pre n.e.) i drugih grčkih filozofa. Kao ilustraciju antičkog shvatanja prirode kretanja navešćemo sledeća dva stava.

— Brzina slobodnog padanja tela zavisi od težine tela: teža tela padaju brže od lakših.

— Zemlja je nepokretan centar Vasione.

Dok je prvi stav bio tako očigledan da je praktično svako verovao u njega, o drugom su postojala i suprotna shvatanja. Jedna od najranijih ideja o pokretnoj Zemlji pripada pitagorejcu Filolaju (V vek pre n. e.). Posle dva veka ova ideja se ponovo javlja u učenju matematičara i astronoma Aristarha (III vek pre n. e.). Pa ipak, u nedostatku direktnih dokaza, ovo shvatanje nije bilo uverljivo za savremenike. Od niza argumenata protiv pokretne Zemlje izdvojićemo jedan koji potiče od Aristotela. Ako bi Zemlja bila pokretna, onda bi kamen bačen vertikalno uvis iz tačke A pao u neku drugu tačku B, jer bi tačka A "pobegla" u smeru kretanja Zemlje. Pošto kamen, ipak, pada u istu tačku iz koje je bačen, to znači da je Zemlja nepokretna.

Još dugo vremena razvoj fizike bio je neodvojiv od razvoja astronomije. I pored pojave Aristarhovih ideja, stari grčki astronomi su, ipak, verovali da je Zemlja nepokretni centar Vasione. Astronomsko shvatanje, zasnovano na geocentričnoj teoriji, doživelo je svoj puni zamah u učenju Ptolomeja (II vek). Ono se održalo sve do pojave Kopernikove (1473–1543) heliocentrične teorije, koja, posle pauze od šesnaest vekova, oživljava Aristarhove ideje. Po toj teoriji Zemlja nije nepokretni centar oko koga se okreću Sunce i druga nebeska tela, već se Zemlja, zajedno sa drugim planetama, kreće oko Sunca. Verujući u Kopernikovo učenje, astronom Brahe (1546–1601) se pitao po kakvim se putanjama kreću planete. Shvativši da se ključ odgovora nalazi, pre svega, u preciznim *merenjima*, on je ceo svoj život posvetio merenju položaja nebeskih tela. Analizom ovih rezultata Kepler (1571–1630) je izveo poznate zakone o kretanju planeta. Tako je postalo jasno kako se planete kreću; traganje za odgovorom na pitanje zašto se kreću dovelo je Njutna (1643–1727) do otkrića zakona gravitacije.

Suštinski preokret u shvatanju fizičkih pojava načinio je italijanski naučnik Galilej (1564–1642). Ne verujući mnogo u Aristotelove "dokaze", on je započeo sistematsku analizu i *eksperimentalnu proveru* zakona kretanja tela. Pažljivo mereći prostorna rastojanja i vremenske intervale pri kretanju tela niz strmu ravan, on je pronašao veze izmedju predjenog puta, vremena i brzine koje u Aristotelovo doba nisu bile poznate. Kakvi su bili njegovi odgovori na pitanja o brzini slobodnog padanja i nepokretnosti Zemlje?

— Posmatranjem slobodnog padanja tela, Galilej je utvrdio da brzina padanja ne zavisi od prirode tela, pa ni od njegove težine. Ovaj zakon čini suštinu *principa ekvivalencije*, na osnovu kojeg je kasnije Ajnštajn (1879–1955) razvio opštu teoriju relativnosti (OTR).

— Izučavanjem zakona koji odredjuju kretanje kosog hica, Galilej je uočio da ovi zakoni ne zavise od toga da li se podloga sa koje je kosi hitac izbačen kreće konstantnom brzinom ili ne (time se obaraju Aristotelovi argumenti o nepokretnosti Zemlje). Ovaj zaključak o ekvivalentnosti upotrebe različitih laboratorija (referentnih sistema), koje se medjusobno kreću konstantnom brzinom (*princip relativnosti*), od suštinskog je značaja za razvoj Njutnove mehanike i Ajnštajnove specijalne teorije relativnosti (STR).

— Pomenimo još jedno veoma značajno Galilejevo otkriće. Pri kretanju tela po strmoj ravni (kao i pri slobodnom padanju) njegova brzina se menja u toku vremena. Uzrok te promene je gravitaciono privlačenje posmatranog tela i Zemlje. Kad tog privlačenja nema, i uopšte, kad na dato telo ne deluje nikakva sila, njegova brzina se ne menja. Ovo je poznati *zakon inercije* klasične mehanike.

Mnogi smatraju da se pravi počeci fizike nalaze u eksperimentima koje je izveo Galilej. Njegovi metodi istraživanja i rezultati do kojih je došao pokazuju, svojom jednostavnošću i uticajem na kasniji razvoj fizike, svu lepotu i moć naučne istine. On je kretanje tela izučavao postavljajući pitanje: *gde* i *kad* se nešto dešava? Tako su merenja prostora i vremena postala nezaobilazna u fizici.

Ako pokušamo da odgovorimo na pitanje: šta je to vreme ili prostor?, videćemo da to nije lako. "Šta je vreme — ako me niko ne pita, ja znam, ali ako želim da to nekom objasnim, onda ne znam" (St. Augustine; citat iz: J. R. Lucas, 1973). Vreme je, kao i prostor, povezano sa promenama i sa stvarima čije se osobine menjaju. No, u fizici nije reč toliko o tome da se prostor i vreme tačno definišu, već da se tačno *izmere*.

1.2 Relativnost kretanja i brzina svetlosti

U Galilejevim eksperimentima se nalaze začeci značajnih ideja o osobinama prostora i vremena, koje su svoj puni razvoj doživele u učenjima Njutna i, kasnije, Ajnštajna.

Njutnova klasična mehanika, u kojoj su Galilejeve ideje našle prirodno mesto, zasniva se na sledećim zakonima:

1. *Zakon inercije*: telo na koje ne deluje nikakva sila kreće se bez promene brzine.
2. *Zakon delovanja sile*: ubrzanje tela srazmerno je sili koja na njega deluje.
3. *Zakon akcije i reakcije*.

Da bi ovi zakoni bili fizički potpuno definisani, moraju se dati izvesna dopunska objašnjenja o pojmovima sile, brzine i ubrzanja.

Smatra se da je sila, koja potiče od interakcije sa drugim telima, unapred poznata iz nekih drugih razmatranja. Tek tada drugi Njutnov zakon može da odredi ubrzanje tela pod dejstvom poznate sile. Tako se, na primer, iz poznatog oblika gravitacione sile može naći veličina gravitacionog ubrzanja nekog tela. U prva dva zakona javljaju se pojmovi brzine i ubrzanja koji su definisani samo *u odnosu na* odredjeni referentni sistem (RS).

Galilejev princip relativnosti. Treba istaći da Njutnovi zakoni ne važe uvek u svom najprostijem obliku, koji je prethodno naveden. Ako se, na primer, neki posmatrač nalazi na disku koji rotira u odnosu na Zemlju, on će osetiti "silu" koja ga gura ka periferiji diska, a koja nije uzrokovana interakcijom sa drugim telima (inercijalna sila). Ubrzanje se, dakle, pojavilo bez delovanja sile. Prema tome, prva dva zakona važe u svom najprostijem obliku samo u nekim referentnim sistemima, koje nazivamo *inercijalnim*. Ova činjenica predstavlja suštinu Galilejevog principa relativnosti:

Zakoni mehanike su istog oblika u svim inercijalnim referentnim sistemima.

Pojmovi sile i ubrzanja u Njutnovim zakonima definisani su, dakle, u odnosu na neki inercijalni RS. Ubrzanje, kao i sila, ima istu vrednost u dva RS koji se, jedan u odnosu na drugi, kreću konstantnom brzinom. To se može lako videti ako uočimo da su prostorne koordinate i vreme u takva dva sistema S i S' (sistem S' se kreće duž x–ose sistema S relativnom brzinom v) povezani na sledeći način:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt\,, \qquad & y' &= y\,, \\ t' &= t\,, & z' &= z\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ove relacije se nazivaju *Galilejeve transformacije* i predstavljaju matematičku realizaciju Galilejevog principa relativnosti. Ako posmatramo neko telo koje se kreće duž x–ose sistema S, brzine tela izmerene u sistemima S i S', redom, povezane su relacijom

$$u_1' = u_1 - v\,, \tag{1.2}$$

koja predstavlja poznati *klasični zakon sabiranja brzina*. Iz ove jednačine se vidi da je u oba RS ubrzanje tela isto, $a' = a$. Takodje se vidi da, na primer, gravitaciona sila, koja ima oblik $m_1 m_2/r^2$, ima istu vrednost u oba RS jer je $r = r'$.

Iz istog razmatranja zaključujemo da postoji čitava klasa inercijalnih RS čije je relativno kretanje bez ubrzanja. Na osnovu čega su inercijalni RS dobili privilegovan položaj pri formulaciji zakona klasične mehanike? Zašto su oni izdvojeni od svih drugih RS?

Apsolutni prostor. Da bi odgovorio na ova i slična pitanja Njutn je uveo pojam *apsolutnog prostora*, koji je zadat a priori, i nezavisno od rasporeda i kretanja materije u njemu. Svaki inercijalni RS se kreće konstantnom brzinom u odnosu na apsolutni prostor, a inercijalne sile se javljaju kao posledica ubrzanja u odnosu na ovaj prostor.

Pokušavajući da dokaže fizički značaj ubrzanja u odnosu na apsolutni prostor, Njutn je izveo sledeći eksperiment. Napunio je jednu posudu vodom i uočio da je površ vode ravna. Zatim je posudu zarotirao u odnosu na daleke nepokretne zvezde, koje predstavljaju standardni inercijalni RS. U početku voda miruje i njena površ je i dalje ravna, mada posuda rotira. Kasnije, zbog trenja vode i posude, i voda počinje da rotira, a njena površ se iskrivi, udubi. Oblik površi vode ne zavisi od rotacije vode u odnosu na posudu. Njutn je iz ovoga zaključio da pojava inercijalnih sila (krivljenje površi vode) nema veze sa ubrzanjem u odnosu na druga tela, već sa ubrzanjem u odnosu na apsolutni prostor.

Apsolutni prostor nije objasnio posebnu ulogu inercijalnih RS; on je samo pomogao da se problem jasnije sagleda. Njegovo uvodjenje nije opravdano čak ni sa gledišta same klasične mehanike. Fizičke karakteristike apsolutnog prostora su jako čudne. Zašto nije moguće opaziti brzinu u odnosu na apsolutni prostor, a ubrzanje jeste? Apsolutni prostor je najpre bio identifikovan sa sistemom centra masa Sunčevog sistema, a kasnije sa sistemom vezanim za daleke, nepokretne zvezde. Osnovne zamerke protiv uvodjenja apsolutnog prostora mogu se grupisati u nekoliko stavova:

a) Uvodjenje apsolutnog prostora nije u skladu sa logikom klasične mehanike, jer izdvaja jedan specijalni RS, što protivreči Galilejevom principu relativnosti.

b) Apsolutni prostor ne objašnjava pojavu inercijalnih sila, jer je za ove sile važno postojanje ubrzanja u odnosu na bilo koji inercijalni RS.

c) Apsolutni prostor deluje na tela tako što izaziva pojavu inercijalnih sila, dok nijedno telo ne može delovati na apsolutni prostor.

I tako je apsolutni prostor teško nalazio svoje mesto u okviru klasične mehanike, a posebna uloga inercijalnih RS je u suštini ostala neobjašnjena.

Brzina svetlosti. Galilejev princip relativnosti je ispunjen za sve pojave u mehanici. U prošlom veku istraživanja vezana za elektricitet, magnetizam i svetlost pobudila su poseban interes za razumevanje principa relativnosti. Maksvel (1831–1879) je izveo jednačine u kojima se elektricitet, magnetizam i svetlost opisuju na jedinstven način. Fizičari su smatrali da se svetlost, slično zvuku, prostire kroz neku sredinu, koju su nazivali *etar*. Za posmatrača koji miruje u odnosu na etar brzina svetlosti iznosi $c = 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm/sec}$, dok bi za posmatrača koji se kreće prema svetlosnom izvoru brzinom v u odnosu na etar brzina svetlosti bila $c' = c+v$, na osnovu klasičnog zakona sabiranja brzina. Etar je za svetlost bio ono što je vazduh za talasno kretanje. On je na neki način realizacija Njutnovog apsolutnog prostora. Pošto je jedino u sistemu vezanom za etar brzina svetlosti c, to bi se merenjem brzine svetlosti u raznim sistemima moglo utvrditi koji od njih miruje u odnosu na etar. Ako bi se to ostvarilo, pricip ralativnosti ne bi važio za svetlosne pojave. Tako je sudbina apsolutnog prostora postala vezana za osobine elektromagnetnih pojava.

Mada klasičan zakon sabiranja brzina ima mnogobrojne potvrde u klasičnoj mehanici, on *ne važi* za prostiranje svetlosti. Mnogobrojni eksperimenti su pokazali da je

$$c' = c\,.$$

Brzina svetlosti je ista u svim inercijalnim sistemima i ne zavisi od kretanja izvora, niti od kretanja posmatrača. Ova činjenica predstavlja kamen temeljac STR. Ona protivreči klasičnom zakonu sabiranja brzina, ali se mora prihvatiti na osnovu mnogobrojih eksperimentalnih provera. Time je, istovremeno, eliminisana potreba za uvodjenjem etra.

Ubedljivo eksperimentalno razrešenje pitanja relativnosti svetlosnih pojava dao je opit koji su 1887. godine izvršili Majkelson i Morli. Oni su posmatrali kretanje svetlosnog signala koji potiče iz svetlosnog izvora vezanog za Zemlju, i pokazali da je njegova brzina u pravcu kretanja Zemlje ista kao i brzina u normalnom pravcu. Odatle se mogu izvesti sledeća dva zaključka:

i) Pošto se kretanje posmatrača u odnosu na etar ne može opaziti, princip relativnosti je ispunjen i za svetlosne pojave.

ii) Brzina svetlosti se ne pokorava klasičnom zakonu sabiranja brzina, već je ista u svim inercijalnim RS.

Uočavamo da u prvom iskazu princip relativnosti označava samo ravnopravnost inercijalnih RS bez impliciranja Galilejevih transformacija, jer one sadrže klasičan zakon sabiranja brzina, koji protivreči drugom iskazu. Tako postaje jasno da princip relativnosti mora dobiti novu matematičku formu, različitu od (1.1)

1.3 Od prostora i vremena do prostor–vremena

Rezultati prethodnih razmatranja se mogu izraziti u formi dva osnovna postulata, na kojima se zasniva STR.

Prvi postulat uopštava Galilejev princip relativnosti ne samo na svetlosne pojave, već i na sve druge fizičke procese, i često se naziva Ajnštajnovim principom relativnosti.

P1. Zakoni fizike su istog oblika u svim inercijalnim sistemima.

Mada je kao iskaz (P1) sličan Galilejevom principu relativnosti, u suštini se oni dosta razlikuju. Zaista, Galilejev princip relativnosti je u klasičnoj mehanici realizovan putem Galilejevih transformacija i klasičnog zakona sabiranja brzina, koji ne važe za svetlosne signale. Realizacija principa (P1) je data preko Lorencovih transformacija, kao što ćemo uskoro videti.

Drugi postulat se odnosi na eksperimentalne činjenice o brzini svetlosti.

P2. Brzina svetlosti je konačna i jednaka u svim inercijalnim sistemima.

Činjenica da ova dva postulata nisu u skladu sa klasičnim zakonom sabiranja brzina, nije se mogla objasniti u okviru Njutnove mehanike. Ajnštajn je našao jednostavno objašnjenje ove zagonetne situacije uz pomoć pažljive analize prostornih i vremenskih karakteristika fizičkih dogadjaja. Tako je došao do zaključka o *relativnosti* pojmova vezanih za merenje vremena i prostora, tj. o njihovoj *zavisnosti od referentnog sistema posmatrača.*

Vremenski trenutak u kome se neki dogadjaj (npr. paljenje sijalice) desio može se odrediti pomoću časovnika. Neka se u tački A nalazi časovnik. Vreme nekog dogadjaja u tački A se definiše položajem kazaljki na časovniku u trenutku dešavanja posmatranog dogadjaja. Ako je časovnik T_1 u tački A_1, a sijalica se nalazi u nekoj udaljenoj tački A_2, onda časovnik T_1 ne registruje trenutak paljenja sijalice u A_2 nego trenutak stizanja signala u A_1. U tački A_2 se može postaviti časovnik T_2 koji će izmeriti trenutak paljenja sijalice, ali to nije dovoljno. Časovnici T_1 i T_2 moraju biti medjusobno podešeni, sinhronizovani: ako je vreme paljenja sijalice izmereno na T_2 jednako t_2, onda vreme stizanja signala u tačku A_1 mora, po časovniku T_1, biti jednako t_2+ (vreme putovanja signala). Time smo, u stvari, definisali *istovremenost* udaljenih dogadjaja: uzimajući u obzir vreme putovanja signala tačno znamo koji je položaj kazaljki na T_1 istovremen sa paljenjem sijalice u A_2.

Skup sinhronizovanih časovnika $T_1, T_2, \dots$, koji su rasporedjeni u svim tačkama referentnog sistema S, omogućava merenje vremena t proizvoljnog dogadjaja u sistemu S. Saglasno ovoj definiciji, pojam istovremenosti dva dogadjaja je vezan za dati inercijalni RS. Ovako definisan pojam istovremenosti je relativan: istovremenost dogadjaja zavisi od inercijalnog sistema u kome se nalazi posmatrač.

Takodje se može zaključiti da su i veličine vremenskih i prostornih intervala relativne.

Lorencove transformacije. Klasične predstave o prostoru i vremenu, koje su izražene Galilejevim transformacijama, moraju se promeniti u skladu sa postulatima (P1) i (P2). Ovi postulati impliciraju jednu novu vezu koordinata sistema S i S', koja se izražava *Lorencovim transformacijama*:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad & t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \\ y' &= y\,, & z' &= z\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

U graničnom slučaju malih brzina Lorencove transformacije se svode na Galilejeve.

Iz transformacija (1.3) sledi novi *zakon sabiranja brzina*:

$$u_1' = \frac{u_1 - v}{1 - u_1 v/c^2}\,. \tag{1.4}$$

Uz pomoć Lorencovih transformacija kvalitativna razmatranja o relativnosti vremenskih i prostornih relacija mogu dobiti i preciznu kvantitativnu formulaciju.

Razmotrićemo, najpre, efekat relativnosti dužina. Neka se u sistemu S' nalazi štap čija je tzv. sopstvena dužina $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. U sistemu S dužina štapa se odredjuje razlikom položaja njegovih krajeva u istom trenutku sistema S: $\Delta x = x_2(t) - x_1(t)$. Iz izraza (1.3) sledi $\Delta x = \Delta x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Dužina štapa koji se kreće, merena iz sistema S, manja je nego njegova dužina u sistemu S' u kome štap miruje, $\Delta x < \Delta x'$. Ovaj efekat se naziva *kontrakcijom dužina*.

Radi razjašnjenja relativnosti vremenskih intervala posmatraćemo časovnik koji miruje u pokretnom sistemu S'. Njegovo "tik" i "tak" se mogu opisati koordinatama (x', t'_1) i (x', t'_2). Koristeći Lorencove transformacije dobija se relacija $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Interval vremena izmedju dva otkucaja sata je najkraći u sistemu u kome sat miruje, $\Delta t' < \Delta t$. Kad iz S posmatramo sat koji se kreće, taj interval se povećava, pa se zato ovaj efekat naziva *dilatacijom vremena*. U vezi sa ovim efektom često se pominje i takozvani *paradoks blizanaca*.

Četvorodimenziona geometrija Veza izmedju prostornih i vremenskih koordinata dva inercijalna sistema data je preko Lorencovih transformacija. Pošto ove transformacije "mešaju" prostorne i vremenske koordinate, prirodno je govoriti o četvorodimenzionom *prostor–vremenu*, a ne o prostoru i vremenu posebno. Naravno, bez obzira na to što u prostor–vremenu prostor i vreme imaju ravnopravne uloge, medju njima i dalje postoji značajna razlika. To se vidi iz posebnog načina pojavljivanja vremena u Lorencovim transformacijama, i ima uticaja na zasnivanje geometrije prostor–vremena.

Lorencove transformacije se mogu izvesti iz zahteva da brzina kretanja svetlosnog fronta bude ista u dva različita inercijalna sistema. Invarijantnost izraza

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

u odnosu na Lorencove transformacije predstavlja osnovnu karakteristiku prostorno–vremenskog kontinuuma — Minkovskijevog prostora M_4. Tačke ovog prostora imaju koordinate (t, x, y, z) i nazivaju se dogadjaji. Izraz s^2 ima ulogu kvadrata "rastojanja" izmedju dogadjaja $(0, 0, 0, 0)$ i (t, x, y, z). Kao što se u običnom trodimenzionom prostoru kvadrat rastojanja tačke (x, y, z) od koordinatnog početka ne menja u odnosu na Galilejeve transformacije, tako je izraz s^2 invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije. Za dalje razmatranje pogodno je uvesti kvadrat intervala bliskih dogadjaja:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\,. \tag{1.5a}$$

Ako uvedemo veličinu $\eta_{\mu\nu} = \text{dijag}(+, -, -, -)$, prethodna relacija se može napisati u kompaktnijem obliku

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu\,, \tag{1.5b}$$

gde je $dx^\mu = (dt, dx, dy, dz)$, a po ponovljenim indeksima (μ, ν) se podrazumeva sumiranje. Veličina $\eta_{\mu\nu}$ je *metrika* prostora M_4.

Lorencove transformacije koordinata imaju oblik $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, gde su koeficijenti $\Lambda^\mu{}_\nu$ odredjeni jednačinama (1.3). Skup od četiri veličine koje se transformišu po ovom pravilu naziva se *vektor* prostora M_4. Geometrijski formalizam se može dalje razviti uvodjenjem tenzorske analize, Lorencove transformacije se mogu shvatiti kao "rotacije" vektora u M_4 (jer ne menjaju "dužinu" vektora), itd. Analogija sa odgovarajućim pojmovima euklidske geometrije je velika, ali ne potpuna. Dok je euklidska metrika pozitivno definitna, tj. sve komponente metrike su pozitivne, dotle je metrika Minkovskijevog prostora indefinitna, tj. ima i pozitivne i negativne komponente. Kao posledica toga, rastojanje dve tačke u M_4 može biti nula i kad su ove tačke različite. Ova razlika ne menja bitno matematičku analizu prostora M_4 u odnosu na odgovarajući euklidski slučaj. Indefinitost metrike je matematički izraz razlike prostora i vremena u M_4.

Geometrijska formulacija je posebno korisna pri uopštavanju ove teorije i izgradnji OTR.

2. GRAVITACIJA I GEOMETRIJA

2.1 Princip ekvivalencije

Razjašnjenje uloge inercijalnih RS u formulaciji fizičkih zakona nije kraj priče o relativnosti. Ajnštajnovi napori da razjasni fizički značaj ubrzanih RS doveli su do opšte teorije prostora, vremena i gravitacije.

Iz drugog Njutnovog zakona sledi da je veličina sile koja deluje na neko telo proporcionalna njegovom ubrzanju, $\boldsymbol{F} = m_i \boldsymbol{a}$. Konstanta proporcionalnosti m_i je tzv. inertna masa tela. Veličina inertne mase karakteriše inertnost tela pri delovanju sile.

U slučaju homogenog gravitacionog polja gravitaciona sila ima oblik $\boldsymbol{F}_g = m_g \boldsymbol{g}$, gde $\boldsymbol{g}$ meri jačinu gravitacionog polja i ne zavisi od gravitacione mase tela m_g. Eksperiment je pokazao da su inercijalna i gravitaciona masa svakog tela jednake, nezavisno od toga o kom se telu radi. Zbog toga u gravitacionom polju sva tela imaju isto ubrzanje, nezavisno od veličine njihovih masa. I u slučaju nehomogenog gravitacionog polja ovaj iskaz ostaje tačan ako se ograničimo na male delove prostor–vremena. Za ovaj iskaz znao je još Galilej, koji je tvrdio, na osnovu eksperimenata o kretanju tela po strmoj ravni, da u vakuumu sva tela (uz iste početne uslove) padaju istom brzinom. Druge sile u prirodi, kao što su električne ili sile trenja, nemaju tu osobinu.

S druge strane, u ubrzanom RS sva slobodna tela imaju isto ubrzanje, nezavisno od svojih masa. Ako, na primer, voz ubrza svoje kretanje u odnosu na Zemlju, onda će svi predmeti u vozu dobiti isto ubrzanje unazad u odnosu na voz, bez obzira na svoju (inercijalnu) masu. Po ovoj osobini, kako je Ajnštajn primetio, efekti gravitacionih sila i ubrzanog RS su isti. Ova činjenica predstavlja suštinu principa ekvivalencije.

PE. Neinercijalni RS se nikakvim eksperimentom ne može lokalno razlikovati od gravitacionog polja.

Ekvivalentnost važi samo *lokalno*, u manjim delovima prostora i vremena, gde se "pravo" polje može smatrati homogenim.

Na drugi način iskazan, PE tvrdi da pogodno izabran RS može lokalno kompenzovati dato gravitaciono polje. Ovo se dogadja ako RS slobodno pada u datom gravitacionom polju, tj. ako ima ubrzanje koje je jednako ubrzanju gravitacionog polja. U takvom sistemu se inercijalno ubrzanje tela poništava sa gravitacionim, a zakoni mehanike, odnosno zakoni prirode u opštijoj formulaciji, postaju isti kao i u inercijalnom RS. Zbog toga se izabrani slobodno padajući RS naziva lokalno inercijalni sistem.

PE'. U slobodno padajućem RS svi zakoni fizike su isti kao u STR.

Često se razlikuju slabi i jaki PE. Ako se u prethodnoj formulaciji zadržimo samo na "zakonima mehanike", tj. na zakonima mehaničkog kretanja tela, onda se radi o slabom PE; ako umesto toga stavimo "svi zakoni fizike", onda dolazimo do jakog PE (ako, konačno, pod zakonima fizike podrazumevamo sve zakone osim gravitacionih, onda se govori o srednje–jakom PE).

U prethodnom izlaganju koristili smo Njutnovu mehaniku i teoriju gravitacije da bismo ilustrovali smisao (slabog) PE. Kao što smo pomenuli, prvu eksperimentalnu potvrdu jednakosti m_i i m_g dao je Galilej. Njutn je, takodje, vršio eksperimente na klatnima iste dužine, napravljenim od različitog materijala, da bi utvrdio sa kojom se tačnošću ovaj iskaz može proveriti. U novije vreme jednakost inertne i gravitacione mase utvrdjena je sa velikom tačnošću, čime je potvrdjen slabi PE. Najnovija merenja su potvrdila i važenje jakog PE. Osim ovih direktnih eksperimentalnih dokaza, sve proverene posledice OTR, koja je zasnovana na PE, mogu se uzeti kao indirektni dokazi važenja ovog principa.

PE i lokalna Poenkareova simetrija. Malo je poznato da se PE može iskazati jezikom savremene fizike kao princip *lokalne simetrije*. Tako elektrodinamika i gravitacija predstavljaju najstarije teorije sa lokalnom simetrijom. Da bismo se u to uverili, posmatrajmo u prostoru bez gravitacionog polja inercijalni referentni sistem S. Ako gravitaciono polje postoji, onda se u okolini svake tačke x sistema S može konstruisati lokalno inercijalni referentni sistem $S(x)$ (na osnovu PE). Ovaj sistem se može dobiti iz S uz pomoć sledećih transformacija:

a) najpre se izvrši translacija sistema S tako da mu se koordinatni početak poklopi sa onim od $S(x)$;

b) zatim se S "zarotira" (tj. na njemu se izvrše Lorencove transformacije)

dok mu se ose ne poklope sa osama od $S(x)$.
Transformacije tog tipa, koje se sastoje od translacije i Lorencove "rotacije", definišu Poenkareovu grupu transformacija. Veličina translacije i uglovi Lorencove "rotacije" nazivaju se parametrima Poenkareove grupe, i njih ima deset (4 translacije + 6 rotacija). Vrednosti ovih parametara zavise od tačke x u kojoj je zadan lokalno inercijalni sistem $S(x)$.

Ovako definisane Poenkareove transformacije realizuju prelaz iz jednog u drugi (lokalno) inercijalni RS; u oba sistema zakoni fizike su isti (princip relativnosti). Zato ove transformacije imaju smisao transformacija simetrije. Možemo, ukratko, reći da u slučaju postojanja gravitacionog polja Poenkareove transformacije čine *lokalnu grupu simetrije* (grupu simetrije sa parametrima koji zavise od x). Kad nema gravitacionog polja, vraćamo se na STR, a simetrija teorije je grupa globalnih Poenkareovih transformacija, čiji parametri ne zavise od x.

2.2 Fizika i geometrija

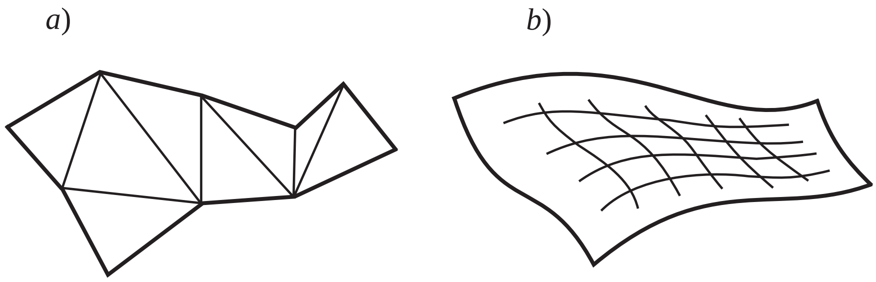
Fizički sadržaj geometrije. Nema načina da se osobine prostora i vremena odrede apriornim matematičkim razmišljanjem, jer taj postupak ne daje jednoznačan rezultat: postoje razne mogućnosti koje su sve podjednako dobre u matematičkom smislu. Ljudi su preko 2000 godina verovali u Euklidov prostor, jer ga je svakodnevno iskustvo potvrdjivalo. Sa nastankom STR i OTR situacija se promenila na osnovu iskustva dobijenog novim fizičkim eksperimentima. Pokušajmo da razjasnimo pitanje: kako se u principu fizička merenja mogu povezati sa geometrijskim iskazima?

Za matematičara geometrija se zasniva na odredjenim osnovnim pojmovima (kao što su tačka, prava i sl.), koji su nam manje ili više intuitivno jasni, i na nekim jednostavnim iskazima (aksiomima) o vezi ovih pojmova. Svi ostali iskazi geometrije se dokazuju pomoću odredjenih matematičko–logičkih metoda, za koje smatramo da su istiniti u okviru date matematičke strukture. Tako se pitanje o istinitosti odredjenih geometrijskih iskaza svodi na pitanje o "istinitosti" aksioma. Medjutim, jasno je da ovo pitanje nema smisla u okviru same geometrije.

Za fizičara prostor je onakav kakav se vidi u eksperimentima. To je, u najmanju ruku, prostor koji je relevantan za fiziku. Ako se, dakle, osnovnim pojmovima geometrije prida odredjen fizički smisao (npr. prava = putanja svetlosnog zraka), onda pitanja o "istinitosti" geometrijskih iskaza postaju pitanja fizike, tj. pitanja o tačnosti veze izmedju odgovarajućih fizičkih objekata. Otuda veza fizičkih merenja i geometrije.

Polazeći od fizički definisanog merenja prostornih i vremenskih intervala, u STR se dolazi do zaključka da je prirodno uvesti četvorodimenzionu geometriju prostor–vremena. Ako se u ovoj geometriji fiksira vremenska koordinata, preostali deo prostor–vremena se ponaša po pravilima dobro poznate Euklidove geometrije. U OTR situacija je drugačija: prostorna geometrija prestaje da zadovoljava Euklidove aksiome. Da bismo ilustrovali kako do toga dolazi, razmotrićemo geometriju na ravnom disku koji rotira ravnomerno (u odnosu na inercijalni RS) oko ose normalne na njegovu ravan, koja prolazi kroz centar diska. Pošto je ubrzan RS lokalno ekvivalentan gravitacionom polju, zaključci do kojih budemo došli važiće lokalno i za prava gravitaciona polja. Na disku se nalazi posmatrač koji želi da fizičkim merenjima ispita prostorno–vremensku geometriju. Neka posmatrač ima dva identična časovnika, pa jedan stavi u centar diska, gde i on sedi, a drugi stavi u neku tačku na periferiji diska. Ovaj časovnik na periferiji, sa tačke gledišta posmatrača, ići će sporije nego časovnik u centru (dilatacija vremena iz STR). Iz ovoga sledi da časovnici u gravitacionom polju idu brže ili sporije, u zavisnosti od toga gde se nalaze. Jedinstveno definisanje vremena za ceo prostor nije moguće. S druge strane, ako standardnim lenjirom merimo dužinu odsečka linije normalne na radijus diska, ona će, za posmatrača u centru diska, biti smanjena (kontrakcija dužina iz STR). Prema tome, i odnos obima kruga prema njegovom radijusu biće manji od 2π. Tako Euklidova geometrija prostora prestaje da važi.

Geometrija krivih površi. Na osnovu PE, u svakom gravitacionom polju lokalno se može izabrati pogodan RS, koji predstavlja dobro definisan lokalni inercijalni sistem. Deleći prostor–vreme u lokalno inercijalne deliće u svakom od njih možemo primenjivati STR i izvoditi dinamičke zaključke, npr. o kretanju svetlosnog signala. Rekonstrukcija ovako dobijene globalne dinamičke slike dala bi rezultat ekvivalentan sa OTR, koji bi opisivao kretanje svetlosti u nekom gravitacionom polju. Umesto toga, jednostavnije je, i prirodnije, preći na krive prostore.



Slika 1.1 Aproksimativna (a) i verna (b) realizacija krive površi

Prethodni postupak deljenja prostor–vremena na lokalno inercijalne deliće iz kojih treba rekonstruisati sliku prostor–vremena u kome postoji gravitaciono polje, geometrijski se može uporediti sa pokušajem da se kriva površ predstavi koristeći male, ravne pločice koje su prilepljene jedna uz drugu (sl. 1.1a). Osnovna ideja OTR je da je umesto toga bolje direktno razmatrati krivu površ (sl. 1.1b).

Tako je krivi prostor (tačnije prostor–vreme) ušao u fiziku. Pošto se krivi četvorodimenzioni prostor ne može slikovito zamisliti, pokušajmo da osnovne karakteristike krivog prostora razmotrimo na primeru dvodimenzione površi X_2.

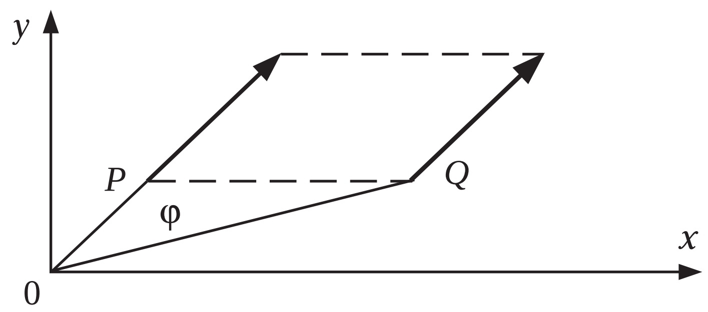
Geometrijske osobine površi X_2 koje nas interesuju jesu one koje se mogu odrediti sa stanovišta inteligentnog dvodimenzionalnog bića koje živi i vrši merenja na površi, i ne zna za Euklidov prostor E_3 u kome se ova površ nalazi. Takve osobine odredjuju *unutrašnju geometriju* površi.

Na krivoj površi ne postoje Dekartove pravougle koordinate; na njoj se mogu postaviti neke "krivolinijske" koordinate, koje ćemo označiti sa $u^\alpha = (u^1, u^2)$. Ove koordinate nemaju uvek neposredan geometrijski smisao.

Vratimo se za trenutak slici površi koja se nalazi u trodimenzionom prostoru E_3. Posmatrajmo tačku P na X_2 koja ima Dekartove koordinate (x, y, z) u E_3. Pošto tačka P ima dve nezavisne koordinate u X_2, njene Dekartove koordinate su oblika $x = f_1(u^\alpha)$, $y = f_2(u^\alpha)$, $z = f_3(u^\alpha)$. Kvadrat rastojanja dveju bliskih tačaka $P(x, y, z)$ i $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ u X_2 iznosi $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Prelazeći na krivolinijske koordinate u^α, ovaj izraz postaje

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta\,, \tag{1.6}$$

gde su $g_{\alpha\beta}$ neke funkcije od u^α. Kvadrat rastojanja je definisan preko unutrašnjih koordinata površi i *metrike* $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$. Ako je rastojanje izmedju bliskih tačaka u X_2 odredjeno po pravilu (1.6), dvodimenzioni prostor postaje *metrički prostor* $G_2 = (X_2, \boldsymbol{g})$.



Slika 1.2 Komponente vektora se menjaju pri paralelnom prenosu

Posmatranjem kretanja tela u X_2 naš posmatrač može doći na ideju da definiše tangentni dvodimenzioni *vektor* $\boldsymbol{a} = (a^1, a^2)$. Posmatrajmo, dalje, dva tangentna vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ u bliskim tačkama P i Q. Da bismo ove vektore uporedili moramo znati kako se vektor pomera iz jedne u drugu tačku, tj. kako se pri tom menjaju njegove komponente. To pomeranje ćemo zvati *paralelno pomeranje*. Prostor X_2 u kome je definisano pravilo paralelnog pomeranja (označeno sa Γ) naziva se (linearno) *povezan prostor*,

$L_2 = (X_2, \Gamma)$. Pošto su komponente vektora date u odnosu na krivolinijski koordinatni sistem, nije čudno da se one menjaju pri paralelnom prenosu. To se lako može videti posmatranjem paralelnog prenosa vektora u ravni, koristeći sferne koordinate (r, θ). Na slici 1.2 je predstavljen jedinični vektor $\boldsymbol{a}$ koji u tački P ima komponente ($a^r = 1$, $a^\theta = 0$), dok posle paralelnog prenosa u Q njegove komponente postaju ($a^r = \cos\varphi$, $a^\theta = \sin\varphi$).

Pravilo promene komponenti vektora dvodimenzioni posmatrač mora da odredi sam, u skladu sa svojim iskustvom. Ovo pravilo je u opštem slučaju nezavisno od pojma metrike. Ako je u X_2 zadato pravilo paralelnog prenosa i metrika, dolazimo do linearno povezanog metričkog prostora $(L_2, \boldsymbol{g})$.

Verovatno će posmatrač tražiti da se pri paralelnom pomeranju ne menja dužina vektora. Taj zahtev izgleda sasvim prirodan i posle njegovog usvajanja povezan metrički prostor postaje Riman–Kartanov prostor U_2. Riman–Kartanov prostor se prirodno pojavljuje pri razmatranju gravitacije kao lokalne teorije Poenkareove grupe.

Prethodna diskusija je nešto opštija nego što je nužno za razmatranje običnih dvodimenzionih površi koje su uronjene u E_3. Cilj je bio da se istakne da je unutrašnja geometrija prostora X_2 definisana preko dva osnovna objekta:

a) metrike $\boldsymbol{g}$, i

b) pravila paralelnog prenosa Γ.

Pojmovi unutrašnje geometrije površi se mogu uopštiti na višedimenzione prostore, mada nam u tom slučaju često nedostaje direktna geometrijska predstava.

Do sada smo razmatrali prostore čija je metrika pozitivno definitna. Minkovskijev prostor M_4 je pseudo–euklidski, jer ima indefinitnu metriku, a odgovarajuće uopštenje dovodi do Rimanovog prostora sa indefinitivnom metrikom.

2.3 Relativnost, kovarijantnost i Mahove ideje

Opšti princip relativnosti i kovarijantnost. U prethodnom razmatranju smo videli da u STR posebnu ulogu imaju inercijalni RS. Ajnštajn je ovu činjenicu smatrao izrazom nepotpunosti STR. On je želeo da stav o relativnosti kretanja inercijalnih RS uopšti na relativnost svih kretanja, uključujući i ubrzana. Tu ideju ćemo formulisati kao opšti princip relativnosti (PR):

Opšti PR: Oblik fizičkih zakona je isti u svim RS.

Za formulisanje jednačina koje izražavaju fizičke zakone u datom RS obično se koriste odredjene koordinate. Tako se, na primer, za odredjivanje prostornog položaja tačaka u nekoj laboratoriji L može koristiti Dekartov koordinatni sistem (x, y, z), ili sistem koji se iz ovoga dobija rotacijom za fiksni ugao φ oko z-ose. Oba koordinatna sistema odgovaraju istom RS — laboratoriji. No, ako dopustimo da se ugao φ menja sa vremenom, $\varphi = \omega t$, onda smo time prešli na novi sistem L', koji u odnosu na L rotira ugaonom brzinom ω oko z–ose. Koordinatne transformacije opisuju, dakle, ne samo promenu koordinata u datom RS, već i prelaz sa jednog na drugi RS. Sada postaje jasno da se opšti PR može realizovati uz pomoć opšteg principa kovarijantnosti (PK):

> *Opšti PK: Oblik fizičkih zakona ne zavisi od izbora sistema koordinata.*

Jasno je da kovarijantnost fizičkih zakona implicira opšti PR.

Pri izučavanju geometrijskih osobina prostora matematičari uvode odredjene geometrijske objekte, čije osobine ne zavise od izbora koordinatnog sistema. Smisao kovarijantnosti leži u tome da se fizički zakoni izraze korišćenjem tih geometrijskih objekata, čime se automatski osigurava nezavisnost od izbora sistema koordinata. Takvi objekti u klasičnoj fizici su tenzori, pa su kovarijantne fizičke jednačine date kao tenzorske relacije.

Kovarijantnost izgleda kao moćan princip koji u velikoj meri odredjuje mogući oblik prihvatljive fizičke jednačine. Da li je to zaista tako? Sledeći primer pokazuje izvesnu trivijalnost ovog principa. Posmatrajmo drugi Njutnov zakon, koji u inercijalnom RS ima oblik $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, i poseduje simetriju u odnosu na grupu Galilejevih transformacija G. Prelazom na neinercijalni RS koji, u odnosu na inercijalni, ima linearno ubrzanje $\boldsymbol{a}_0$ i rotacionu brzinu $\boldsymbol{\omega}$, Njutnova jednačina dobija oblik:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\,. \tag{1.7}$$

Ovo je oblik Njutnove jednačine u ubrzanom RS; on je kovarijantan u odnosu na grupu koordinatnih transformacija $\tilde{G}$ koja je mnogo šira od Galilejeve, ali je manja od grupe opštih koordinatnih transformacija. Tako smo $\tilde{G}-$kovarijantizovali Njutnovu jednačinu, pri čemu se pri prelazu na inercijalni RS dobija njen standardni oblik. Slično se mogu kovarijantizovati i druge fizičke jednačine, iz čega sledi da kovarijantnost, u stvari, ne nameće nikakve uslove na oblik fizičkih jednačina. S druge strane, poznato je da Ajnštajnove kovarijantne jednačine gravitacije imaju drugačije eksperimentalne posledice od Njutnovog zakona gravitacije, pa se čini da je kovarijantnost ipak fizički značajan princip.

Da bismo razrešili ovu dilemu, vratimo se Njutnovoj jednačini (1.7). Fizički sadržaj ove jednačine potpuno je odredjen njenim početnim oblikom $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, koji je tačan u inercijalnom sistemu, i načinom kovarijantizacije. Početna jednačina ima Galilejevu simetriju, a postupak kovarijantizacije "zna" za početnu simetriju, jer se koriste samo transformacije tipa $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}, t)$, $t' = t$, i može se zvati galilejevska kovarijantizacija. Rečeno modernim jezikom, ovde je reč o *lokalizaciji* Galilejeve simetrije. Pošto postupak ne zavisi od oblika polazne jednačine, već samo od njene globalne simetrije, postaje jasno da mogućnost kovarijantizacije ne vrši nikakav izbor oblika fizički prihvatljivih jednačina.

Ostaje još da se objasni zašto je fizički sadržaj kovarijantne Ajnštajnove teorije gravitacije ipak različit od Njutnove teorije. Odgovor na ovo pitanja je suštinski vezan za razumevanje pravog smisla pojma kovarijantizacije. Videli smo da je $\tilde{G}$–kovarijantizacija Njutnove jednačine tzv. galilejevska kovarijantizacija, tj.

a) početna jednačina ima Galilejevu simetriju, i

b) postupak kovarijantizacije uvodi u razmatranje sisteme ubrzane po Galilejevim "pravilima".

S druge strane, da je Ajnštajn znao za neki zakon gravitacije, taj početni zakon bi imao Lorencovu simetriju, a postupak kovarijantizacije bi uveo sisteme ubrzane po Lorencovim "pravilima". Ajnštajn nije išao ovim putem. Jasno je, medjutim, iz prethodnog izlaganja, (*i*) da bi se polazna Njutnova jednačina razlikovala od Ajnštajnove, i (*ii*) da se odgovarajući postupci kovarijantizacije razlikuju. Zato je sasvim prirodno da je fizički sadržaj ovih zakona različit.

I tako se čini da zahtev kovarijantnosti, ako se precizno definiše simetrija polazne jednačine, ipak nema fizičkog sadržaja. Treba istaći da je kod Ajnštajna princip kovarijantnosti blisko povezan sa principom ekvivalencije, tako da kovarijantost (prelaz na ubrzane sisteme) predstavlja način uvodjenja gravitacionog polja u teoriju. Pri tome se pretpostavlja da u odsustvu gravitacionog polja (kao i u lokalnim, slobodno padajućim RS) važi STR. Ajnštajnova teorija gravitacije se tako dobija spajanjem principa kovarijantnosti i principa ekvivalencije:

$$TG \;=\; PK \;+\; PE.$$

U stvari, u ovoj jednakosti bi umesto PK trebalo da stoji PR. No, pošto ne znamo kako drugačije da realizujemo PR osim preko PK, ova jednakost je tačna u tom praktičnom smislu. Interesantno je uočiti da se na sličan način može napraviti teorija gravitacije u čijim lokalnim inercijalnim sistemima važi Galilejeva, a ne Lorencova simetrija fizičkih zakona.

Kovarijantnost i simetrija. Pojmovi kovarijantnosti i simetrije imaju izvesnu formalnu sličnost, ali se, u stvari, bitno razlikuju. Da bismo ilustrovali o čemu je tu reč, posmatrajmo kvadrat intervala u $G_4 = (X_4, \boldsymbol{g})$,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu \,, \tag{1.8a}$$

koji je zadat u nekom koordinatnom sistemu K. Ova jednačina je kovarijantna u odnosu na opšte koordinatne transformacije $x \to x' = x'(x)$, jer u novom sistemu K' ona ima formalno isti oblik kao što je imala u K, tj.

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}(x')\, dx^{\mu'} dx^{\nu'} \,. \tag{1.8b}$$

U novoj jednačini ne samo da su promenjene koordinate, nego je promenjen i oblik metrike: $g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu}$, gde prim označava novu funkciju. Posmatraćemo sada samo one transformacije pri kojima se oblik metrike ne menja, $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x)$. One predstavljaju transformacije simetrije (ili izometrije) prostora G_4. Pokazaćemo na primeru Poenkareove simetrije smisao ove definicije. Posmatrajmo jednačinu (1.8a) u inercijalnom referentnom sistemu $S(x)$, gde je $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ metrika prostora M_4. Ako sada potražimo transformacije koordinata koje čuvaju *formu metrike*, kao rezultat se dobijaju Poenkareove transformacije. One izražavaju simetriju fizičkih zakona u odnosu na prelaz sa jednog na drugi inercijalni RS, pri čemu je u svakom sistemu brzina svetlosti ista. Tako odredjeni uslovi na transformacije koordinata dovode do izdvajanja odredjene klase sistema koji su medjusobno ekvivalentni, a prelaz sa jednog na drugi sistem definiše transformaciju simetrije.

Mahov princip. U izgradnji OTR Ajnštajna je vodila ideja da izbegne privilegovanu ulogu inercijalnih RS. Čak i da je bilo moguće izgraditi teoriju gravitacije u okviru STR, on se, verovatno, ne bi na tome zaustavio. Na tom putu veliki uticaj na njega su imale ideje austrijskog mislioca E. Maha, koji je krajem 19. veka dao veoma snažnu kritiku Njutnovog shvatanja inercijalnosti tela i apsolutnog prostora, i izneo svoje shvatanje tih problema.

Zaključak koji je Njutn izveo na osnovu eksperimenta sa rotirajućom posudom vode (da se inercijalne sile javljaju pri ubrzanju vode u odnosu na apsolutni prostor, dok ubrzanje u odnosu na posudu nema s tim veze) ne može se smatrati zasnovanim. Moguće je, naime, da ubrzanje vode u odnosu na posudu ne dovodi do pojave inercijalnih sila prosto zato što je masa posude veoma mala. Njutnov eksperiment je samo pokazao da rotacija vode u odnosu na *malu* posudu ne dovodi do pojave inercijalnih sila. Nije jasno kako bi eksperiment protekao da je posuda mnogo deblja i masivnija — to su bile sumnje koje je izneo Mah. On je verovao da bi voda koja rotira zajedno sa posudom jako debelih zidova imala ravnu površ, jer nema ubrzanja u odnosu na jako blisku i veliku masu posude, a da bi voda koja ne rotira zajedno sa takvom posudom imala zakrivljenu površ, jer se kreće ubrzano u odnosu na blisku i veliku masu posude. Drugim rečima, za pojavu inercijalnih sila odgovorno je ubrzanje datog tela u odnosu na sve druge mase u Vasioni (tačna priroda te zavisnosti je, na žalost, kod Maha nedovoljno odredjena), a ne u odnosu na apsolutni prostor.

Pokušaćemo na još jednom primeru da ilustrujemo razliku shvatanja inercije kod Njutna i Maha. Posmatrajmo jednu elastičnu sferu koja rotira u odnosu na neki inercijalni RS, zbog čega se širi oko ekvatora. Kako sfera "zna" da ona rotira i da zbog toga mora da se deformiše? Njutn bi rekao da ona ima ubrzanje u odnosu na apsolutni prostor, zbog čega on deluje na sferu inercijalnom silom i deformiše je. Mah bi rekao da sfera ima ubrzanje u odnosu na daleke mase u Vasioni, koje onda deluju na sferu i deformišu je.

Interesantno je uočiti da i Njutn i Mah pojavu inercijalnih sila objašnjavaju *ubrzanjem* tela, a ne brzinom. Zašto je to tako? Mahova razmatranja su opšte prirode, pa on na ovo pitanje nije mogao odgovoriti. To je učinio tek Ajnštajn u svojoj OTR, koja, bar delimično, realizuje Mahov apstraktni princip u konkretnoj fizičkoj teoriji.

Mahove ideje se grubo mogu iskazati sledećim stavovima:

i) Inercijalne osobine svakog tela (tj. njegova inercijalna masa) su odredjene interakcijom tog tela sa svim drugim masama u Vasioni.

ii) Pojava inercijalnih sila je odredjena nekim srednjim ubrzanjem datog tela u odnosu na sve druge mase u Vasioni.

iii) Stanje kretanja nekog tela se može odrediti samo relativno, u odnosu na sva druga tela.

Često se misli da je Mahov princip toliko opšteg karaktera da se ne može proveravati eksperimentalno, pa je, prema tome, njegova suština bez direktnog fizičkog sadržaja. Postoje primeri koji jasno pokazuju da Mahov princip ima direktan fizički sadržaj. S druge strane, još uvek ne postoji njegova direktna provera.

S obzirom na uticaj koji je Mahov princip imao na Ajnštajna pri stvaranju OTR, zanimljivo je pitanje u kojoj meri OTR realizuje ovaj princip. Može se reći da je OTR realizovala samo jedan deo Mahovih ideja. Mah je hteo da izbegne nezavisnu ulogu prostora i zameni je relativnom inercijom tela; Ajnštajn je zadržao prostor–vreme, ali ga je načinio neapsolutnim. Mahov princip je imao veliki stimulativni efekat na razvoj osnovnih ideja OTR, ali danas nema osnova da se smatra osnovnim principom fizike.

2.4 Perspektive daljeg razvoja

Ajnštajnova teorija gravitacije je predvidela niz fizičkih efekata koji su eksperimentalno u potpunosti potvrdjeni. Treba, medjutim, pomenuti i neke osobine ove teorije koje zaslužuju kritičku analizu.

U OTR se pojavljuju *singulariteti*, i to kako kod lokalizovanih fizičkih sistema (crne rupe) tako i u kosmologiji (veliki prasak). Singularitet se može grubo okarakterisati kao beskonačan porast nekih fizičkih veličina u delovima prostor–vremena, koji je praćen beskonačnim zakrivljenjem prostor–vremena. Obe ove pojave, i kosmologija i crne rupe, predstavljaju veoma interesantne oblasti gravitacione fizike koje osvetljavaju unutrašnju ograničenost OTR i služe kao putokaz za traženje novih, konzistentnijih prilaza teoriji gravitaije.

Standardni model Vasione ima singularnost na konačnoj vremenskoj udaljenosti u prošlosti (veliki prasak). Izvesno vreme to nije zabrinjavalo fizičare, jer se smatralo da su uzrok te pojave uprošćene pretpostavke modela. Medjutim, Hoking i Penrouz su pokazali, krajem 60–tih godina, da singulariteti, uz pretpostavku važenja nekih dosta prirodnih uslova, uvek slede iz Ajnštajnovih jednačina. Tako postaje jasno da se singulariteti mogu izbeći ili izmenom klasične OTR, ili kvantizacijom gravitacije.

Ove opšte teoreme se odnose i na egzistenciju lokalnog singulariteta — crne rupe, koja neizbežno nastaje pri gravitacionom kolapsu nekih zvezda koje su istrošile svoju nuklearnu energiju. Posle odredjenog kritičnog perioda sva se materija zvezde, za konačno sopstveno vreme, susreće u jednoj tački: gustina postaje beskonačna, kao i krivina.

Kosmološki singularitet u prošlosti označava postojanje nekog vremenskog trenutka pre koga ništa, pa ni samo vreme, nije imalo smisla, nije postojalo. Singularitet crne rupe se odnosi na budućnost, i znači da za onog posmatrača koji je uhvaćen u crnu rupu postoji jedan trenutak u budućnosti kad se ne samo završava njegov život, nego i vreme prestaje da postoji. Tako klasična OTR dolazi u sukob sa osnovnim idejama klasične fizike.

Sigurno je da u blizini singulariteta gustina materije postaje tako velika da je nužno uzeti u obzir i kvantne efekte. Mogu li oni da otklone singularitet, ili je za to potrebna modifikacija klasične teorije, nije jasno.

Gravitacija je jedina fizička interakcija za koju do danas nije napravljena uspešna *kvantna teorija*. Postoje mišljenja da je pri konstrukciji kvantne gravitacije potrebno radikalno izmeniti naše shvatanje prostora i vremena. Ako bi to bilo tačno, onda bi gravitacija još jednom imala ključnu ulogu u razvoju našeg shvatanja prostora i vremena.

Mnogi pokušaji kvantizacije teorije gravitacije pokazali su se neuspešnim. Mi ne znamo da li će nas ideje *lokalne simetrije, supergravitacije, Kaluca–Klajnove teorije* ili *teorije struna* dovesti do jedinstvene, kvantne teorije osnovnih interakcija. Dosadašnji uspesi ovih ideja nas motivišu da ih sa puno pažnje izučavamo, nadajući se da će nas one odvesti na put koji vodi do stvaranja konzistentne kvantne teorije gravitacije i njenog ujedinjenja sa drugim osnovnim interakcijama.

GLAVA II

PROSTORNO–VREMENSKE SIMETRIJE

Fizika elementarnih čestica i gravitacije se uspešno opisuje *Lagranževom teorijom polja.* To je teorija u kojoj su dinamičke varijable – polja $\phi(x)$, a dinamika je odredjena jednom funkcijom polja i njihovih prvih izvoda, $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, koja se naziva lagranžijan. Klasične jednačine kretanja slede iz zahteva da integral dejstva $I = \int d^4x \mathcal{L}$ ima minimum. Čestične karakteristike teorije se odredjuju posmatranjem ekscitacija oko najnižeg energetskog stanja — osnovnog stanja, ili vakuuma.

U procesima elementarnih čestica na niskim energijama gravitaciono polje nema značajnu ulogu, jer je gravitaciona interakcija veoma mala. Struktura prostor–vremena je odredjena principom relativnosti (koji kaže da su zakoni prirode isti u svim inercijalnim referentnim sistemima) i principom postojanja konačne maksimalne brzine prostiranja interakcija. Ujedinjenje ova dva principa daje tzv. Ajnštajnov princip relativnosti, koji predstavlja osnovu specijalne teorije relativnosti. Prostor–vreme u kome je realizovan Ajnštajnov princip relativnosti ima strukturu Minkovskijevog prostora M_4. Ekvivalentnost inercijalnih referentnih sistema se ogleda u postojanju *Poenkareove simetrije* u M_4.

Elementarne čestice se karakterišu odredjenom masom i spinom, i načinom interakcije. Mnoge fizičke konstante imaju dimenziju dužine, pa zato realan fizički svet nije invarijantan u odnosu na promenu dužinske skale. U fizičkim procesima na visokim energijama, gde mase i dimenzione konstante interakcije postaju praktično zanemarljive, simetrija teorije se povećava i prelazi u *dilatacionu simetriju*, a često i u širu, *konformnu simetriju.* Konformna simetrija je približna simetrija fizičkog sveta, a njeno razumevanje nam daje korisne informacije o uslovima pod kojoma se fizičke dimenzione konstante mogu zanemariti. Za teoriju struna poseban značaj ima konformna simetrija u dve dimenzije.

Imajući u vidu značaj ovih globalnih simetrija prostor–vremena u fizici čestica, u ovoj glavi će biti izloženi oni aspekti Poenkareove i konformne simetrije koji su interesantni sa gledišta lokalizacije ovih simetrija i izgradnje teorije gravitacije. Postoje slične ideje zasnovane na drugim grupama simetrije, ali ih ovde nećemo razmatrati. Shvatanje gravitacije kao teorije sa lokalnom prostorno–vremenskom simetrijom predstavlja važan korak na putu ujedinjenja gravitacije i ostalih osnovnih interakcija.

1. POENKAREOVA SIMETRIJA

1.1 Poenkareove transformacije

Minkovskijev prostor–vreme M_4 je četvorodimenziona arena koja služi za uspešan opis svih fizičkih fenomena osim gravitacije. U prostoru M_4 se može uvesti *referentni sistem* S, vezan, obično, za neki fizički objekat, u kome postoji *koordinatni sistem* koji pokriva ceo prostor. Koristeći Dekartove koordinate x^μ, $\mu = 0,1,2,3$, kvadrat rastojanja bliskih tačaka $P(x)$ i $Q(x+dx)$ dat je izrazom

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,, \tag{2.1}$$

gde je $\eta_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$ metrički tenzor u referentnom sistemu $S(x)$, koji se naziva *inercijalni* referentni sistem. Jasno je da rastojanje tačaka P i Q ne zavisi od izbora referentnog sistema, pa je stoga

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu \,,$$

gde je $g'_{\mu\nu}$ metrika u sistemu $S'(x')$. Referentni sistem $S'(x')$ je inercijalan ako je $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, tj. ako se pri prelazu $S \to S'$ ne menja *forma* metrike. Varijaciju forme neke funkcije $F(x)$, $\delta_0 F(x) \equiv F'(x) - F(x)$, treba razlikovati od totalne varijacije $\delta F(x) \equiv F'(x') - F(x)$. Pri beskonačno maloj razlici $x' - x = \xi$ veza medju njima je

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= F'(x') - F'(x) + \delta_0 F(x) \\ &\approx \xi^\mu \partial_\mu F(x) + \delta_0 F(x) \,. \end{aligned}$$

Operacije variranja forme i diferenciranja komutiraju. Koordinatne transformacije $x \to x'$ pri kojima se ne menja forma metrike definišu *grupu izometrije* prostora. U slučaju prostora M_4 grupa izometrije je grupa globalnih *Poenkareovih transformacija* $SO(1,3)$.

Sada ćemo odrediti oblik beskonačno malih Poenkareovih transformacija. Pri transformacijama koordinata

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \,, \tag{2.2}$$

metrike $g'_{\mu\nu}$ i $\eta_{\mu\nu}$ su povezane relacijom

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \eta_{\lambda\rho} \approx \eta_{\mu\nu} - (\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) \,,$$

pa se zahtev nepromenljivosti forme metrike izražava *Kilingovom jednačinom*:

$$\delta_0\eta_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu} \approx -(\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) = 0\,. \tag{2.3}$$

Razvijajući $\xi^\mu(x)$ u red po x,

$$\xi^\mu(x) = \varepsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \omega^\mu{}_{\nu\rho}x^\nu x^\rho + \cdots\,,$$

gde su $\varepsilon^\mu, \omega^\mu{}_\nu, ...$ konstantni parametri, uslov (2.3) daje

$$\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0\,, \qquad \varepsilon^\mu = \text{proizvoljno}\,,$$

dok ostali parametri iščezavaju. Tako dobijamo oblik beskonačno malih *globalnih* Poenkareovih transformacija,

$$\xi^\mu(x) = \varepsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu\,, \tag{2.4}$$

koje su definisane sa deset *konstantnih* parametara $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ i ε^μ (Lorencove rotacije i translacije).

Konačne Poenkareove transformacije su nehomogene linearne transformacije

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu\,,$$

gde je matrica $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ odredjena uslovom invarijantnosti intervala (2.1): $\eta = \Lambda^T\eta\Lambda$.

1.2 Lijeva algebra i njene reprezentacije

Da bismo definisali generatore globalne Poenkareove grupe i njihovu Lijevu algebru, posmatraćemo polje $\varphi(x)$, koje je skalar u odnosu na transformacije (2.4): $\varphi'(x') = \varphi(x)$. Promena forme ovog polja je odredjena relacijom

$$\delta_0\varphi(x) = -(\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu)\partial_\mu\varphi(x)\,.$$

Ako generatore promene forme proizvoljnog polja $\phi(x)$ definišemo jednačinom

$$\delta_0\phi(x) = (\tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \varepsilon^\mu P_\mu)\phi(x)\,, \tag{2.5}$$

lako se dobija njihova koordinatna reprezentacija u slučaju skalarnog polja:

$$M_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu \equiv L_{\mu\nu}\,, \qquad P_\mu = -\partial_\mu\,.$$

Ovi generatori zadovoljavaju Lijevu algebru Poenkareove grupe:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} \\
&\equiv \tfrac{1}{2}f_{\mu\nu,\lambda\rho}{}^{\tau\sigma}M_{\tau\sigma}\,, \\
[M_{\mu\nu}, P_\lambda] &= \eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu\,, \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

U opštem slučaju proizvoljnog polja ϕ generatori imaju oblik

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}\,, \qquad P_\mu = -\partial_\mu\,, \tag{2.7}$$

gde je $\Sigma_{\mu\nu}$ spinski deo od $M_{\mu\nu}$.

Primer 1. Dirakovo polje $\psi_\alpha(x)$ se u odnosu na Poenkareove transformacije menja po pravilu $\psi'(x') = S(\omega)\psi(x)$, gde je $S(\omega)$ matrica koja zadovoljava uslov $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$, a γ^μ su Dirakove matrice. U slučaju beskonačno malih transformacija $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, pa se za S dobija $S = 1 + \frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, tj.

$$\Sigma^D_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \equiv \sigma_{\mu\nu}\,.$$

Vektorsko polje $V^\mu(x)$ se menja po pravilu $V'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x)$. Pri beskonačno malim transformacijama je $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}\omega^{\lambda\rho}(\Sigma^1_{\lambda\rho})^\mu{}_\nu$, odakle sledi

$$(\Sigma^1_{\lambda\rho})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\lambda\eta_{\rho\nu} - \delta^\mu_\rho\eta_{\lambda\nu}\,.$$

Postupak iz ovogi primera se može direktno uopštiti na nalaženje oblika generatora pri delovanju na proizvoljno polje ϕ, jer Poenkareove transformacije polja imaju opšti oblik $\phi'(x') = S(\omega)\phi(x)$.

Do istog rezultata se može doći koristeći postupak koji je poznat pod imenom metode indukovanih reprezentacija. Ova metoda polazi od činjenice da je Lorencova grupa podgrupa Poenkareove grupe, i pokazuje kako se iz poznatog delovanja M na $\phi(0)$ i definicije $\phi(x)$ dobija reprezentacija M na $\phi(x)$, koristeći algebru generatora. Uvešćemo, najpre, konačne Poenkareove transformacije polja jednačinom

$$\phi'(x) = (G\phi)(x)\,, \qquad G(\omega, a) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\omega\cdot M + a\cdot P\right)\,, \tag{2.8}$$

gde su ω i a parametri transformacije, a $\omega{\cdot}M \equiv \omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$. Posebno, operatori translacije i Lorencove rotacije imaju oblik

$$T(a) = \exp(a\cdot P)\,, \qquad \Lambda(\omega) = \exp(\tfrac{1}{2}\omega\cdot M)\,.$$

Ovde su P i M veličine koje deluju u prostoru polja menjajući njihovu formu u skladu sa algebrom (2.6).

Posmatraćemo, zatim, polje ϕ_u koje se dobija translacijom iz $\phi(0)$:

$$\phi_u = T(u)\phi(0)\,.$$

Koristeći relaciju $T(x)\phi_u = \phi_{x+u}$ nije teško zaključiti da se delovanje generatora translacije realizuje kao $(P_\mu\phi)_u = (-\partial_\mu\phi)_u$, odakle sledi $\phi_u = \phi(-u)$.

Delovanje Lorencove rotacije na ϕ_u daje

$$\phi'_u \equiv \Lambda(\omega)\phi_u = T(\bar{u})\Lambda(\omega)\phi(0)\,, \tag{2.9}$$

$$\begin{tikzcd}
\phi(0) \arrow[r, "T(u)"] \arrow[d, "\Lambda(\omega)"'] & \phi_u \arrow[d, "\Lambda(\omega)"] \\
\phi'(0) \arrow[r, "T(\bar{u})"'] & \phi'_u
\end{tikzcd}$$

Slika 2.1 Konstrukcija Lorencovih generatora u prostoru polja

gde je $\bar{u}$ implicitno definisano relacijom $\Lambda(\omega)T(u) = T(\bar{u})\Lambda(\omega)$ (sl. 2.1). Za beskonačno malo ω dobija se

$$\begin{aligned}
\big(1 + \tfrac{1}{2}\omega\cdot M\big)e^{u\cdot P} &= e^{u\cdot P}e^{-u\cdot P}\big(1 + \tfrac{1}{2}\omega\cdot M\big)e^{u\cdot P} \\
&= e^{u\cdot P}\left(1 + \tfrac{1}{2}\omega\cdot M + \left[\tfrac{1}{2}\omega\cdot M, u\cdot P\right]\right) \\
&= \exp[(u^\mu + \omega^\mu{}_\nu u^\nu)P_\mu]\big(1 + \tfrac{1}{2}\omega\cdot M\big)\,,
\end{aligned}$$

pa je $\bar{u}^\mu = u^\mu + \omega^\mu{}_\nu u^\nu$. Ovde smo koristili formulu

$$e^{-B}Ae^{B} = A + [A,B] + \tfrac{1}{2!}[[A,B],B] + \cdots\,,$$

i algebru Poenkareove grupe. Sličan rezultat se dobija i za konačne transformacije. Najzad, delovanje Lorencove transformacije na $\phi(0)$ u (2.9) se realizuje linearnom transformacijom koja deluje na spinorske indekse od $\phi(0)$ (koji nisu eksplicitno pisani),

$$\phi'(0) = \Lambda(\omega)\phi(0) = e^{\omega\cdot\Sigma/2}\phi(0)\,,$$

gde je $\Sigma_{\mu\nu}$ neka matrična reprezentacija od $M_{\mu\nu}$. Tako se dobija

$$\phi'(-u) = T(\bar{u})e^{\omega\cdot\Sigma/2}\phi(0) = e^{\omega\cdot\Sigma/2}\phi(-\bar{u})\,,$$

pošto $T(\bar{u})$ prolazi kroz matrični deo i deluje direktno na polje $\phi(0)$. Ako izvršimo dodatnu translaciju $T(-2u)$, i uvedemo oznaku $x = u$, dobija se konačan rezultat:

$$\phi'(x) = e^{\omega\cdot\Sigma/2}\phi(\tilde{x})\,, \qquad \tilde{x}^\mu \equiv x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu\,. \tag{2.10a}$$

Diferencijalna verzija ove relacije glasi

$$\delta_0\phi(x) = \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(L_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu})\phi(x)\,, \tag{2.10b}$$

čime je dokazan opšti oblik generatora (2.7).

Osnovni rezultat prethodnog razmatranja je jednačina (2.10a) koja se može prepisati u obliku $\phi'(x') = S(\omega)\phi(x)$, gde je $S(\omega) = \exp(\omega\cdot\Sigma/2)$. Ovakav zakon transformacije je karakterističan za relativističke teorije polja. Sličan postupak se može primeniti i kod drugih grupa koje imaju odgovarajuću strukturu (Bergshoeff, 1983; Sohnius, 1985).

1.3 Invarijantnost dejstva i zakoni održanja

Invarijantnost dejstva daje uslov na lagranžijan koji se razlikuje od rezultata dobijenog pri posmatranju unutrašnje grupe simetrije (Dodatak A). Neka integral dejstva po prostorno–vremenskoj oblasti Ω ima oblik

$$I(\Omega) = \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x)\,,$$

gde smo dopustili mogućnost da $\mathcal{L}$ zavisi eksplicitno od x. Promena dejstva pri Poenkareovim transformacijama je data izrazom

$$\delta I = \int_{\Omega'} d^4x'\mathcal{L}'(\phi'(x'), \partial'_k\phi'(x'); x') - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(\phi(x), \partial_k\phi(x); x)\,.$$

Uvodeći jakobijan $\partial(x')/\partial(x) \approx 1 + \partial_\mu\xi^\mu$, invarijantnost dejstva se može izraziti u obliku sledećeg uslova na lagranžijan (Kibble, 1961),

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &\equiv \delta_0\mathcal{L} + \xi^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu\xi^\mu \\ &= \delta_0\mathcal{L} + \partial_\mu(\mathcal{L}\xi^\mu) = 0\,,\end{aligned} \tag{2.11}$$

gde je

$$\begin{aligned}\delta_0\mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}(\phi + \delta_0\phi, \partial_k\phi + \delta_0\partial_k\phi; x) - \mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,k}}\delta_0\phi_{,k}\,.\end{aligned}$$

Za globalne transformacije je $\partial_\mu\xi^\mu = \omega^\mu{}_\mu = 0$, pa $\Delta\mathcal{L}$ prelazi u $\delta\mathcal{L}$. Treba napomenuti da je za invarijantnost dejstva dovoljan, ustvari, i slabiji uslov $\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu\Lambda^\mu$, tako da zadnji znak jednakosti u (2.11) treba shvatiti kao jednakost do na totalnu četvorodivergenciju.

Ako se u uslovu (2.11) izjednače sa nulom koeficijenti uz $\omega^{\mu\nu}/2$ i ξ^μ, dobija se

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\Sigma_{\mu\nu}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\rho}}[\Sigma_{\mu\nu}\partial_\rho - (\eta_{\nu\rho}\partial_\mu - \eta_{\mu\rho}\partial_\nu)]\phi = 0\,, \\ &\partial_\mu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial_\mu\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\partial_\mu\phi_{,\nu} = 0\,.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Prvi identitet predstavlja uslov Lorencove invarijantnosti, dok drugi izražava translacionu invarijantnost, i znači da $\mathcal{L}$ ne zavisi eksplicitno od x.

Veličina $\Delta\mathcal{L}$ se može prepisati u obliku

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta_0\phi + \partial_\mu J^\mu\,, \qquad J^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta_0\phi + \mathcal{L}\xi^\mu\,,$$

gde je $\delta\mathcal{L}/\delta\phi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\phi - \partial_\mu(\partial\mathcal{L}/\partial\phi_{,\mu})$. Posle korišćenja jednačina polja za ϕ, $\delta\mathcal{L}/\delta\phi = 0$, uslov invarijantnosti (2.11) dovodi do *zakona održanja*

$$\partial_\mu J^\mu = 0\,, \qquad J^\mu = \tfrac{1}{2}\omega^{ij}M^\mu{}_{ij} - \varepsilon^i T^\mu{}_i\,, \tag{2.13}$$

gde su $T^\mu{}_i$ i $M^\mu{}_{ij}$ *kanonski* tenzori energije–impulsa (TEI) i ugaonog momenta,

$$\begin{aligned} T^\mu{}_i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\partial_i\phi - \delta^\mu_i\mathcal{L}\,, \\ M^\mu{}_{ij} &= (x_i T^\mu{}_j - x_j T^\mu{}_i) - S^\mu{}_{ij}\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

a $S^\mu{}_{ij}$ je *kanonski* tenzor spina,

$$S^\mu{}_{ij} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\Sigma_{ij}\phi\,.$$

Zbog konstantnosti parametara iz jednačine (2.13) slede zakoni održanja TEI i ugaonog momenta,

$$\begin{aligned} &\partial_\mu T^\mu{}_i = 0\,, \\ &\partial_\mu M^\mu{}_{ij} = 0 \qquad \text{ili} \qquad \partial_\mu S^\mu{}_{ij} = T_{ij} - T_{ji}\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Kanonski TEI nije simetričan osim za skalarnu materiju. Iz (2.15) se dobijaju sledeći integrali kretanja:

$$\begin{aligned} P^\nu &= \int d^3x T^{0\nu}\,, \\ M^{\nu\lambda} &= \int d^3x M^{0\nu\lambda} = \int d^3x(x^\nu T^{0\lambda} - x^\lambda T^{0\nu} - S^{0\nu\lambda})\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Jasno je da se kanonske struje (2.14) mogu definisati i kad Poenkareove transformacije nisu simetrija teorije, ali tada ne važe zakoni održanja.

Primer 2. Za skalarno polje opisano lagranžijanom $\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \lambda\varphi^4$, kanonski TEI je oblika

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}_S\,.$$

Polazeći od Dirakovog lagranžijana $\mathcal{L}_D = \bar\psi(i\gamma\cdot\partial - m)\psi$, dobijaju se sledeći izrazi za kanonski TEI i tenzor spina:

$$T^\mu{}_i = \bar\psi i\gamma^\mu\partial_i\psi - \delta^\mu_i\mathcal{L}_D\,, \qquad S^\mu{}_{ij} = -\bar\psi i\gamma^\mu\sigma_{ij}\psi\,.$$

U oba slučaja se, koristeći odgovarajuće jednačine kretanja, lako proveravaju zakoni održanja.

Belinfanteov tenzor. Izraz za ugaoni momenat se sastoji od dva dela: prvi je momenat TEI, drugi je spinski deo. Moguće je modifikovati TEI tako da izraz za ugaoni momenat bude definisan samo preko momenta TEI, a da se pritom vrednost impulsa ne promeni. Da bismo to pokazali, poći ćemo od činjenice da promena

$$T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \partial_\lambda W^{\lambda\mu\nu}\,,$$

gde je $W^{\lambda\mu\nu} = -W^{\mu\lambda\nu}$, ne menja vrednost integrala koji definiše P^μ. Koristeći ovu proizvoljnost može se definisati *Belinfanteov tenzor*

$$T_B^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\partial_\lambda(S^{\mu\nu\lambda} + S^{\nu\mu\lambda} - S^{\lambda\nu\mu})\,, \tag{2.17}$$

koji je *simetričan*: $T_B^{\mu\nu} - T_B^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} + \partial_\lambda S^{\lambda\nu\mu} = 0$. Uz pomoć Belinfanteovog tenzora oblik integrala ugaonog momenta se može uprostiti,

$$M^{\nu\lambda} = \int d^3x(x^\nu T_B^{0\lambda} - x^\lambda T_B^{0\nu})\,,$$

a njegovo održanje je posledica simetrije $T_B^{\mu\nu}$ (Treiman, Jackiw i Gross, 1972). Uloga Belinfanteovog tenzora u Ajnštajnovoj teoriji gravitacije biće razjašnjena u glavi III.

Tako se zakoni održanja impulsa i ugaonog momenta, tj. translaciona i Lorencova invarijantnost teorije, mogu izraziti dvema osobinama *jednog* objekta – Belinfanteovog tenzora:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_B^{\mu\nu} &= 0\,, \\ T_B^{\mu\nu} &= T_B^{\nu\mu}\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ove dve relacije su ekvivalentne uslovima (2.15).

2. KONFORMNA SIMETRIJA

2.1 Konformne transformacije i Vajlovo reskaliranje

Videli smo da se Poenkareove transformacije mogu definisati kao koordinatne transformacije u M_4 koje ne menjaju formu metrike $\eta_{\mu\nu}$. Konformne transformacije koordinata u M_4 definišu se zahtevom da se forma metrike menja po jednostavnom pravilu:

$$g'_{\mu\nu}(x) = s(x)\eta_{\mu\nu}, \qquad s(x) > 0\,. \tag{2.19}$$

Transformacije ovog tipa ne menjaju strukturu svetlosnog konusa ($ds^2 = 0$) niti uglove izmedju vektora, i čine *konformnu grupu* $C(1,3)$.

U slučaju kada je $s(x)$ blisko jedinici, jednačina (2.19) odredjuje beskonačno malu promenu forme metrike,

$$\delta_0\eta_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu} = [s(x) - 1]\eta_{\mu\nu}\,,$$

posle čega se korišćenjem relacije (2.3) dobija

$$-(\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}) = (s-1)\eta_{\mu\nu}\,.$$

Prethodna analiza se ne menja ako umesto M_4 posmatramo D–dimenzioni Minkovskijev prostor M_D. Prelaz na M_D je značajan za uočavanje odredjenih specifičnosti konformne grupe $C(1, D-1)$ u slučaju $D = 2$. Množenjem poslednje jednačine sa $\eta^{\mu\nu}$ lako se dobija $-2(\partial\cdot\xi) = (s-1)D$, odakle sledi

$$\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} = \tfrac{2}{D}(\partial\cdot\xi)\eta_{\mu\nu}\,, \tag{2.20a}$$

Ova jednačina se naziva *konformna Kilingova jednačina* u M_D. Iz nje se dobija relacija

$$[\eta_{\mu\nu}\Box + (D-2)\partial_\mu\partial_\nu]\partial\cdot\xi = 0\,, \tag{2.20b}$$

u kojoj je uočljiva specifičnost slučaja $D = 2$, koji će biti analiziran kasnije.

Vratimo se sada slučaju $D > 2$, u kome relacije (2.20) zahtevaju da je treći izvod od $\xi(x)$ jednak nuli. Razvijajući $\xi(x)$ u red po x do kvadratičnih članova dobija se rešenje

$$\xi^\mu(x) = \varepsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \rho x^\mu + (c^\mu x^2 - 2c\cdot x x^\mu)\,, \tag{2.21}$$

koje je u slučaju $D = 4$ odredjeno sa 15 konstantnih parametara: 10 parametara $(\varepsilon^\mu, \omega^{\mu\nu})$ odredjuju *Poenkareove transformacije*, 1 parametar ρ odredjuje *dilatacije*, a 4 parametra c^μ odredjuju tzv. *specijalne konformne transformacije* (SKT). Iz (2.21) se vidi da su konformne transformacije u M_D nelinearne.

Često se u fizici razmatra jedna grupa transformacija koja po obliku ima nekih sličnosti sa $C(1,D-1)$, ali je, u suštini, različita. To su transformacije

$$\eta_{\mu\nu} \to g^r_{\mu\nu}(x) \equiv s(x)\eta_{\mu\nu}\,, \tag{2.22}$$

koje se nazivaju Vajlovo ili konformno *reskaliranje metrike*. Pri ovim transformacijama se koordinate ne menjaju, $\eta_{\mu\nu}$ i $g^r_{\mu\nu}$ su definisani u istom koordinatnom sistemu. Relacija (2.22) realizuje staru Vajlovu ideju o lokalnoj promeni jedinica za merenje dužine. Transformacije reskaliranja metrike čine Abelovu grupu W_g, dok je grupa konformnih koordinatnih transformacija $C(1,D-1)$ neabelova. I pored formalne sličnosti relacija (2.19) i (2.22), jasno je da je njihova suština potpuno različita (Fulton, Rohrlich i Witten, 1962).

Postoji jedna interesantna veza grupa $C(1,3)$ i W_g koja, medjutim, nije kompletna. Iz izraza (2.19) za $C(1,3)$ transformaciju (uz koji treba podrazumevati i transformaciju koordinata $x' = x + \xi$) lako se vidi da se ona može realizovati u dva koraka:

(a) Poenkareovom transformacijom, za koju je $s = 1$, i

(b) transformacijom W_g.

No, pri tom koordinatni deo od (a)+(b) nije tipa $C(1,3)$, već samo $SO(1,3)$, pa tako u prostoru M_4 postojanje W_g simetrije ne implicira $C(1,3)$. Analogna razmatranja u opštem Rimanovom prostoru biće data u glavi IV.

2.2 Reprezentacije konformne algebre i konačne transformacije

Da bismo našli Lijevu algebru grupe $C(1,3)$ posmatraćemo polje $\varphi(x)$, koje je skalar u odnosu na transformacije (2.21). Tada je

$$\delta_0\varphi(x) = -\big[\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu + \rho x^\mu + (c^\mu x^2 - 2c\cdot x x^\mu)\big]\partial_\mu\varphi(x)\,.$$

Uvodeći generatore promene forme proizvoljnog polja $\phi(x)$,

$$\delta_0\phi(x) = \big(\tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \varepsilon^\mu P_\mu + \rho D + c^\mu K_\mu\big)\phi(x)\,, \tag{2.23}$$

lako se dobija njihov oblik za skalarno polje:

$$\begin{aligned} &M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}\,, \qquad P_\mu = -\partial_\mu\,,\\ &D = -x\cdot\partial\,,\\ &K_\mu = 2x_\mu x\cdot\partial - x^2\partial_\mu\,. \end{aligned}$$

Generatori (M, P, D, K) definišu Lijevu algebru konformne grupe $C(1,3)$:

$$
\begin{aligned}
&[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = \tfrac{1}{2} f_{\mu\nu,\lambda\rho}{}^{\sigma\tau} M_{\sigma\tau}\,, \\
&[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = \eta_{\nu\lambda} P_\mu - \eta_{\mu\lambda} P_\nu\,, \qquad [P_\mu, P_\nu] = 0\,, \\
&[M_{\mu\nu}, D] = 0, \qquad [P_\mu, D] = -P_\mu\,, \qquad [D, D] = 0\,, \\
&[M_{\mu\nu}, K_\lambda] = \eta_{\nu\lambda} K_\mu - \eta_{\mu\lambda} K_\nu\,, \\
&[P_\mu, K_\nu] = 2(M_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} D)\,, \\
&[D, K_\mu] = -K_\mu\,, \qquad [K_\mu, K_\nu] = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Prva tri komutatora odredjuju Poenkareovu algebru. Generatori (M, P, D) odredjuju podalgebru koja definiše *Vajlovu grupu* $W(1,3)$.

U opštem slučaju proizvoljnog polja ϕ generatori imaju oblik

$$
\begin{aligned}
&M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}\,, \qquad P_\mu = -\partial_\mu\,, \\
&D = -(x\cdot\partial + \Delta)\,, \\
&K_\mu = (2x_\mu x\cdot\partial - x^2\partial_\mu) + 2(x^\nu \Sigma_{\mu\nu} + x_\mu \Delta) + \kappa_\mu\,,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

gde su $\Sigma_{\mu\nu}, \Delta$ i κ_μ matrične reprezentacije od $M_{\mu\nu}, D$ i K_μ u indeksnom prostoru polja ϕ. Rezultat se može dobiti metodom indukovanih reprezentacija, kao i u slučaju Poenkareove algebre. Pri tom se koristi relacija

$$
\phi'(0) = \exp\big(\tfrac{1}{2}\omega\cdot\Sigma - \rho\Delta + c\cdot\kappa\big)\phi(0)\,.
$$

Ako ϕ pripada ireducibilnoj reprezentaciji Lorencove grupe, onda iz $[\Sigma_{\mu\nu}, \Delta] = 0$ sledi, na osnovu Šurove leme, da je Δ proporcionalno jediničnoj matrici,

$$
\Delta = -dI\,, \tag{2.26a}
$$

gde je d broj koji se naziva *dilataciona dimenzija* polja ϕ. Dalje, iz uslova $[\Delta, \kappa_\mu] = -\kappa_\mu$ dobijamo

$$
\kappa_\mu = 0\,. \tag{2.26b}
$$

Mada je oblik konformnih transformacija koordinata izveden iz zahteva $\delta_0\eta = (s-1)\eta$, uobičajeno je da se konformna simetrija u teoriji polja definiše tako da je $\delta_0\eta = 0$. Mogućnost ovakvog izbora biće objašnjena u odeljku IV.2.

Primer 3. Teorija slobodnog skalarnog polja odredjena je lagranžijanom $\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$. Pri transformacijama dilatacije

$$
\delta x^\mu = \rho x^\mu, \qquad \delta_0\varphi = -\rho(x\cdot\partial - d)\varphi\,, \qquad \delta_0\eta^{\mu\nu} = 0\,,
$$

promena lagranžijana iznosi $\delta_0\mathcal{L}_S = -\rho\left[x\cdot\partial\mathcal{L}_S + (-d+1)(\partial\varphi)^2 + dm^2\varphi^2\right]$. Ako usvojimo $d(\varphi) = -1$, sledi

$$
\delta_0\mathcal{L}_S = -\rho\left[(x\cdot\partial + 4)\mathcal{L}_S + m^2\varphi^2\right]\,,
$$

pa je uslov invarijantnosti dejstva (2.11), $\delta_0\mathcal{L}+\rho(x\cdot\partial+4)\mathcal{L}=0$, ispunjen samo pri $m=0$.

Primer 4. Za slobodno Dirakovo polje transformacije dilatacije imaju oblik

$$\delta x^\mu = \rho x^\mu\,, \qquad \delta_0\psi = -\rho(x\cdot\partial - d)\psi\,, \qquad \delta_0\eta_{\mu\nu} = 0\,,$$

odakle se dobija $\delta_0\mathcal{L}_D = -\rho\left[x\cdot\mathcal{L}_D + (-2d+1)\bar\psi i\gamma\cdot\partial\psi + 2dm\bar\psi\psi\right]$. Vrednost $d(\psi)=-3/2$ daje

$$\delta_0\mathcal{L}_D = -\rho\left[(x\cdot\partial+4)\mathcal{L}_D + m\bar\psi\psi\right]\,,$$

pa je dejstvo invarijantno pri $m=0$.

Na sličan način se pokazuje da teorija slobodnog elektromagnetnog polja A_μ ima dilatacionu simetriju ako je $d(A)=-1$.

Dilataciona dimenzija d odredjuje (linearni) zakon transformacije polja u odnosu na transformacije dilatacije, dok se za dimenzione parametre u teoriji predpostavlja da ostaju nepromenjeni. U tom smislu se dilatacija razlikuje od transformacija dimenzione analize, pri kojima se transformišu ne samo dinamičke varijable (polja) već i dimenzioni parametri. Polje $\phi_1 = l^n\phi$ ima istu dilatacionu dimenziju kao i ϕ, $d(\phi_1)=d(\phi)$, mada je njegova naivna (obična) dimenzija veća za n.

Prema ovoj, standardnoj interpretaciji dilatacije sve mase u teoriji su dilataciono invarijantni parametri. Postoji, medjutim, i drugi način razmatranja ovog pitanja. Pošto je vrednost m^2 jednaka kvadratu impulsa, relacija $e^{\rho D}P^2e^{-\rho D}=e^{2\rho}P^2$ definiše zakon transformacije kvadrata mase. Odavde slede dve mogućnosti:

i) masa se menja pri transformacijama dilatacije, a spektar masa je kontinuiran;

ii) sve mase iščezavaju i ostaju nepromenjene pri dilataciji.

Mogućnost *i*) je teško prihvatljiva, jer izgleda da protivreči diskretnosti masenog spektra čestica. Fizičari obično koriste varijantu *ii*) koja, posle uvodjenja spontanog narušenja simetrije, dovodi do teorije sa neiščezavajućim masama (Fulton, Rohrlich i Witten, 1962). Treba napomenuti da se ova varijanta, zbog uslova $m^2=0$, efektivno svodi na standardnu formulaciju dilatacije.

Konačni elementi grupe $C(1,3)$ koji su povezani sa jedinicom imaju oblik

$$G(\omega,a,\rho,c) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\omega\cdot M + a\cdot P + \rho D + c\cdot K\right)\,, \tag{2.27}$$

gde su ω, a, ρ i c konačni parametri. Interesantno je videti kako izgledaju *konačne konformne transformacije* koordinata u M_4. Konačne Poenkareove transformacije i dilatacije (Vajlova grupa) imaju oblik

$$\begin{aligned} T(a)x^\mu &= x^\mu + a^\mu\,,\\ \Lambda(\omega)x^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu(\omega)x^\nu\,,\\ D(\rho)x^\mu &= e^\rho x^\mu\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Formu konačnih SKT je lakše dobiti indirektno. Zato ćemo, najpre, uvesti transformaciju *inverzije*:

$$x'^{\mu} = Ix^{\mu} = -x^{\mu}/x^2, \qquad x^2 \neq 0\,. \tag{2.29}$$

Ova diskretna transformacija je konformna, jer je

$$g'_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}/(x^2)^2\,.$$

Važnost inverzije izražava se sledećom teoremom (Dubrovin, Novikov i Fomenko, 1979):

> *T. Svaka glatka konformna transformacija pseudoeuklidskog (ili euklidskog) prostora dimenzije $D \geq 3$ data je kao kompozicija izometrije, dilatacije i inverzije.*

Ako posmatramo neprekidnu transformaciju

$$K(c)x^{\mu} = I\cdot T(-c)\cdot Ix^{\mu} = \frac{x^{\mu} + c^{\mu}x^2}{1 + 2c\cdot x + c^2x^2}\,, \tag{2.30}$$

lako vidimo da se za malo c^{μ} ona podudara sa SKT. Otuda sledi da je $K(c)$ konačna SKT.

Lijeva algebra konformne grupe je izomorfna sa algebrom $SO(2,4)$. To se lako pokazuje posmatranjem pseudoortogonalnih transformacija u šestodimenzionom prostoru M_6 sa metrikom $\eta_{ab} = (\eta_{\mu\nu}, -1, 1)$, uz preslikavanje

$$\begin{aligned} &M_{\mu\nu} \to m_{\mu\nu}\,, \qquad && P_{\mu} \to m_{\mu 4} + m_{\mu 5}\,, \\ &K_{\mu} \to m_{\mu 4} - m_{\mu 5}\,, \qquad && D \to m_{45}\,, \end{aligned}$$

gde su m_{ab} generatori $SO(2,4)$ rotacija u M_6.

Smisao nelinearnih SKT (2.30) može se razjasniti posmatranjem veze $C(1,3)$ i $SO(2,4)$. Transformacije koordinata $SO(2,4)$ u M_6 su *linearne*. Projektovanjem ovih transformacija u M_4 dobija se *nelinearna* realizacija grupe $SO(2,4)$, koja se podudara sa delovanjem $C(1,3)$ u M_4. Činjenica da se orbitni deo generatora K_{μ} u (2.25) može izraziti preko P_{μ} i $L_{\mu\nu}$ (sa koeficijentima koji zavise od x) direktna je posledica ovog projektovanja.

2.3 Konformna simetrija i očuvane struje

Uslov invarijantnosti dejstva u odnosu na koordinatne transformacije $\delta x = \xi$ izražen je relacijom (2.11). U slučaju konformnih transformacija ξ je dato izrazom (2.21), dok su odgovarajuće promene forme polja date jednačinom (2.23). Za translaciju i Lorencove transformacije $\delta_0\phi$ ima oblik (2.5), dok je za dilataciju i SKT

$$\begin{aligned} &\delta_0^D\phi = -\rho(x\cdot\partial - d)\phi, \\ &\delta_0^K\phi = c^{\mu}\big[(2x_{\mu}x\cdot\partial - x^2\partial_{\mu}) + 2(x^{\nu}\Sigma_{\mu\nu} - x_{\mu}d)\big]\phi\,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Izjednačujući sa nulom koeficijente uz parametre Poenkareovih transformacija u uslovu (2.11) dobijaju se relacije (2.12); izjednačujući sa nulom koeficijente uz parametre dilatacije i SKT dobijaju se nove relacije (Treiman, Jackiw i Gross, 1972)

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}d\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}(-d+1)\phi_{,\nu}-4\mathcal{L}=0\,, \tag{2.32a}$$

$$2x_\mu\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}d\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}(-d+1)\phi_{,\nu}-4\mathcal{L}\right]+2V_\mu=0\,, \tag{2.32b}$$

gde je

$$V_\mu\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}(\Sigma_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}d)\phi\,. \tag{2.33}$$

Pri dobijanju ovih jednačina korišćeni su uslovi Poenkareove invarijantnosti (2.12).

Ako se d izabere tako da važi

$$d(\text{Fermi polje})=-\tfrac{3}{2}\,,\qquad d(\text{Boze polje})=-1\,,$$

tada kinetički delovi odgovarajućih lagranžijana zadovoljavaju uslov dilatacione invarijantnosti (2.32a). Te vrednosti od d se često nazivaju kanonske dimenzije polja (u jedinicama dužine), jer osiguravaju da kinetički deo dejstva ima dimenziju nula. Iz (2.32a) sledi da dilataciona dimenzija lagranžijana mora biti -4, tj. $\mathcal{L}$ ne sme da sadrži dimenzione parametre koji se ne transformišu pri dilataciji.

Jednačina (2.32b) pokazuje da je za konformnu invarijantnost potrebno da budu ispunjena *dva uslova*. Prvo, teorija treba da bude dilataciono invarijantna; drugo, veličina V_μ treba da bude potpuna divergencija,

$$V^\mu=\partial_\lambda\sigma^{\lambda\mu}\,. \tag{2.34}$$

Zaista, u tom slučaju izraz $\delta I=2\int c_\mu V^\mu d^4x$ predstavlja površinski član koji ne utiče na jednačine kretanja. Prethodni uslov je često automatski ispunjen (npr. kod renormalizabilnih teorija polja spina 0, $\frac{1}{2}$ i 1); u takvim situacijama uslov konformne invarijantnosti se svodi na uslov dilatacione invarijantnosti.

Invarijantnost dejstva, uz korišćenje jednačina kretanja, dovodi do diferencijalnog zakona očuvanja kanonske struje J^μ, slično kao u (2.13). Koristeći izraze (2.21) i (2.31) za ξ i $\delta_0\phi$ lako se dobija

$$J^\mu=\tfrac{1}{2}\omega^{ij}M^\mu{}_{ij}-\varepsilon^iT^\mu{}_i-\rho D^\mu+c^\nu K^\mu{}_\nu\,, \tag{2.35}$$

gde su D^μ i $K^\mu{}_\nu$ kanonske dilatacione i konformne struje,

$$D^\mu=x_\nu T^{\mu\nu}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}d\phi\,, \tag{2.36a}$$

$$K^\mu{}_\nu=(2x_\nu x^\lambda-\delta^\lambda_\nu x^2)T^\mu{}_\lambda+2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}x^\lambda(\Sigma_{\nu\lambda}-\eta_{\nu\lambda}d)\phi-2\sigma^\mu{}_\nu\,. \tag{2.36b}$$

Zbog konstantnosti parametara, uslov $\partial\cdot J = 0$ daje relacije (2.15) i

$$\partial_\mu D^\mu = 0\,, \qquad \partial_\mu K^\mu{}_\nu = 0\,. \tag{2.37}$$

Poboljšan TEI. Dilataciona i konformna struja su definisane preko kanonskog TEI. U prethodnom odeljku je uveden Belinfanteov TEI čije osobine jednostavno izražavaju i translacionu i Lorencovu invarijantnost. Izraz za kanonsku dilatacionu struju D^μ je sličan izrazu (2.14) za $M^\mu{}_{ij}$ po tome što poseduje jedan član koji sadrži $T_{\lambda\rho}$ i još jedan ekstra član. Tamo je ekstra član uklonjen uvodjenjem novog, Belinfanteovog TEI. Može li se slična ideja iskoristiti ovde?

Odgovor je potvrdan za široku klasu teorija. Da bismo tehnički pojednostavili izlaganje, posmatraćemo slučaj skalarnog bezmasenog polja φ,

$$\mathcal{L}_S = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \lambda\varphi^4\,. \tag{2.38}$$

U tom slučaju kanonski i Belinfanteov TEI su isti, pa D^μ postaje

$$D^\mu = x_\nu T_B^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi^2\,.$$

Definišimo sada

$$\theta^{\mu\nu} = T_B^{\mu\nu} - \tfrac{1}{6}(\partial^\mu\partial^\nu - \eta^{\mu\nu}\partial^2)\varphi^2\,. \tag{2.39}$$

Dodatni član je simetričan i ima divergenciju nula, tako da ne kvari odgovarajuće osobine Belinfanteovog tenzora; pored toga, on ne daje doprinos izrazima za P^μ i $M^{\mu\nu}$. Najzad,

$$D^\mu = x_\nu\theta^{\mu\nu} + \tfrac{1}{6}\partial_\nu(x^\nu\partial^\mu\varphi^2 - x^\mu\partial^\nu\varphi^2)\,.$$

Poslednji član je četvorodivergencija antisimetričnog tenzora i može se odbaciti, tako da je konačna definicija dilatacione struje

$$D^\mu = x_\nu\theta^{\mu\nu}\,. \tag{2.40}$$

Odavde se lako dobija

$$\partial_\mu D^\mu = \theta^\mu{}_\mu\,. \tag{2.41}$$

Tako je po analogiji sa postupkom konstrukcije Belinfanteovog tenzora uveden novi, *poboljšani* tenzor energije–impulsa $\theta^{\mu\nu}$, tako da se Poenkareova i dilataciona simetrija mogu izraziti osobinama *jednog* tenzora (Callan, Coleman i Jackiw, 1970; Coleman, 1971)

$$\begin{aligned} &\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0\,,\\ &\theta^{\mu\nu} = \theta^{\nu\mu}\,,\\ &\theta^\mu{}_\mu = 0\,. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Pogledajmo sada kako izgleda konformna struja $K^\mu \equiv c_\nu K^{\mu\nu}$ kad se izrazi pomoću $\theta^{\mu\nu}$. Za skalarno polje (2.38) imamo

$$V^\mu = \tfrac{1}{2}\partial^\mu\varphi^2\,, \qquad \sigma^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\varphi^2\,,$$

dok za polja spina $\frac{1}{2}$ i 1 ove veličine iščezavaju. Iz definicije (2.36) sledi

$$K^\mu = \xi^K_\lambda T_B^{\mu\lambda} + (c\cdot x\partial^\mu - c^\mu)\varphi^2\,.$$

Uvodeći sada $\theta^{\mu\nu}$ lako se dobija

$$K^\mu = -\xi^K_\lambda\theta^{\mu\lambda} + \tfrac{1}{6}\partial_\lambda(X^{\lambda\mu} - X^{\mu\lambda})\,,$$

gde je $X^{\lambda\mu} \equiv -\xi^\lambda_K\partial^\mu\varphi^2 + 2c^\lambda x^\mu\varphi^2$. Odbacivanjem četvorodivergencije antisimetričnog tenzora konačno se dobija

$$K^\mu = -\xi^K_\lambda\theta^{\mu\lambda}\,, \tag{2.43}$$

odakle sledi

$$\partial_\mu K^\mu = 2(\partial\cdot\xi^K)\theta^\mu{}_\mu\,, \tag{2.44}$$

posle korišćenja konformne jednačine za ξ^K. Tako smo ponovo došli do rezultata da se konformna invarijantnost svodi na dilatacionu, jer je za skalarno polje V_μ potpuna divergencija.

Za razliku od Belinfanteovog tenzora, $\theta^{\mu\nu}$ se *ne može* konstruisati za *proizvoljnu* teoriju polja. Zaista, ako bi takva konstrukcija bila moguća, onda bi iz dilatacione invarijantnosti sledila konformna, a to nije uvek tačno. Lako se mogu naći primeri teorija koje imaju dilatacionu, ali ne i konformnu simetriju. Medjutim, $\theta^{\mu\nu}$ se može konstruisati kad god je veličina V^μ potpuna četvorodivergencija, što uključuje sve renormalizabilne teorije spina 0, $\frac{1}{2}$ i 1. Za oblik $\theta^{\mu\nu}$ se opet dobija rezultat (2.39), a nepromenjeni su i izrazi (2.40) i (2.43) za D^μ i $K^{\mu\nu}$. Iščezavanje traga od $\theta^{\mu\nu}$ garantuje i dilatacionu i konformnu invarijantnost.

Proizvoljnost definicije TEI do na četvorodivergenciju postoji u običnim teorijama polja, ali ne i u gravitaciji, gde površinski članovi igraju značajnu ulogu. Interesantno je ispitati značaj i smisao tenzora $\theta_{\mu\nu}$ u gravitaciji (glava IV).

2.4 Konformne transformacije u D=2

U slučaju $D = 2$ konformna Kilingova jednačina i dalje ima rešenja oblika (2.21), no kako relacija (2.20*b*) više ne zahteva da je $\xi(x)$ najviše kvadratična funkcija od x, postoji još beskonačno mnogo drugih rešenja. Videćemo da je konformna simetrija u $D = 2$ jedna *beskonačno–parametarska* simetrija (Ginsparg, 1988).

Konformna Kilingova jednačina u $D=2$ ima oblik

$$\partial_0\xi^0 = \partial_1\xi^1 \,, \qquad \partial_0\xi^1 = \partial_1\xi^0 \,. \tag{2.45a}$$

Prelazeći na koordinate svetlosnog konusa, $x^{\pm} = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$, u kojima je $\eta_{+-} = \eta_{-+} = 1$, $\partial_{\pm} = (\partial_0 \pm \partial_1)/\sqrt{2}$, prethodne jednačine postaju

$$\partial_+\xi^- = 0 \,, \qquad \partial_-\xi^+ = 0 \,,$$

odakle se lako dobijaju rešenja:

$$\xi^- = \xi^-(x^-) \,, \qquad \xi^+ = \xi^+(x^+) \,.$$

Pogodno je preći u Euklidov prostor $x = x^1$, $y = ix^0$, i uvesti kompleksne veličine:

$$\begin{aligned} x^+ &= \bar z = (x - iy)/\sqrt{2} \,, \qquad & -x^- &= z = (x+iy)/\sqrt{2} \,, \\ \xi^+(x^+) &= \bar\xi(\bar z) \,, & -\xi^-(x^-) &= \xi(z) \,. \end{aligned}$$

Tada konformna Kilingova jednačina prelazi u Koši–Rimanove uslove kompleksne analize,

$$\partial_x\xi^x = \partial_y\xi^y \,, \qquad \partial_x\xi^y = -\partial_y\xi^x \,, \tag{2.45b}$$

a konformne transformacije postaju analitička ili antianalitička preslikavanja:

$$z' = z + \xi(z) \,, \qquad \bar z' = \bar z + \bar\xi(\bar z) \,,$$

Ova preslikavanja čuvaju ugao pod kojim se dve krive seku u kompleksnoj ravni.

Svako rešenje $\xi(z)$ regularno u $z=0$ može se razviti u red

$$\xi(z) = a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2 + \cdots \,, \tag{2.46}$$

i ono, zaista, zavisi od beskonačno mnogo parametara $(a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$. Da bismo našli oblik odgovarajućih generatora posmatraćemo skalarnu analitičku funkciju F, $F'(z') = F(z)$, i transformaciju $z' = z + a_n z^{n+1}$, $n \geq -1$. Promena forme funkcije F data je izrazom

$$\delta_0 F(z) = a_n L_n F(z) \,, \qquad L_n \equiv -z^{n+1}\partial_z \,, \quad n \geq -1 \,. \tag{2.47}$$

Odgovarajuće generatore antianalitičkih transformacija označićemo sa $\bar L_n$. Generatori L_n i $\bar L_n$ zadovoljavaju (klasičnu) *Virazorovu algebru*

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} \,, \qquad [\bar L_n, \bar L_m] = (n-m)\bar L_{n+m} \,, \tag{2.48}$$

dok L_n i $\bar{L}_m$ medjusobno komutiraju.[†]

Veličina

$$L(z) = \sum_{n\geq -1} a_n L_n = -\sum_{n\geq -1} a_n z^{n+1}\partial_z \,,$$

koja generiše konformnu transformaciju sa parametrom (2.48), regularna je pri $z \to 0$. Da bismo ispitali regularnost pri $z \to \infty$, uvešćemo smenu $z = 1/w$, posle čega

$$L(z) = -\sum_{n\geq -1} a_n w^{-n-1}\frac{\partial w}{\partial z}\partial_w = \sum_{n\geq -1} a_n w^{1-n}\partial_w \,.$$

Zahtev regularnosti pri $w \to 0$ dozvoljava samo vrednosti $n \leq 1$. Tako vidimo da su konformne transformacije generisane sa $\{L_{\pm 1}, L_0\}$ dobro definisane na celoj Rimanovoj sferi $C^2 \cup \{\infty\}$. Generatori $\{L_{\pm 1}, L_0\}$ čine podalgebru Virazorove algebre,

$$[L_{\pm 1}, L_0] = \pm L_{\pm 1} \,, \qquad [L_{+1}, L_{-1}] = 2L_0 \,.$$

Isto važi i za $\{\bar{L}_{\pm 1}, \bar{L}_0\}$.

Generatori $\{L_{\pm 1}, L_0\} \cup \{\bar{L}_{\pm 1}, \bar{L}_0\}$ definišu globalnu (konačno–parametarsku) konformnu grupu u $D = 2$; odgovarajuće transformacije su dobro definisane i invertibilne na celoj Rimanovoj sferi. Precizna korespodencija sa ranije dobijenim rezultatima glasi:

$$\begin{aligned} &P_0 = \bar{L}_{-1} - L_{-1} \,, \qquad && M_{01} = L_0 - \bar{L}_0 \,, \qquad && K_0 = L_1 - \bar{L}_1 \,, \\ &P_1 = L_{-1} + \bar{L}_{-1} \,, && D = L_0 + \bar{L}_0 \,, && K_1 = L_1 + \bar{L}_1 \,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Konačna forma globalnih konformnih transformacija je data linearno–razlomljenim preslikavanjem

$$L_R : \quad z \to \frac{az+b}{cz+d} \,, \quad ad - bc = 1 \,.$$

Uvodeći $SL(2,C)$ matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \qquad \det M = 1 \,,$$

lako se može dokazati izomorfizam preslikavanja L_R i $SL(2,C)/Z_2$ (matrice M i $-M$ odgovaraju istoj transformaciji L_R). Konformne transformacije

[†] Virazorova algebra se može proširiti generatorima koji nisu regularni u tački $z = 0$: $L_n = -z^{n+1}\partial_z$, $n < -1$. Oblik algebre ostaje isti.

(2.28) i (2.30) se mogu dobiti iz L_R–preslikavanja na sledeći način:

$$T: \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \Lambda: \quad \begin{pmatrix} e^{i\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega/2} \end{pmatrix}$$

$$D: \quad \begin{pmatrix} e^{\rho/2} & 0 \\ 0 & e^{-\rho/2} \end{pmatrix} \qquad\qquad K: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

gde su a i c kompleksni, a ω i ρ realni parametri.

Postojanje lokalnih konformnih transformacija (beskonačan broj parametara), pored globalnih (konačan broj parametara), specifičnost je dvodimenzione teorije. Treba reći da u strogom smislu samo globalne konformne transformacije čine grupu, jer ostale nisu regularne (ne postoji inverzni elemenat) na celoj Rimanovoj sferi.

2.5 Skrivena dilataciona simetrija

Fizičke karakteristike klasične teorije polja su odredjene u odnosu na *osnovno stanje* (ili vakuum), koje se definiše kao stanje najniže energije sistema. Ekscitacije polja oko osnovnog stanja, koristeći jezik kvantne teorije, nazivaju se čestične ekscitacije, a njihova energija, impuls i druge fizičke osobine, odredjuju se relativno, u odnosu na osnovno stanje.

Posmatraćemo, zbog jednostavnosti, teoriju koja opisuje n realnih, skalarnih polja,

$$\mathcal{L} = \sum \tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi^a\partial^\mu\varphi^a - U(\varphi)\,, \tag{2.50}$$

gde je U neka funkcija polja $\varphi = (\varphi^a)$. Za teorije ovog tipa hamiltonijan ima oblik

$$\mathcal{H} = \sum \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha\varphi^a)^2 + U(\varphi)\,,$$

odakle se vidi da je stanje najniže energije ono za koje je polje φ^a konstantno, $(\varphi^a)_0 = v^a$, a vrednost v^a se odredjuje iz uslova minimuma potencijala $U(\varphi)$.

Ako lagranžijan ima neku simetriju G, nije nužno da i osnovno stanje ima istu simetriju. Fizička simetrija bitno zavisi od simetrije osnovnog stanja i može se realizovati na dva načina.

i) Simetrija može biti *manifestna.* U tom slučaju osnovno stanje ima istu simetriju kao i lagranžijan, a komponente polja unutar svake ireducibilne reprezentacije grupe G imaju istu masu. Ova simetrija se može narušiti eksplicitno, dodavanjem lagranžijanu člana koji nema tu simetriju, posle čega mase unutar multipleta postaju različite.

ii) Simetrija može biti *skrivena* ili, kako se često kaže, *spontano narušena.* To se dogadja kad osnovno stanje nije invarijantno u odnosu na G. Tada mase unutar G–multipleta nisu jednake, već se karakterišu tzv. *Goldstonovom teoremom*, koja, u slučaju unutrašnje simetrije, kaže da svakom generatoru grupe simetrije lagranžijana koji narušava simetriju osnovnog stanja odgovara jedan bezmaseni bozon. Ako se simetrija lagranžijana eksplicitno naruši, Goldstonovi bozoni dobijaju masu.

PRIMER 5. Ako je u izrazu (2.50) broj skalarnih polja $n = 3$, a potencijal oblika

$$U(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\left(\varphi^2 - v^2\right)^2 , \qquad \varphi^2 \equiv \sum(\varphi^a)^2 ,$$

lagranžijan ima simetriju u odnosu na trodimenzione rotacije, $\varphi^a \to R^a{}_b\varphi^b$. Minimum potencijala leži na sferi $\varphi^2 = v^2$; koju tačku na sferi izabrati za osnovno stanje je fizički irelevantno. Izaberimo $v^1 = 0$, $v^2 = 0$, $v^3 = v$. U tom slučaju osnovno stanje nema $SO(3)$ simetriju, već samo $SO(2)$: rotacije u ravnima 1–2 i 1–3 nisu simetrije osnovnog stanja. Da bismo ispitali fizički spektar ekscitacija oko osnovnog stanja definišimo nova polja

$$\varphi^1 = \eta^1 , \qquad \varphi^2 = \eta^2 , \qquad \varphi^3 = v + \eta^3 .$$

Kad se potencijal izrazi preko novih polja, lako se vidi da su η^1 i η^2 bezmasena polja. Njihov broj je isti kao i broj generatora koji narušavaju simetriju osnovnog stanja.

Interesantno je, sa ovog aspekta, razmotriti neke karakteristike dilatacione simetrije. Maseni članovi u lagranžijanu eksplicitno narušavaju dilatacionu invarijantnost. Mogu li se ovi članovi interpretirati kao posledica spontano narušene dilatacione simetrije?

Izložićemo ovaj problem na slučaju masivnog Dirakovog polja. Maseni član se lako može učiniti dilataciono invarijantnim uvodeći jedno skalarno bezmaseno polje φ, $d(\varphi) = -1$, koje se, u odnosu na dilataciju $x' = e^\rho x$, transformiše na uobičajeni način:

$$\varphi'(x') = e^{-\rho}\varphi(x).$$

Zaista, zamena $m\bar\psi\psi \to \lambda\bar\psi\psi\varphi$ uz dodavanje slobodnog dela za φ daje dilataciono invarijantan rezultat,

$$\mathcal{L}' = \bar\psi i\gamma\cdot\partial\psi - \lambda\bar\psi\psi\varphi + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi . \tag{2.51a}$$

U ovoj teoriji su polja ψ i φ bezmasena. Pretpostavimo sada da postoji mehanizam spontanog narušenja simetrije, takav da polje φ u osnovnom stanju dobija nenultu vrednost, $(\varphi)_0 = v \quad (\lambda v = m)$. Tada je za opis ekscitacija oko osnovnog stanja korisno uvesti polje $\sigma(x)$ koje u osnovnom stanju ima vrednost 0. To se može uraditi preko relacije $\varphi = v + \sigma$, ali je tehnički zgodnija definicija

$$\varphi = ve^{\sigma/v} = v + \sigma + \cdots \quad .$$

Novo polje se transformiše *nehomogeno*:

$$\sigma'(x') = \sigma(x) - \rho v .$$

Prisustvo nehomogenog člana je karakteristično za slučaj spontano narušene simetrije. Lagranžijan (2.51a) izražen preko polja $\sigma(x)$ ima oblik

$$\mathcal{L}'' = \bar{\psi} i\gamma\cdot\partial\psi - \lambda v\bar{\psi}\psi e^{\sigma/v} + \tfrac{1}{2}v^2\partial_\mu e^{\sigma/v}\partial^\mu e^{\sigma/v} \,. \tag{2.51b}$$

Ovaj lagranžijan ima skrivenu dilatacionu simetriju; polje $\sigma(x)$ je bezmaseno, i ono predstavlja Goldstonov bozon spontano narušene dilatacione simetrije, a polje $\psi(x)$ je maseno.

Interesantno je uočiti da $\mathcal{L}'$ ima ne samo dilatacionu već i specijalnu konformnu simetriju. S druge strane, prelazom $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$ narušena je (spontano) i dilataciona i specijalna konformna simetrija, a pojavio se samo jedan Goldstonov bozon. Ova neobična situacija posledica je nelinearnosti realizacije konformne grupe u M_4.

Skrivena dilataciona simetrija se može eksplicitno narušiti dodavanjem pogodnog člana lagranžijanu $\mathcal{L}'$. Moguć je izbor

$$\mathcal{L}_m = -\tfrac{1}{16}m_\sigma^2 v^2\left[e^{4\sigma/v} - (1+4\sigma/v)\right] , \tag{2.52}$$

za koji se lako vidi, posle razvoja u red po σ, da predstavlja maseni član za σ.

ZADACI

1. Pokazati da Dirakov lagranžijan zadovoljava uslove Poenkareove invarijantnosti.
2. Konstruisati kanonski TEI za teoriju skalarnog polja definisanu lagranžijanom
$$\mathcal{L}_S = \tfrac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + gx^2\varphi \,.$$
Pokazati da on nije očuvana veličina, ali da je ugaoni momenat očuvan.
3. Naći simetrizovan TEI za
a) Dirakovo polje,
b) skalarno polje sa interakcijom tipa φ^4, i
c) slobodno elektromagnetno polje.
4. Pokazati da je za beskonačno male SKT ispunjen uslov
$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} + c^\mu \,,$$
tj. $IK(c) = T(-c)I$.
5. Pokazati da primena inverzije pre i posle Lorencove transformacije (dilatacije) daje opet Lorencovu transformaciju (dilataciju) .
6. Naći konformni faktor $s(x)$ koji karakteriše transformaciju metrike η u slučaju a) dilatacije, b) inverzije i c) SKT.
7. Koristeći komutacione relacije (2.24) dokazati
$$(1+\rho D)e^{u\cdot P} = e^{(1+\rho)u\cdot P}(1+\rho D) + \mathcal{O}(\rho^2) \,,$$
$$(1+c\cdot K)e^{u\cdot P} = e^{(u^\mu + c^\mu u^2 - 2c\cdot u u^\mu)P_\mu}(1 + c\cdot K + 2c^\mu u^\nu M_{\mu\nu} - 2c\cdot uD) + \mathcal{O}(c^2).$$

a zatim naći opšti oblik generatora D i K u prostoru polja.

8. Pokazati da lagranžijan skalarnog polja $\mathcal{L}_S(\varphi, \partial\varphi)$, koji zadovoljava uslove dilatacione invarijantnosti, ima opšti oblik $\mathcal{L}_S = f(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi/\varphi^4)\varphi^4$. Kakav je opšti oblik $\mathcal{L}_S$ u slučaju konformne invarijantnosti?
9. Šestodimenzioni prostor M_6 ima metriku koja je, u kordinatnom sistemu y^a, data sa $g_{ab} = (\eta_{\mu\nu}, -1, 1)$. Na konusu $y^2 \equiv g_{ab}y^a y^b = 0$ uvedene su koordinate
$$x^\mu = \frac{y^\mu}{k}\,, \qquad k = y_4 + y_5\,.$$
Pokazati da transformacije $SO(2,4)$ u M_6 indukuju konformne transformacije koordinata x^μ.
10. Dokazati da svaki lagranžijan koji se sastoji od
a) slobodnog lagranžijana za bezmaseno polje φ, ψ ili A_μ, i
b) interakcije oblika
$$\begin{aligned}&\varphi^4\,, \quad \varphi\bar{\psi}\psi\,, \quad \varphi\bar{\psi}\gamma_5\psi\,,\\ &A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\,, \quad A^\mu[\varphi^*(\partial_\mu\varphi) - (\partial_\mu\varphi^*)\varphi]\,, \quad A^\mu A_\mu\varphi^*\varphi\,,\end{aligned}$$
definiše dilataciono invarijantnu teoriju. Zatim pokazati da je svaka od ovih teorija i konformno invarijantna.
11. Ispitati dilatacionu i konformnu simetriju teorije bezmasenog Dirakovog i skalarnog polja sa interakcijom oblika $\lambda\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\varphi$.
12. Ispitati dilatacionu i konformnu simetriju teorije bezmasenog polja heliciteta $\frac{3}{2}$, zadate lagranžijanom
$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\psi_\lambda\,, \qquad \psi_\mu = (\psi_{\mu\alpha})\,.$$
13. Pokazati da generatori P, M, D i K, definisani jednačinom (2.49), zadovoljavaju Lijevu algebru konformne grupe.
14. Dokazati izomorfizam preslikavanja L_R i $SL(2,C)/Z_2$.
15. Pokazati kako se iz preslikavanja L_R dobijaju konformne transformacije (2.28) i (2.30).
16. Naći divergenciju dilatacione struje koja odgovara narušenju dilatacione simetrije članom (2.52).

GLAVA III

LOKALNA POENKAREOVA TEORIJA

Poznato je da postojanje i oblik interakcije nekih polja, kao što je elektromagnetno polje, mogu biti povezani sa simetrijom teorije. Tako, ako je lagranžijan nekog naelektrisanog polja ϕ invarijantan u odnosu na fazne transformacije sa konstantnim parametrom, onda se elektromagnetno polje A_μ može uvesti iz zahteva da teorija ostane invarijantna i pri zameni konstantnog parametra α nekom funkcijom $\omega(x)$ (lokalizacija simetrije). Ovu ideju su Jang i Mils (Yang i Mills, 1954) uopštili na složeniji slučaj SU(2) simetrije. U oba slučaja se radi o grupi simetrije koja izaziva promenu forme polja ϕ delujući u apstraktnom prostoru komponenti polja, a ne u realnom prostor–vremenu. Izučavanje ovih *unutrašnjih* lokalnih simetrija je posebno interesantno sa gledišta uopštavanja na slučaj lokalnih prostorno–vremenskih simetrija (Dodatak A).

S druge strane, mnogo manje je poznato da Ajnštajnova OTR poseduje lokalnu Poenkareovu simetriju. Ova osobina teorije se može razjasniti pomoću principa ekvivalencije, što daje fizičku sadržinu lokalnoj simetriji. Umesto da na osnovu principa ekvivalencije dokazujemo lokalnu Poenkareovu simetriju, čitav postupak možemo i obrnuti, po ugledu na danas standardni postupak izgradnje lokalno invarijantnih teorija unutrašnjih grupa simetrije. U slučaju kada nema gravitacionog polja poznato je da Poenkareova grupa predstavlja grupu globalne simetrije fizičkih procesa. Ako zahtevamo da ova grupa bude i lokalna grupa simetrije, to se može postići uvođenjem u teoriju novih, *kompenzujućih polja*, koja, u stvari, predstavljaju gravitaciju (Kibble, 1961).

Kompenzujuća polja služe da ponište neželjene efekte upotrebe lokalnih transformacija, tako da teorija ostaje invarijantna i u odnosu na novu, lokalnu grupu simetrije.

U slučaju lokalizacije Poenkareove simetrije dobija se tzv. U_4 teorija gravitacije, koja sadrži OTR kao jedan specijalni slučaj. U ovoj teoriji se, za razliku od OTR, uzima u obzir da u svakoj tački prostor–vremena postoji čitava klasa lokalno inercijalnih sistema koji su medjusobno povezani Lorencovim transformacijama. Time se, koristeći slobodu koju dopušta princip ekvivalencije, na prirodan način u teoriju gravitacije uključuje i *spin* materije.

Izlaganje postupka lokalizacije Poenkareove simetrije biće praćeno odgovarajućom geometrijskom interpretacijom, izlaganjem dinamike najjednostavnijeg, ali važnog slučaja Ajnštajn–Kartanove teorije, kao i kratkim pregledom osnovnih osobina opšte teorije ovog tipa.

1. LOKALNA POENKAREOVA INVARIJANTNOST

Sada ćemo videti kako se pri prelazu sa globalne na lokalnu Poenkareovu *prostorno–vremensku* simetriju uvodi gravitaciona interakcija. Slučajevi drugih prostorno–vremenskih simetrija (de Siterova, konformna i dr.) mogu se analizirati analognim postupkom.

1.1 Lokalizacija Poenkareove simetrije

U svakoj tački Minkovskijevog prostora M_4 može se definisati lokalni Lorencov referentni sistem zadavanjem četiri ortonormirana vektora $\boldsymbol{e}_i(x)$, koje ćemo zvati tetradom. Koristeći Dekartove koordinate x^μ tetrada se može izabrati tako da bude jednaka sa koordinatnom bazom $\boldsymbol{e}_\mu(x)$ (skup četiri vektora koji su, u datoj tački, tangentni na koordinatne linije), tj. $\boldsymbol{e}_i(x) = \delta_i^\mu \boldsymbol{e}_\mu(x)$. Srednja slova latinske azbuke $(i, j, k, ...)$ odnose se, po konvenciji, na lokalnu Lorencovu bazu, dok se srednja slova grčke azbuke $(\mu, \nu, \rho, ...)$ odnose na koordinatnu bazu prostor–vremena. Ova konvencija nije značajna sve dok posmatramo M_4, ali postaje značajna pri prelazu na prostor–vreme složenije strukture.

Klasičnu dinamiku polja materije $\phi(x)$ u prostoru M_4 odredjuje dejstvo $I = \int d^4x \mathcal{L}_M(\phi, \partial_k\phi)$. Ako se Poenkareove transformacije uopšte, pretpostavljajući da deset parametara grupe nisu konstante već neke *funkcije* koordinata, uslov invarijantnosti dejstva (2.11) prestaje da važi, i to iz dva razloga. Prvo, parcijalni izvod se ne transformiše kao u slučaju globalne simetrije,

$$
\begin{aligned}
&\delta_0 \partial_k \phi = \mathcal{P}\partial_k\phi + \omega_k{}^\nu \partial_\nu \phi \equiv \mathcal{P}_k{}^\nu \partial_\nu\phi , \\
&\mathcal{P} \equiv \tfrac{1}{2}\omega\cdot M + \varepsilon \cdot P \, ,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

već po novom zakonu:

$$
\begin{aligned}
\delta_0 \partial_k \phi &= \mathcal{P}_k{}^\nu \partial_\nu \phi + \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}{}_{,k} M_{\mu\nu}\phi + \varepsilon^\nu{}_{,k} P_\nu \phi \\
&= \mathcal{P}\partial_k\phi - \xi^\nu{}_{,k}\partial_\nu\phi + \tfrac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,k}\Sigma_{ij}\phi \, .
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Drugo, sada je $\partial_\mu \xi^\mu \neq 0$. Zato se, posle korišćenja zakona održanja (2.15), umesto uslova invarijantnosti dobija relacija

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_M &= \tfrac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}M^\mu{}_{ij} - \varepsilon^i{}_{,\mu}T^\mu{}_i \\ &= \tfrac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}S^\mu{}_{ij} - (\xi^i{}_{,\mu} - \omega^i{}_\mu)T^\mu{}_i \neq 0\,.\end{aligned}$$

Ovo narušenje lokalne simetrije može se kompenzovati odredjenom promenom početne teorije.

Kovarijantni izvod. Najpre ćemo naći lagranžijan $\mathcal{L}'_M$ koja zadovoljava uslov invarijantnosti (2.11) u obliku koji odgovara globalnoj simetriji, tj. sa $\partial_\mu \xi^\mu = 0$. Ovo se postiže izborom

$$\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M(\phi, \nabla_k\phi)\,, \tag{3.3}$$

gde je $\nabla_k\phi$ *kovarijantni izvod* polja ϕ, koji se transformiše po pravilu (3.1),

$$\delta_0\nabla_k\phi = \mathcal{P}\nabla_k\phi + \omega_k{}^i\nabla_i\phi = \mathcal{P}_k{}^i\nabla_i\phi\,. \tag{3.4}$$

Konstrukciju kovarijantnog izvoda izvršićemo u dva koraka. Uvedimo najpre ω–kovarijantni izvod koji eliminiše član $\omega^{ij}{}_{,\mu}$ u (3.2),

$$\nabla_\mu\phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi, \qquad A_\mu \equiv \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij}\,, \tag{3.5}$$

gde su $A^{ij}{}_\mu$ odgovarajuća kompenzujuća (gradijentna) polja. Uslov

$$\delta_0\nabla_\mu\phi = \mathcal{P}\nabla_\mu\phi - \xi^\nu{}_{,\mu}\nabla_\nu\phi \tag{3.6}$$

odredjuje zakon transformacije za A_μ:

$$\delta_0 A_\mu = [\mathcal{P}, A_\mu] - \xi^\nu{}_{,\mu}A_\nu - \omega_{,\mu}\,, \qquad \omega \equiv \tfrac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\,, \tag{3.7a}$$

odnosno

$$\delta_0 A^{ij}{}_\mu = \omega^i{}_s A^{sj}{}_\mu + \omega^j{}_s A^{is}{}_\mu - \xi^\lambda{}_{,\mu}A^{ij}{}_\lambda - \omega^{ij}{}_{,\mu} - \xi^\lambda\partial_\lambda A^{ij}{}_\mu\,. \tag{3.7b}$$

Ako sada jednačinu (3.6) prepišemo u obliku

$$\delta_0\nabla_\mu\phi = \mathcal{P}_\mu{}^\nu\nabla_\nu\phi - (\xi^\nu{}_{,\mu} - \omega^\nu{}_\mu)\nabla_\nu\phi\,,$$

videćemo da se zadnji član može eliminisati uvodjenjem novog kompenzujućeg polja $A_k{}^\mu$,

$$\nabla_k\phi = \delta_k^\mu\nabla_\mu\phi - A_k{}^\mu\nabla_\mu\phi\,. \tag{3.8a}$$

Pošto je ovaj izraz homogen po $\nabla_\mu\phi$, uvešćemo veličinu $h_k{}^\mu = \delta_k^\mu - A_k{}^\mu$ koja *nije* kompenzujuće polje, posle čega $\nabla_k\phi$ postaje

$$\nabla_k\phi = h_k{}^\mu\nabla_\mu\phi\,. \tag{3.8b}$$

Zakon transformacije veličine $h_k{}^\mu$ sledi iz zahteva (3.4) uz korišćenje (3.6),

$$\big(\mathcal{P}h_k{}^\nu + \omega_k{}^i h_i{}^\nu\big)\nabla_\nu\phi = (\delta_0 h_k{}^\nu)\nabla_\nu\phi + \big(h_k{}^\nu\mathcal{P} - h_k{}^\lambda\xi^\nu{}_{,\lambda}\big)\nabla_\nu\phi\,,$$

iz čega se dobija

$$\delta_0 h_k{}^\mu = \omega_k{}^s h_s{}^\mu + \xi^\mu{}_{,\lambda}h_k{}^\lambda - \xi^\lambda\partial_\lambda h_k{}^\mu\,. \tag{3.9}$$

Lagranžijan materije. Do sada smo definisali kovarijantni izvod $\nabla_k\phi$ uvodeći kompenzujuća polja, i izveli njihove zakone transformacije iz zahteva kovarijantnosti $\nabla_k\phi$. Time je odredjen lagranžijan $\mathcal{L}'_M$. U drugom koraku ka uspostavljanju lokalne simetrije treba povesti računa o tome da je $\partial_\mu\xi^\mu \neq 0$. To se može postići uvodjenjem veličine

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M = \Lambda\mathcal{L}'_M\,, \tag{3.10}$$

gde je Λ neka funkcija već uvedenih polja. U tom slučaju zahtev invarijantnosti (2.11) daje

$$\delta_0\Lambda + \partial_\mu(\xi^\mu\Lambda) = 0\,.$$

U ovoj jednačini koeficijente uz parametre ξ^ν (ili ε^ν), ω^{ij} i njihove prve i druge izvode treba izjednačiti sa nulom. Koeficijenti uz druge izvode su nula ako Λ ne zavisi od izvoda gradijentnih polja, koeficijent uz ξ^ν je nula pošto Λ ne zavisi eksplicitno od x, dok iščezavanje koeficijenta uz $\omega^{ij}{}_{,\nu}$ znači nezavisnost Λ od $A^{ij}{}_\nu$. Preostala dva uslova su data izrazima

$$\begin{aligned}
\xi^\mu{}_{,\nu}: &\qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial h_k{}^\mu}h_k{}^\nu + \delta_\mu^\nu\Lambda = 0\,,\\
\omega^{ij}: &\qquad \eta_{ik}\frac{\partial\Lambda}{\partial h_k{}^\mu}h_j{}^\mu - \eta_{jk}\frac{\partial\Lambda}{\partial h_k{}^\mu}h_i{}^\mu = 0\,.
\end{aligned}$$

Uvodeći veličinu $b^k{}_\mu$ inverznu gradijentnom polju $h_k{}^\mu$,

$$b^k{}_\mu h_k{}^\nu = \delta_\mu^\nu\,, \qquad b^k{}_\mu h_s{}^\mu = \delta_s^k\,,$$

i množeći prvu jednačinu za Λ sa $b^s{}_\nu$, lako se vidi da je njeno rešenje

$$\Lambda = [\det(h_k{}^\mu)]^{-1} = \det(b^k{}_\mu) \equiv b\,. \tag{3.11}$$

Ovo rešenje je definisano do na konstantu koja se može izabrati da bude jedan, i automatski zadovoljava drugu jednačinu.

Konačni lagranžijan materije, koji zadovoljava kompletan uslov (2.11), ima oblik

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M = b\mathcal{L}_M(\phi, \nabla_k\phi)\,. \tag{3.12}$$

On se dobija iz početnog lagranžijana $\mathcal{L}_M(\phi, \partial_k\phi)$ u dva koraka:

i) zamenom $\partial_k\phi \to \nabla_k\phi$, i

ii) množenjem lagranžijana $\mathcal{L}_M$ sa b.

Primer 1. Slobodno skalarno polje u Minkovskijevom prostoru opisano je lagranžijanom $\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\left(\eta^{kl}\partial_k\varphi\partial_l\varphi - m^2\varphi^2\right)$. Posle lokalizacije Poenkareove simetrije lagranžijan postaje

$$\widetilde{\mathcal{L}}_S = \tfrac{1}{2}b\left(\eta^{kl}\nabla_k\varphi\nabla_l\varphi - m^2\varphi^2\right) = \tfrac{1}{2}b\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2\right)\,,$$

gde je $g^{\mu\nu} = \eta^{kl}h_k{}^\mu h_l{}^\nu$, a $\nabla_k\varphi = h_k{}^\mu\partial_\mu\varphi$. Na sličan način antisimetrizovani Dirakov lagranžijan $\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}\left(i\bar\psi\gamma^k\overleftrightarrow{\partial}k\psi - 2m\bar\psi\psi\right)$, $\overleftrightarrow{\partial}k \equiv \overrightarrow{\partial}_k - \overleftarrow{\partial}_k$, prelazi u

$$\widetilde{\mathcal{L}}_D = \tfrac{1}{2}b\left(i\bar\psi\gamma^k\overleftrightarrow{\nabla}_k\psi - 2m\bar\psi\psi\right)\,, \qquad \overleftrightarrow{\nabla}_k \equiv \overrightarrow{\nabla}_k - \overleftarrow{\nabla}_k\,,$$

gde je $\nabla_k\psi = h_k{}^\mu(\partial_\mu + A_\mu)\psi$, $\nabla_k\bar\psi = h_k{}^\mu\bar\psi(\overleftarrow{\partial}_\mu - A_\mu)$, $A_\mu \equiv \frac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\sigma_{ij}$.

Komentari. Interesantno je u ovom trenutku ponovo razmotriti interpretaciju jednačina (2.4) i (2.5) koje definišu beskonačno male Poenkareove transformacije. Ove transformacije su definisane sa deset parametara $\omega^{\mu\nu}$ i ε^μ. Posle lokalizacije simetrije moglo bi se pomisliti da je rotacioni deo transformacija izgubio svoju nezavisnost: u jednačini (2.4) on se može apsorbovati u redefinisanu funkciju $\xi^\mu(x)$, koja opisuje opšte koordinatne transformacije. Medjutim, iz zakona transformacije (2.5) za polje materije se vidi da rotacioni deo ima svoju ulogu i posle lokalizacije simetrije: on se ne svodi na lokalne translacije.

Za razliku od slučaja unutrašnje simetrije, totalni ugaoni momenat $M_{\mu\nu}$ sadrži orbitni deo, koji zavisi od x^μ i translacionog generatora $P_\nu = -\partial_\nu$. Koristeći ovu činjenicu relacija (2.5) se može prepisati u obliku

$$\delta_0\phi = (\tfrac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij} + \xi^\nu P_\nu)\phi\,.$$

Sada se postavlja sledeće pitanje: mogu li se ξ^μ i $\omega^{\mu\nu}$, umesto ε^μ i $\omega^{\mu\nu}$, tretirati kao *nezavisni* parametri? U slučaju globalne Poenkareove simetrije ovo nije moguće: na primer, transformacija definisana uslovima $\xi^\mu = 0$ i $\omega^{ij} \neq 0$ nije moguća. Kad je simetrija lokalizovana, odgovor na prethodno pitanje je pozitivan zbog zakona transformacije kompenzujućih polja. Drugim rečima, simetrija teorije je promenjena posle lokalizacije.

Da bismo olakšali kasniju geometrijsku interpretaciju teorije, pogodno je uopštiti prethodnu konvenciju o upotrebi grčkih i latinskih indeksa i na gradijentna polja. Na osnovu zakona transformacije (3.7*b*) i (3.9), upotreba latinskih i grčkih indeksa kod veličina $A^{ij}{}_\mu$ i $h_k{}^\nu$ u skladu je sa ovom konvencijom: one se transformišu kao lokalni Lorencovi tenzori po latinskim indeksima, a kao svetski tenzori po grčkim indeksima. Pri tome, po članu $\xi^\mu{}_{,\lambda}h_k{}^\lambda$ u (3.9) vidi se da se prelaz od grčkih na latinske indekse vrši koristeći $h_k{}^\lambda$ a ne δ_k^λ. Prisustvo člana $-\omega^{ij}{}_{,\mu}$ u (3.7b) karakteriše zakon transformacije potencijala $A^{ij}{}_\mu$ (odgovarajući član $-\xi^\mu{}_{,k}$ se javlja u izrazu $\delta_0 A_k{}^\mu$), dok članovi $\xi^\lambda\partial_\lambda A^{ij}{}_\mu$ i $\xi^\lambda\partial_\lambda h_k{}^\nu$ potiču od korišćenja varijacije forme δ_0, a ne totalne varijacije δ.

Eksplicitan oblik veličine Σ_{ij} zavisi samo od ponašanja polja ϕ u odnosu na lokalne Lorencove rotacije. Zato je prirodno uopštiti ω–kovarijantni izvod ∇_μ na proizvoljan Lorencov tenzor. Tako je, na primer,

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu h_k{}^\nu &= \left[\partial_\mu + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\mu(\Sigma^1_{ij})\right]_k{}^s h_s{}^\nu = \partial_\mu h_k{}^\nu - A^s{}_{k\mu}h_s{}^\nu\,,\\
\nabla_\mu\omega^{kl} &= \left[\partial_\mu + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\mu(\Sigma^2_{ij})\right]^{kl}{}_{rs}\omega^{rs} = \partial_\mu\omega^{kl} + A^k{}_{s\mu}\omega^{sl} + A^l{}_{s\mu}\omega^{ks}\,,
\end{aligned}
$$

gde su Σ^1_{ij} i Σ^2_{ij} vektorska i tenzorska reprezentacija operatora Lorencovih rotacija Σ_{ij},

$$
\begin{aligned}
(\Sigma^1_{ij})^k{}_s &= (\delta^k_i\eta_{js} - \delta^k_j\eta_{is})\,,\\
(\Sigma^2_{ij})^{kl}{}_{rs} &= (\Sigma^1_{ij})^k{}_r\delta^l_s + (\Sigma^1_{ij})^l{}_s\delta^k_r\,.
\end{aligned}
$$

Jačine polja. Do sada smo, uvodeći gradijentna polja, uspeli da izmenimo polazni lagranžijan materije tako da bude zadovoljen uslov invarijantnosti (2.11) i u slučaju lokalnih Poenkareovih transformacija. Da bismo konstruisali slobodan invarijantan lagranžijan za $h_k{}^\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$, uvešćemo najpre odgovarajuće *jačine polja.* U tu svrhu izračunaćemo komutator dva ω–kovarijantna izvoda:

$$
\begin{aligned}
&[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\phi = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])\phi = \tfrac{1}{2}F^{ij}{}_{\mu\nu}\Sigma_{ij}\phi\,,\\
&F^{ij}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{ij}{}_\nu - \partial_\nu A^{ij}{}_\mu + A^i{}_{s\mu}A^{sj}{}_\nu - A^i{}_{s\nu}A^{sj}{}_\mu\,.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Veličina $F^{ij}{}_{\mu\nu}$ je Lorencova jačina polja i transformiše se kovarijantno u odnosu na svoje Lorencove indekse,

$$
\delta_0 F^{ij}{}_{\mu\nu} = \omega^i{}_s F^{sj}{}_{\mu\nu} + \omega^j{}_s F^{is}{}_{\mu\nu} - \xi^\lambda\partial_\lambda F^{ij}{}_{\mu\nu}\,.
$$

Pošto je $\nabla_k\phi = h_k{}^\mu\nabla_\mu\phi$, komutator dva ∇_k–kovarijantna izvoda će se razlikovati od izraza (3.13) dodatnim članom koji sadrži izvode polja $h_k{}^\mu$. Zaista,

$$
[\nabla_k,\nabla_l]\phi = \tfrac{1}{2}F^{ij}{}_{kl}\Sigma_{ij}\phi - F^s{}_{kl}\nabla_s\phi\,, \tag{3.14a}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
F^{ij}{}_{kl} &= h_k{}^\mu h_l{}^\nu F^{ij}{}_{\mu\nu}\,,\\
F^s{}_{kl} &= h_k{}^\mu h_l{}^\nu(\nabla_\mu b^s{}_\nu - \nabla_\nu b^s{}_\mu) \equiv h_k{}^\mu h_l{}^\nu F^s{}_{\mu\nu}\,.
\end{aligned}
\tag{3.14b}
$$

Veličinu $F^i{}_{\mu\nu}$ nazivamo translacionom jačinom polja. Jačine polja zadovoljavaju sledeće diferencijalne (Bjankijeve) identitete:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\lambda F^{ij}{}_{\mu\nu} + \nabla_\nu F^{ij}{}_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F^{ij}{}_{\nu\lambda} = 0\,,\\
&\nabla_\mu F^s{}_{\lambda\nu} + \nabla_\nu F^s{}_{\mu\lambda} + \nabla_\lambda F^s{}_{\nu\mu} = F^s{}_{\mu\lambda\nu} + F^s{}_{\nu\mu\lambda} + F^s{}_{\lambda\nu\mu}\,.
\end{aligned}
$$

Slobodan lagranžijan mora biti invarijantna funkcija Lorencove i translacione jačine polja, tako da je ukupni lagranžijan materije i gradijentnih polja oblika

$$
\widetilde{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}_G(F^{ij}{}_{kl}, F^i{}_{kl}) + b\mathcal{L}_M(\phi, \nabla_k\phi)\,. \tag{3.15}
$$

1.2 Zakoni održanja

U teoriji sa lokalnom unutrašnjom grupom simetrije uslov invarijantnosti lagranžijana vodi, posle korišćenja jednačina kretanja, do kovarijantnog uopštenja zakona održanja. Isto se dogadja, kao što ćemo videti, i u slučaju lokalne Poenkareove simetrije.

Označimo skup nezavisnih polja sa $Q_A = (\phi, b^k{}_\mu, A^{ij}{}_\mu)$. Uslov invarijantnosti (2.11) se može napisati u obliku

$$
\Delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta Q_A}\delta_0 Q_A + \partial_\mu J^\mu = 0\,, \qquad J^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{A,\mu}}\delta_0 Q_A + \mathcal{L}\xi^\mu\,,
$$

gde je varijacija polja $\delta_0 Q_A$ odredjena jednačinama (2.5), (3.7b) i relacijom

$$
\delta_0 b^k{}_\mu = \omega^k{}_s b^s{}_\mu - \xi^\lambda{}_{,\mu} b^k{}_\lambda - \xi^\lambda \partial_\lambda b^k{}_\mu\,, \tag{3.16}
$$

koja sledi iz (3.9). One članove u izrazu za $\Delta\mathcal{L}$ koji sadrže izvode parametara ω^{ij} i ξ^μ transformisaćemo tako da se ovi izvodi pojavljuju samo u obliku četvorodivergencije,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b^k{}_\mu}(-\xi^\nu_{,\mu} b^k{}_\nu) &= \xi^\nu\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b^k{}_\mu} b^k{}_\nu\right) - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b^k{}_\mu} b^k{}_\nu \xi^\nu\right),\\
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^{ij}{}_\mu}(-\omega^{ij}{}_{,\mu} - \xi^\nu_{,\mu} A^{ij}{}_\nu) &= \xi^\nu\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^{ij}{}_\mu} A^{ij}{}_\nu\right) + \omega^{ij}\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^{ij}{}_\mu}\right)\\
&\quad - \partial_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^{ij}{}_\mu}(\omega^{ij} + \xi^\nu A^{ij}{}_\nu)\right],
\end{aligned}
$$

posle čega se dobija

$$
\Delta\mathcal{L} = -\xi^\nu I_\nu + \tfrac{1}{2}\omega^{ij} I_{ij} + \partial_\mu \Lambda^\mu\,. \tag{3.17}
$$

Integraleći ovaj izraz po četvorodimenzionoj oblasti Ω unutar koje su ξ i ω proizvoljni, uz uslov da ξ, ω i njihovi izvodi iščezavaju na granici ove oblasti, dobija se

$$I_\nu = 0\,, \qquad I_{ij} = 0\,, \tag{3.18a}$$

pa zahtev $\Delta\mathcal{L} = 0$ prelazi u

$$\partial_\mu \Lambda^\mu = 0\,. \tag{3.18b}$$

Ovi identiteti kompletno odredjuju relacije izmedju raznih struja i odgovarajućih zakona održanja. U daljem izlaganju mi ćemo se ograničiti na slučaj kad je $\mathcal{L}$ lagranžijan materije.

Sada ćemo uvesti definicije *kanonskih* i *kovarijantnih* gustina tenzora energije–impulsa i spina za polje materije,

$$\widetilde{T}^\mu{}_\nu = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\nu} - \delta^\mu_\nu \widetilde{\mathcal{L}}_M\,, \qquad \widetilde{S}^\mu{}_{ij} = -\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \phi_{,\mu}} \Sigma_{ij}\phi\,, \tag{3.19}$$

$$\widetilde{T}'^\mu{}_\nu = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \nabla_\mu \phi} \nabla_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \widetilde{\mathcal{L}}_M\,, \qquad \widetilde{S}'^\mu{}_{ij} = -\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \nabla_\mu \phi} \Sigma_{ij}\phi\,, \tag{3.20}$$

kao i odgovarajuće *dinamičke* struje:

$$\tau^\mu{}_\nu = h_k{}^\mu \frac{\delta \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\delta h_k{}^\nu} = -\frac{\delta \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\delta b^k{}_\mu} b^k{}_\nu\,, \qquad \sigma^\mu{}_{ij} = -\frac{\delta \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\delta A^{ij}{}_\mu}\,. \tag{3.21}$$

Smatraćemo da su jednačine kretanja materije zadovoljene, $\delta\widetilde{\mathcal{L}}_M/\delta\phi = 0$. Izjednačavanjem koeficijenata uz izvode parametara u uslovu (3.18*b*) sa nulom dobija se jednakost dinamičkih i kovarijantnih struja:

$$\tau^\mu{}_\nu = \widetilde{T}'^\mu{}_\nu\,, \qquad \sigma^\mu{}_{ij} = \widetilde{S}'^\mu{}_{ij}\,. \tag{3.22}$$

Uslovi (3.18*a*) daju kovarijantno uopštenje zakona održanja TEI i ugaonog momenta:

$$\begin{aligned} b^k{}_\mu \nabla_\nu \tau^\nu{}_k &= \tau^\nu{}_k F^k{}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\sigma^\nu{}_{ij} F^{ij}{}_{\mu\nu}\,, \\ \nabla_\mu \sigma^\mu{}_{ij} &= \tau_{ij} - \tau_{ji}\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Na sličan način se može analizirati i ukupan lagranžijan teorije.

Jednačine kretanja za materiju, koje se dobijaju iz (3.15) variranjem po ϕ, imaju kovarijantan oblik:

$$\delta\phi: \qquad \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \nabla_\mu \phi} = 0\,. \tag{3.24a}$$

Da bismo napisali jednačine kretanja za kompenzujuća polja, pogodno je uvesti veličine

$$
\begin{aligned}
f^\mu{}_k &= -\frac{\bar\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G}{\partial b^k{}_\mu}\,, & \pi_k{}^{\mu\nu} &= \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G}{\partial b^k{}_{\mu,\nu}}\,, \\
f^\mu{}_{ij} &= -\frac{\bar\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G}{\partial A^{ij}{}_\mu}\,, & \pi_{ij}{}^{\mu\nu} &= \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G}{\partial A^{ij}{}_{\mu,\nu}}\,,
\end{aligned}
$$

gde $\bar\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G/\partial b^k{}_\mu$ označava parcijalni izvod veličine $\widetilde{\mathcal{L}}_G = b\mathcal{L}_G\big(F^i{}_{kl}, F^{ij}{}_{kl}\big)$ po eksplicitno prisutnoj varijabli $b^k{}_\mu$,

$$
\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G}{\partial b^k{}_\mu} = \frac{\bar\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G}{\partial b^k{}_\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G}{\partial F^i{}_{\lambda\rho}}\frac{\partial F^i{}_{\lambda\rho}}{\partial b^k{}_\mu}\,,
$$

i slično za $\bar\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G/\partial A^{kl}{}_\mu$. Posle toga se lako dobija

$$
\begin{aligned}
\delta b^k{}_\mu :&\qquad \nabla_\nu(\pi_k{}^{\mu\nu}) + f^\mu{}_k = -\tau^\mu{}_k\,, \\
\delta A^{ij}{}_\mu :&\qquad \nabla_\nu(\pi_{ij}{}^{\mu\nu}) + f^\mu{}_{ij} = -\sigma^\mu{}_{ij}\,.
\end{aligned}
\tag{3.24b}
$$

Podrazumeva se da ∇_ν deluje na veličine sa latinskim indeksima na uobičajen način.

PRIMER 2. Polazeći od Dirakovog lagranžijana iz primera 1 dobijaju se jednačine kretanja za $\bar\psi$,

$$
\delta\bar\psi : \qquad \big(i\gamma^k\nabla_k + i\gamma^k V_k - m\big)\,\psi = 0\,,
$$

gde je $2V_k = b^{-1}\partial_\mu(bh_k{}^\mu) + A_{ks}{}^s = b^{-1}\nabla_\mu(bh_k{}^\mu)$, i slično za ψ.
S druge strane, kanonske i kovarijantne struje imaju oblik

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}^\mu{}_\nu &= \tfrac{1}{2}ib\bar\psi\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\nu\psi - \delta^\mu_\nu\widetilde{\mathcal{L}}_D\,, & \widetilde{S}^\mu{}_{ij} &= \tfrac{1}{2}ibh^{k\mu}\varepsilon_{kijs}\bar\psi\gamma_5\gamma^s\psi\,, \\
\widetilde{T}'^\mu{}_\nu &= \tfrac{1}{2}ib\bar\psi\gamma^\mu\overleftrightarrow{\nabla}_\nu\psi - \delta^\mu_\nu\widetilde{\mathcal{L}}_D\,, & \widetilde{S}'^\mu{}_{ij} &= \widetilde{S}^\mu{}_{ij}\,,
\end{aligned}
$$

dok je $\tau^\mu{}_\nu = \widetilde{T}'^\mu{}_\nu$ i $\sigma^\mu{}_{ij} = \widetilde{S}'^\mu{}_{ij}$, u skladu sa očekivanjem.

1.3 Ekvivalentnost različitih pristupa

Ideja o lokalizaciji Poenkareove simetrije nastala je, i razvijena, u radovima Učijame i Kibla (Utiyama, 1956; Kibble, 1961). Učijama je uveo potencijale $A^{ij}{}_\mu$ lokalizujući Lorencove transformacije, dok su veličine $h_k{}^\mu$ bile unapred zadane funkcije. Kibl je pokazao da se $h_k{}^\mu$, kao i $A^{ij}{}_\mu$, mogu uvesti kao kompenzujuća polja pri lokalizaciji Poenkareove grupe, zbog čega otpada potreba za njihovim apriornim uvodjenjem.

Prethodno izlaganje se neznatno razlikuje od Kiblovog pristupa. Kod Kibla beskonačno male transformacije (2.4) indukuju totalnu promenu polja $\delta\phi = \frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\phi$, što je ekvivalentno jednačini (2.5). U procesu lokalizacije simetrije parametri totalne translacije $\xi^\mu(x)$ i Lorencovih rotacija $\omega^{ij}(x)$ se od početka smatraju za nezavisne veličine. Iz naše analize sledi da je ovako shvatanje korektno kad je reč o lokalnoj simetriji. Korišćenje varijacije forme $\delta_0\phi$ umesto totalne varijacije $\delta\phi$ bliže je duhu lokalnih teorija sa unutrašnjom simetrijom, pošto $\delta_0\phi$ realizuje reprezentaciju Poenkareove grupe u prostoru polja ϕ. Medjutim, transformacione osobine gradijentnih polja, kao i oblik kovarijantnog izvoda, nezavisne su od ovih detalja, pa su konačni rezultati isti.

Mi smo pretpostavili da se zakon transformacije polja ϕ ne menja posle lokalizacije simetrije. S druge strane, iz geometrijske interpretacije teorije sledi da posle lokalizacije ulogu generatora translacije $P_\mu = -\partial_\mu$ preuzima kovarijantni izvod $-\nabla_\mu$. Ako hoćemo da operacija promene forme polja zadrži isti geometrijski smisao i posle lokalizacije simetrije (rotacija za ω^{ij} i translacija za ε^μ), onda $\delta_0\phi$ treba promeniti u

$$\delta_0^*\phi = \left(\tfrac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij} - \xi^\nu\nabla_\nu\right)\phi \tag{3.25}$$

(Hehl, von der Heyde, Kerlick i Nester, 1976). Odavde se lako dobija relacija $\delta_0^*\phi = \delta_0\phi - \frac{1}{2}\xi^\nu A^{ij}{}_\nu\Sigma_{ij}\phi$, koja pokazuje da se $\delta_0^*\phi$ i $\delta_0\phi$ razlikuju za lokalnu Lorencovu rotaciju odredjenu parametrom $\Delta\omega^{ij} = -\xi^\nu A^{ij}{}_\nu$. Ako je teorija invarijantna u odnosu na lokalne Poenkareove transformacije, onda postoji i invarijantnost u odnosu na $\delta_0^*\phi$. Pošto je tačan i obratan argument, sledi ekvivalentnost ova dva prilaza.

Sve tri formulacije su, dakle, ekvivalentni postupci lokalizacije Poenkareove simetrije.

2. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA

Do sada nismo imali odredjenu geometrijsku interpretaciju novih polja $h_k{}^\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$. Takva interpretacija je i moguća, i korisna, i ona nas dovodi do novog razumevanja gravitacije.

2.1 Riman–Kartanov prostor U_4

U ovom odeljku ćemo izložiti osnovne karakteristike Riman–Kartanove geometrije, čime će se pripremiti i olakšati geometrijska interpretacija Poenkareove lokalno invarijantne teorije (Hehl, von der Heyde, Kerlick i Nester, 1976; Choquet–Bruhat, De Witt–Morette i Dillard–Bleick, 1977).

Diferencijabilna mnogostrukost. Za prostor–vreme se često kaže da je "četvorodimenzioni kontinuum", jer se svaki dogadjaj definiše sa četiri realna broja: (t, x, y, z). U STR skup svih dogadjaja $\{(t, x, y, z)\}$ ima strukturu Minkovskijevog prostora M_4. U OTR prostor–vreme se, na osnovu PE, može podeliti na "ravne deliće" u kojima važi STR, a ovi "delići" su "glatko zašiveni" jedan za drugi. Drugim rečima, prostor–vreme lokalno izgleda kao M_4, dok njegova globalna forma može biti potpuno različita.

Ova slika prostor–vremena može se uporediti sa krivom dvodimenzionom površi X_2 koja je "glatka", tako da se mali deo ove površi u okolini proizvoljne tačke može aproksimirati delom tangentne ravni u toj tački. Jasno je, s druge strane, da cela površ ne mora imati nikakve sličnosti sa dvodimenzionom ravni. Matematičko uopštenje "glatke" dvodimenzione površi vodi do pojma diferencijabilne mnogostrukosti.

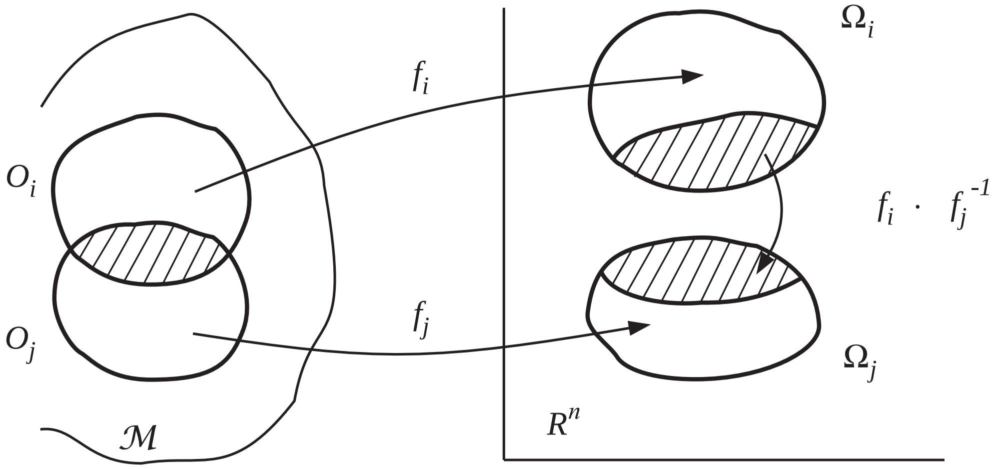
Razmotrćemo, najpre, pojam *topološkog prostora*, koji uopštava pojam okoline i dozvoljava definisanje neprekidnih funkcija. Zadati topološki prostor znači zadati skup tačaka X, i odrediti u njemu one podskupove koji će se smatrati otvorenim. Kolekcija otvorenih podskupova iz X naziva se topologija, i ona se odredjuje tako da sadrži prazan skup i ceo X, i da je zatvorena u odnosu na operacije proizvoljne unije i konačnog preseka.

PRIMER 3. Jednostavan primer topološkog prostora dobija se ako za skup X uzmemo realnu pravu $\mathcal{R}$, a otvorene skupove definišemo kao podskupove od $\mathcal{R}$ koji se mogu izraziti kao unije otvorenih intervala (a, b) i praznog skupa. Ako bi se u definiciji topologije dozvolio beskonačan presek, onda prethodna definicija otvorenih skupova u $\mathcal{R}$ ne bi bila dobra. Zaista, svaka tačka iz $\mathcal{R}$ je beskonačan presek otvorenih intervala: na primer, $a = \cap_{n=1}^{\infty}(a - 1/n, a + 1/n)$. S druge strane, tačka nije unija otvorenih intervala pa stoga nije otvoren skup. Ovaj primer predstavlja istorijski prototip topološkog prostora, i objašnjava upotrebu termina "otvoren skup" u slučaju apstraktnog topološkog prostora.

U topološki prostor se, koristeći otvorene skupove, na prirodan način mogu uvesti pojmovi okoline tačke i neprekidnog preslikavanja.

Topološki prostor ima strukturu *mnogostrukosti* ako okolina svake njegove tačke "liči" na neki otvoren skup iz euklidskog prostora, tj. ako je okolina O_i proizvoljne tačke iz X povezana sa nekom okolinom Ω_i euklidskog prostora $\mathcal{R}^n$ preslikavanjem φ_i, koje je uzajamno jednoznačno i uzajamno neprekidno. Ova veza definiše *lokalni koordinatni sistem*, jer je lik proizvoljne tačke P iz okoline $O_i \in X$ (koji se nalazi u $\mathcal{R}^n$) zadat skupom od n realnih brojeva $(x_i^\mu) \equiv (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n)$, koji predstavlja koordinate date tačke. Kolekcija svih lokalnih koordinatnih sistema se naziva prosto koordinatni sistem. Pošto mnogostrukost lokalno "izgleda" kao $\mathcal{R}^n$, broj n se uzima za dimenziju mnogostrukosti.

Ako se neka tačka iz X nalazi u preseku dve okoline O_i i O_j, onda je lik te tačke u $\mathcal{R}^n$ zadat u dva lokalna koordinatna sistema. Ova dva lokalna koordinatna sistema su *kompatibilna* ako je prelaz sa jednog na drugi, $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \ (x_i^\mu) \to (x_j^\mu)$, glatka funkcija (neprekidna i ima neprekidne izvode do nekog stepena). Mnogostrukost je *diferencijabilna* ako poseduje kompatibilne lokalne koordinatne sisteme (sl. 3.1).



Slika 3.1 Zamena kordinata na diferencijabilnoj mnogostrukosti

PRIMER 4. Dvodimenziona sfera $S_2 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ima strukturu diferencijabilne mnogostrukosti. To se može videti na sledeći način. Uvedimo na S_2 okolinu O_1 proizvoljne tačke P_1, i okolinu O_2 antipodne tačke P_2, pri čemu O_1 ne sadrži P_2 , O_2 ne sadrži P_1, i $O_1 \cup O_2 = S_2$. Tada se na sferu mogu uvesti dva lokalna koordinatna sistema $(\varphi_i, \Omega_i, i = 1, 2)$, gde je φ_1 stereografske projekcije okoline O_1 iz tačke P_1 na euklidsku ravan Ω_1 koja je tangentna ravan sfere u tački P_2, i slično za (φ_2, Ω_2).

Svako preslikavanje diferencijabilnih mnogostrukosti se može realizovati preko koordinata, pa se tako mogu uvesti pojmovi diferencijabilnosti i glatkosti preslikavanja.

Tangentni prostor. Diferencijabilna mnogostrukost liči na prazan prostor koji "čeka" da se u njemu nešto dogodi. No, da bi se nešto i dogodilo, potrebno je u mnogostrukost uvesti geometrijske objekte kojima se nešto može dogoditi. Važni objekti toga tipa su vektori i tenzori, koji se često u fizičkim teorijama sreću kao dinamičke varijable.

U ravnom prostoru vektor je odredjen kao "orijentisana duž", ili "strelica", izmedju dve tačke. Uobičajena pravila sabiranja i množenja skalarom zadovoljavaju definiciju vektorskog prostora. To je slučaj kako u euklidskom prostoru $\mathcal{R}^3$, tako i u Minkovskijevom prostoru M_4. U krivom prostoru, kakav je, naprimer, kriva dvodimenziona površ X_2, ova vektorska struktura se gubi. Ipak, posmatranjem "beskonačno malih pomeranja" oko date tačke P može se uvesti nova struktura vektorskog prostora, koja je odredjena skupom tangentnih vektora u P. U slučaju dvodimenzione površi X_2 uronjene u $\mathcal{R}^3$, tangentni vektor se intuitivno može predstaviti kao vektor koji leži u tangentnoj ravni. Ova slika se uopštava na n–dimenzionu mnogostrukost X ako zamislimo da je ona uronjena u neki višedimenzioni euklidski prostor. Tangentni vektor se može definisati i preko unutrašnje strukture diferencijabilne mnogostrukosti kao “izvod duž krive”. Skup tangentnih vektora u tački P definiše *tangentni prostor* T_P. Skup vektora tangentnih na koordinatne linije x^μ definiše koordinatnu bazu $\boldsymbol{e}_\mu$ u T_P. Komponente vektora $\boldsymbol{v}$ u koordinatnoj bazi se pri promeni koordinata transformišu po pravilu

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \,. \qquad (3.26a)$$

Vektori $\boldsymbol{v} = (v^\mu)$ se nazivaju kontravarijantni vektori.

Svakom tangentnom prostoru T_P se može pridružiti prostor T_P^* *dualnih*, ili kovarijantnih, vektora. Komponente kovarijantnog vektora $\boldsymbol{v}^*$ u (dualnoj) koordinatnoj bazi $\boldsymbol{\theta}^\mu$ se transformišu kao

$$v_\mu^{*\prime} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu^* \,. \qquad (3.26b)$$

Uobičajeno je izostaviti oznaku $*$ za dualne vektore pri korišćenju standardne indeksne notacije, u kojoj komponente vektora imaju indekse gore, a komponente dualnih vektora $-$ dole.

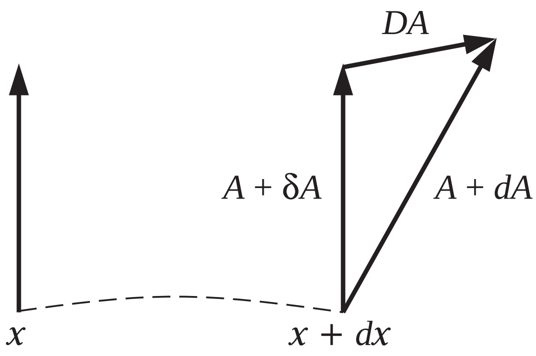
Tenzor tipa (k, l) ima u koordinatnoj bazi komponente koje se pri promeni koordinata transformišu isto kao proizvod od k kontravarijantnih i l kovarijantnih vektora. Tenzor t^μ tipa (1,0) je kontravarijantni vektor, dok je tenzor t_μ tipa (0,1) kovarijantni vektor.

Pojam koji je veoma značajan za fiziku je *vektorsko polje*: to je preslikavanje koje svakoj tački P iz X pridružuje jedan vektor iz T_P, $x \mapsto \boldsymbol{v}(x)$. Obično se vektorsko polje bira da bude diferencijabilna funkcija. Na sličan način se definiše tenzorsko polje.

Paralelni prenos. Pretpostavićemo da prostor–vreme ima strukturu diferencijabilne mnogostrukosti X_4. Sa geometrijske tačke gledišta diferencijabilna mnogostrukost je prilično elementarna struktura. U njoj se mogu zadati diferencijabilna preslikavanja (krive, površi), tenzori, kao i razne operacije s tenzorima (množenje skalarom, sabiranje, kontrakcija) koje se odnose na *istu* tačku mnogostrukosti. Pošto se u raznim tačkama tenzori transformišu na različite načine, njihove linearne kombinacije nisu tenzori. Tako diferencijal vektora A^μ, $dA^\mu(x) = A^\mu(x + dx) - A^\mu(x)$, nije vektor. Da bismo vektor u tački x uporedili sa vektorom u $x + dx$, potrebno je, najpre, $A^\mu(x)$ preneti odredjenim postupkom u tačku $x + dx$. Ovaj postupak uopštava pojam paralelnog prenosa u ravnom prostoru i nosi isti naziv. Paralelni prenos se definiše zadavanjem promene vektora δA^μ pri prenosu iz x u $x + dx$. Ova promena je data linearnim zakonom

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\lambda\rho} A^\lambda dx^\rho \,,$$

da bi se sačuvala linearnost vektorskog prostora. Skup od 64 koeficijenta $\Gamma^\mu_{\lambda\rho}$ definiše *linearnu povezanost* (koneksiju), čije zadavanje pretvara X_4 u



Slika 3.2 Uporedjivanje vektora u raznim tačkama diferencijabilne mnogostrukosti uz pomoć paralelnog prenosa

linearno povezan prostor $L_4 = (X_4, \Gamma)$. Razlika vektora $A + dA$ i $A + \delta A$ u tački $x + dx$ iznosi (sl. 3.2)

$$\begin{aligned} DA^\mu &= dA^\mu - \delta A^\mu \\ &= (\partial_\rho A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} A^\lambda) dx^\rho \equiv D_\rho(\Gamma) A^\mu dx^\rho \,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Veličina DA^μ se naziva *kovarijantni izvod* i predstavlja uopštenje pojma parcijalnog izvoda. Po konvenciji zadnji indeks u $\Gamma^\mu_{\lambda\rho}$ je indeks po kome se diferencira.

Pošto je $D_\rho(\Gamma)A^\mu$ vektor, lako se vidi iz njegovog zakona transformacije da $\Gamma^\mu_{\lambda\rho}$ nije tenzor. Medjutim, antisimetričan deo linearne koneksije

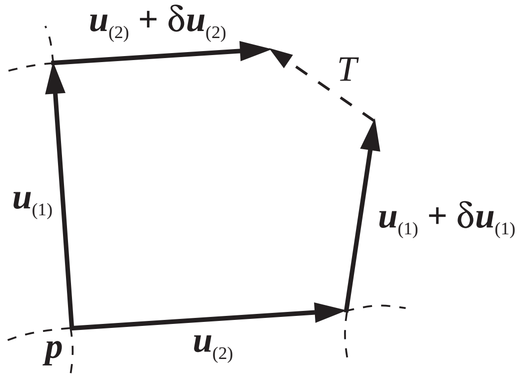
$$T^\mu{}_{\lambda\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \tag{3.28}$$

jeste tenzor i naziva se *torzija*. Da bismo razumeli geometrijski smisao torzije posmatrajmo u tački P beskonačno male vektore $\boldsymbol{u}_{(1)}$ i $\boldsymbol{u}_{(2)}$, tangentne na koordinatne linije $x^1(\lambda)$ i $x^2(\lambda)$, redom (sl. 3.3). Promena vektora $\boldsymbol{u}_{(1)}$, pri beskonačno malom paralelnom prenosu duž krive $x^2(\lambda)$, iznosi $\delta_2 u^\mu_{(1)} = -\Gamma^\mu_{\lambda 2} u^\lambda_{(1)} dx^2$. Na sličan način, promena vektora $\boldsymbol{u}_{(2)}$ pri paralelnom pomeranju duž krive $x^1(\lambda)$ iznosi $\delta_1 u^\mu_{(2)} = -\Gamma^\mu_{\lambda 1} u^\lambda_{(2)} dx^1$. Figura koju obrazuju vektori $\boldsymbol{u}_{(1)}, \boldsymbol{u}_{(2)}$, i njihovi likovi pri paralelnom prenosu, nije zatvoren četvorougao ako torzija nije nula:

$$\delta_1 u^\mu_{(2)} - \delta_2 u^\mu_{(1)} = -(\Gamma^\mu_{21} - \Gamma^\mu_{12}) dx^1 dx^2 = T^\mu{}_{21} dx^1 dx^2 \,.$$

Paralelni prenos kovarijantnog vektora A_μ definiše se na osnovu zahteva $\delta(A_\mu B^\mu) = 0$,

$$\delta A_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu dx^\lambda \,,$$

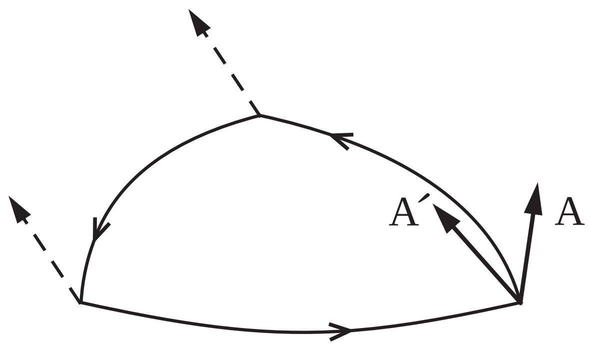


Slika 3.3 Torzija narušava pravilo paralelograma

odakle se dobija i odgovarajući kovarijantni izvod,

$$D_\rho(\Gamma)A_\mu = \partial_\rho A_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\rho}A_\nu \,. \tag{3.29}$$

Analogno se definišu paralelni prenos i kovarijantni izvod proizvoljnog tenzora višeg ranga, pri čemu operator D deluje po Lajbnicovom pravilu.



Slika 3.4 Paralelni prenos zavisi od putanje

Rezultat paralelnog prenosa vektora zavisi od putanje pomeranje (sl. 3.4). Zaista, paralelni prenos vektora A_ν duž beskonačno male zatvorene konture daje rezultat

$$\Delta A_\nu = \oint \Gamma^\mu_{\nu\rho}A_\mu dx^\rho = \tfrac{1}{2}R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}A_\mu\Delta\sigma^{\lambda\rho} \,,$$

gde je $\Delta\sigma^{\lambda\rho}$ elemenat površi obuhvaćene konturom, a $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ je *Rimanov tenzor krivine*,

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \,. \tag{3.30}$$

Tenzori krivine i torzije u L_4 zadovoljavaju odredjene algebarske identitete, kao i diferencijalne Bjankijeve identitete.

Metrika. U svakoj tački diferencijabilne mnogostrukosti X_4 može se definisati *metrički tenzor* $g_{\mu\nu}$ kao simetričan i nedegenerisan tenzor tipa $(0,2)$. On omogućava definisanje skalarnog proizvoda dva tangentna vektora $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu \,,$$

lokalno izračunavanje dužina krivih, uglova izmedju njih, itd. Tako je, npr., kvadrat rastojanja izmedju bliskih tačaka x i $x+dx$, koje leže na krivoj $C(\lambda)$, dat izrazom

$$ds^2 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}d\lambda,\boldsymbol{t}d\lambda) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \,,$$

gde je $\boldsymbol{t}$ tangentni vektor na $C(\lambda)$. Uz pomoć metričkog tenzora može se uspostaviti prirodan izomorfizam kontravarijantnih i kovarijantnih vektora, koji u komponentama ima oblik

$$u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu, \qquad u^\mu = g^{\mu\nu}u_\nu \,,$$

gde je $g^{\mu\nu}$ inverzan metrički tenzor.

Metrika i linearna koneksija su medjusobno nezavisni geometrijski objekti.

Uvodjenjem polja metrike i linearne koneksije diferencijabilna mnogostrukost X_4 postaje povezan metrički prostor $(L_4,g)=(X_4,\Gamma,g)$.

Da bi rastojanja i uglovi bili invarijantni u odnosu na paralelni prenos uvodi se *metrički postulat*:

$$-Q_{\mu\nu\lambda} \equiv D_\mu(\Gamma)g_{\nu\lambda} = \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} = 0\,. \tag{3.31}$$

Odavde sledi, korišćenjem još dve relacije koje se iz (3.31) dobijaju cikličnom permutacijom, da se koneksija može izraziti preko metrike i torzije:

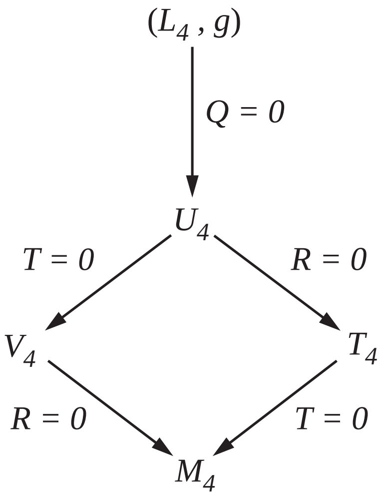
$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\lambda\nu} &= \left\{{\mu \atop \lambda\nu}\right\} + K^\mu{}_{\lambda\nu}\,, \\ \left\{{\mu \atop \lambda\nu}\right\} &\equiv \tfrac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\nu\rho,\lambda} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\lambda\nu,\rho})\,, \end{aligned} \tag{3.32}$$

gde je $\left\{{\mu \atop \lambda\nu}\right\}$ Kristofelov simbol, a $K^\mu{}_{\lambda\nu}$ tenzor kontorzije,

$$K^\mu{}_{\lambda\nu} = -\tfrac{1}{2}(T^\mu{}_{\lambda\nu} - T_\nu{}^\mu{}_\lambda + T_{\lambda\nu}{}^\mu)\,, \tag{3.33}$$

koji ima 24 nezavisne komponente.

Prostor (L_4,g), u koji je uveden metrički postulat (3.31), naziva se *Riman–Kartanov prostor* U_4. Ako je torzija jednaka nuli, dobija se *Rimanov*



Slika 3.5 Klasifikacija prostora koji zadovoljavaju uslov metričnosti

prostor V_4 opšte teorije relativnosti, a ako je tenzor krivine jednak nuli dobija se Vajcenbekov *prostor teleparalelizma* T_4 (u njemu paralelni prenos ne zavisi od puta). Najzad, ako je $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} = 0$, tada V_4 prelazi u Minkovskijev prostor M_4, a pri $T^{\mu}{}_{\lambda\rho} = 0$, prostor T_4 postaje M_4 (slika 3.5).

U prostoru U_4 se može definisati kriva $x(\lambda)$ čiji je tangentni vektor uvek paralelan sa samim sobom, i naziva se *autoparalela*. U njenu jednačinu

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \tag{3.34}$$

ulazi samo simetrični deo linearne koneksije, $\Gamma^{\mu}_{(\rho\nu)} = \left\{ {\mu \atop \rho\nu} \right\} - T_{(\rho\nu)}{}^{\mu}$.

Kriva ekstremne dužine, koja se dobija iz uslova $\delta\int ds = 0$, naziva se *ekstremala*. Njena jednačina je istog oblika kao u OTR,

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \left\{ {\mu \atop \rho\nu} \right\}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0\,. \tag{3.35}$$

U Rimanovom prostoru autoparalela se ne razlikuje od ekstremale, i naziva se geodezijska linija.

Primer 5. Na jediničnoj sferi S_2 metrika u sfernim koordinatama $(x^1, x^2) = (\theta, \varphi)$ zadata je kvadratnom formom

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\,.$$

U tački $(\varphi, \theta) = (0, \pi/4)$ zadat je vektor $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_{\theta}$, koji se paralelno pomera duž kruga $\varphi = 0$ do tačke $(0, \pi/2)$. Posle izračunavanja Kristofelovih simbola,

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \operatorname{ctg}\theta\,,$$

jednačina paralelnog prenosa duž θ–linije ($D_1 A^\mu = 0$) postaje

$$\frac{\partial A^1}{\partial \theta} = 0\,, \qquad \frac{\partial A^2}{\partial \theta} + \operatorname{ctg}\theta A^2 = 0\,.$$

Rešavanjem ovih jednačina dobija se $A^1 = C_1$, $A^2 = C_2/\sin\theta$. Iz uslova da je $(A^1, A^2) = (1,0)$ u početnoj tački dobija se $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, tako da je i posle paralelnog prenosa $(A^1, A^2) = (1,0)$, što se moglo i očekivati na osnovu direktne geometrijske slike.

Spinska koneksija. Tangentni prostor T_P diferencijabilne mnogostrukosti predstavlja mnogostrukost u okolini tačke P. U X_4 se T_P može definisati bazom od četiri linearno nezavisna tangentna vektora. Izbor baze nije jednoznačan. *Koordinatna baza* (K–baza) je odredjena skupom od četiri vektora $\boldsymbol{e}_\mu(x)$ tangentnih na koordinatne linije lokalnog koordinatnog sistema. Zahvaljujući specifičnoj strukturi prostora U_4 u njemu se može uvesti i *lokalna Lorencova baza* (L–baza) odredjena vektorima $\boldsymbol{e}_i(x)$, koja se naziva tetrada. Ovu bazu karakteriše postojanje metričkog tenzora $\boldsymbol{\eta}$, takvog da je

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \eta_{ij}\,.$$

Mogućnost uvodjenja ove baze potiče od principa ekvivalencije, kao što ćemo videti u narednom odeljku. Svaki tangentni vektor $\boldsymbol{u}$ se može izraziti u obe baze:

$$\boldsymbol{u} = u^\mu \boldsymbol{e}_\mu = u^i \boldsymbol{e}_i\,.$$

Specijalno, K– i L–baza se mogu izraziti jedna pomoću druge,

$$\boldsymbol{e}_\mu = e^i{}_\mu \boldsymbol{e}_i\,, \qquad \boldsymbol{e}_i = e_i{}^\mu \boldsymbol{e}_\mu\,. \tag{3.36}$$

Skalarni proizvod dva tangentna vektora definiše se pomoću metričkog tenzora (u K–bazi pomoću $g_{\mu\nu}$, u L–bazi pomoću η_{ij}):

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = \eta_{ij} u^i v^j\,.$$

Koristeći ovu definiciju i razlaganje (3.36) dobijaju se relacije

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = g_{\mu\nu} e_i{}^\mu e_j{}^\nu\,, \\ g_{\mu\nu} &= \boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu = \eta_{ij} e^i{}_\mu e^j{}_\nu\,. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Veza izmedju K– i L–baze implicira vezu izmedju koordinatnih i tetradnih komponenti proizvoljnog tangentnog vektora $\boldsymbol{u}$,

$$u^i = e^i{}_\mu u^\mu\,, \qquad u^\mu = e_i{}^\mu u^i\,. \tag{3.38}$$

Koristeći ovu vezu uz L–bazu se može uvesti lokalni Lorencov koordinatni sistem. On je odredjen relacijom $dx^i = e^i{}_\mu dx^\mu$, i u njemu je interval ds^2 zadan preko η_{ij},

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ij} dx^i dx^j \,.$$

Postojanje L–baze je veoma značajno. Ona omogućava da se u U_4 teoriju uvedu konačni spinori, koji su definisani ponašanjem u odnosu na Lorencove transformacije.

Ako želimo da uporedimo vektore $u^i(x)$ i $u^i(x+dx)$, zadate u tačkama x i $x+dx$, u odnosu na L–baze $\boldsymbol{e}_i(x)$ i $\boldsymbol{e}_i(x+dx)$, redom, moramo zadati pravilo paralelnog prenosa tetradnih komponenti vektora:

$$\delta u^i = -\omega^i{}_{j\mu} u^j dx^\mu \,, \tag{3.39a}$$

gde je $\omega^{ij}{}_\mu$ takozvana *spinska koneksija*, koja ima 64 komponente. Paralelni prenos vektora v_i se odredjuje iz zahteva $\delta(u^i v_i) = 0$,

$$\delta v_i = \omega^j{}_{i\mu} v_j dx^\mu \,. \tag{3.39b}$$

Postojanje lokalne Lorencove simetrije implicira postojanje metrike η_{ij} koja je ista u svakoj tački x. Tenzor η_{ij} se, dakle, ne menja pri paralelnom prenosu,

$$\delta\eta_{ij} = (\omega^s{}_{i\mu}\eta_{sj} + \omega^s{}_{j\mu}\eta_{si}) dx^\mu = 0 \,, \tag{3.40a}$$

što označava *antisimetričnost* koneksije,

$$\omega^{ij}{}_\mu + \omega^{ji}{}_\mu = 0 \,. \tag{3.40b}$$

Koristeći pravilo paralelnog prenosa (3.39), mogu se definisati odgovarajući ω–kovarijantni izvodi vektora u^i i v_i :

$$\begin{aligned} Du^i &= (\partial_\mu u^i + \omega^i{}_{s\mu} u^s) dx^\mu \equiv D_\mu(\omega) u^i dx^\mu \,, \\ Dv_i &= (\partial_\mu v_i - \omega^s{}_{i\mu} v_s) dx^\mu \equiv D_\mu(\omega) v_i dx^\mu \,. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Pošto je Lorencov metrički tenzor η konstantan, uslov $\delta\eta = 0$ daje

$$D_\mu(\omega)\eta_{ij} = 0 \,. \tag{3.42}$$

Do sada nismo uspostavili nikakvu vezu izmedju spinske koneksije i Γ. Prirodno je zahtevati da tetradne komponente vektora $u^\mu(x)$, posle paralelnog prenosa u tačku $x+dx$, budu jednake vektoru $u^i + \delta u^i$,

$$u^i + \delta u^i = e^i{}_\mu(x+dx)(u^\mu + \delta u^\mu) \,,$$

jer je operacija paralelnog prenosa jedinstven geometrijski postupak koji ne sme zavisiti od izbora koordinatnog sistema. Drugim rečima, ω i Γ

predstavljaju jedan te isti geometrijski objekat u dva koordinatna sistema. Odavde se dobija relacija

$$D_\mu(\omega+\Gamma)e^i{}_\nu \equiv \partial_\mu e^i{}_\nu + \omega^i{}_{s\mu}e^s{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}e^i{}_\lambda = 0\,, \tag{3.43}$$

koja povezuje koneksije ω i Γ. Operator $D_\mu(\omega+\Gamma)$ se može shvatiti kao totalni kovarijantni izvod. Koristeći osobinu (3.42) metričkog tenzora η_{ij} i relaciju (3.43) lako se dobija uslov metričnosti,

$$D_\mu(\Gamma)g_{\nu\lambda} = D_\mu(\omega+\Gamma)g_{\nu\lambda} = D_\mu(\omega+\Gamma)(\eta_{ij}e^i{}_\nu e^j{}_\lambda) = 0\,.$$

ω–kovarijantni izvod (3.41) se može uopštiti na slučaj veličine ϕ koja pripada proizvoljnoj reprezentaciji Lorencove grupe,

$$D_\mu(\omega)\phi = (\partial_\mu + \omega_\mu)\phi\,, \qquad \omega_\mu \equiv \tfrac{1}{2}\omega^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij}\,. \tag{3.44}$$

Antisimetričnost $\omega^{ij}{}_\mu$ je ovde jasno povezana sa antisimetričnošću generatora Σ_{ij}. Ako bismo se odrekli antisimetričnosti generatora, pa, prema tome, i antisimetričnosti spinske koneksije, uslov metričnosti ne bi bio ispunjen i geometrija ne bi bila tipa U_4, već opštija.

Interesantno je uočiti neke posledice relacije (3.43). Ako se iz nje nadje $\Gamma = \Gamma(\omega)$ i zameni u izraz za tenzor krivine, dobija se

$$\begin{aligned} &R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}(\Gamma) = e_i{}^\mu e_{j\nu}R^{ij}{}_{\lambda\rho}(\omega)\,,\\ &R^{ij}{}_{\lambda\rho}(\omega) \equiv \partial_\lambda\omega^{ij}{}_\rho - \partial_\rho\omega^{ij}{}_\lambda + \omega^i{}_{s\lambda}\omega^{sj}{}_\rho - \omega^i{}_{s\rho}\omega^{sj}{}_\lambda\,. \end{aligned} \tag{3.45}$$

S druge strane, posle antisimetrizacije jednačine (3.43) po μ i ν,

$$\begin{aligned} &c^i{}_{\mu\nu} + \omega^i{}_{s\mu}e^s{}_\nu - \omega^i{}_{s\nu}e^s{}_\mu = T^\lambda{}_{\mu\nu}e^i{}_\lambda\,,\\ &c^i{}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu e^i{}_\nu - \partial_\nu e^i{}_\mu\,, \end{aligned}$$

rešavanje po ω daje

$$\begin{aligned} &\omega_{ij\mu} = \Delta_{ij\mu} + K_{ij\mu}\,,\\ &\Delta_{ij\mu} \equiv \tfrac{1}{2}(c_{ijm} - c_{mij} + c_{jmi})e^m{}_\mu\,, \end{aligned} \tag{3.46}$$

gde je Δ tzv. Ričijev koeficijent rotacije, a K kontorzija.

2.2 Geometrijska struktura lokalne Poenkareove teorije

Krajnji rezultat analize Poenkareove lokalno invarijantne teorije je bila konstrukcija invarijantnog lagranžijana (3.15). Ona je postignuta uvodjenjem u teoriju novih polja ${h_i}^\mu$ (ili ${b^k}_\nu$) i ${A^{ij}}_\mu$, uz pomoć kojih je konstruisan kovarijantni izvod $\nabla_k = {h_k}^\nu \nabla_\nu$ i jačine polja ${F^{ij}}_{\mu\nu}$ i ${F^i}_{\mu\nu}$. Ova teorija se, u principu, može shvatiti kao teorija polja u Minkovskijevom prostoru. No, geometrijske analogije su tako jake da bi bilo neprirodno ignorisati ih.

Gradijentno polje ${A^{ij}}_\mu$ se može direktno identifikovati sa spinskom koneksijom ${\omega^{ij}}_\mu$. To je jasno iz oblika kovarijantnih izvoda ∇_μ i D_μ u jednačinama (3.5) i (3.44). Veličine ${h_k}^\mu$ i ${b^k}_\mu$ se mogu identifikovati sa tetradama na osnovu zakona transformacije (3.9) i (3.16), koji osiguravaju mogućnost pretvaranja lokalnih Lorencovih indeksa u svetske, i obratno.

Lokalna Lorencova simetrija Poenkareove gradijentne teorije osigurava važenje uslova (3.42), pa prema tome i uslova metričnosti (3.31). Tako postaje jasno da

lokalna Poenkareova teorija ima strukturu U_4 geometrije.

Time je formiran specifičan pristup teoriji gravitacije koji na ravnopravan način tretira masu i spin kao izvore gravitacionog polja.

Nije teško uočiti, poredeći relacije (3.45) sa (3.14), da translaciona jačina polja ${F^i}_{\mu\nu}$ nije ništa drugo nego torzija ${T^\lambda}_{\mu\nu}$, dok Lorencova jačina polja ${F^{ij}}_{\mu\nu}$ predstavlja tenzor krivine ${R^\lambda}_{\tau\mu\nu}$:

$$ {F^i}_{\mu\nu} = {e^i}_\lambda {T^\lambda}_{\mu\nu}\,, \qquad {F^{ij}}_{\mu\nu} = {e^i}_\lambda e^{j\tau} {R^\lambda}_{\tau\mu\nu}\,. $$

2.3 Princip ekvivalencije u U_4 teoriji

Princip ekvivalencije predstavlja fizičku osnovu za razumevanje teorije gravitacije (von der Heyde, 1975; vidi takodje glavu I).

Princip ekvivalencije u OTR. U opštoj teoriji relativnosti PE se matematički realizuje preko minimalne interakcije gravitacije i materije. U prostoru M_4 postoji Dekartov koordinatni sistem y^μ, u odnosu na koji je polje materije opisano lagranžijanom $\mathcal{L}_M(\phi, \partial_k\phi)$. Pri prelazu na krivolinijske koordinate, $y^\mu \to x^\mu(y)$, $\mathcal{L}_M$ se transformiše po pravilu $\mathcal{L}_M \to \sqrt{-g}\,\mathcal{L}_M(\phi, D_k\phi)$, gde je $g_{\mu\nu}$ nova metrika, a $D_k\phi$ kovarijantni izvod:

$$ D_k\phi = {h_k}^\mu(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}{\Delta^{ij}}_\mu \Sigma_{ij})\phi\,. $$

Ako je ϕ, na primer, vektorsko polje, $\phi \to \phi^l$, prethodni izraz dobija poznatiji oblik:

$$ D_k\phi^l = {h_k}^\mu(\partial_\mu\phi^l + {\Delta^l}_{s\mu}\phi^s) = {h_k}^\mu {b^l}_\nu \big(\partial_\mu\phi^\nu + \left\{{}^{\,\nu}_{\lambda\mu}\right\}\phi^\lambda\big)\,. $$

Prema PE, efekat krivolinijskog (ubrzanog) koordinatnog sistema, izražen prisustvom koneksije, lokalno je ekvivalentan gravitacionom polju. Ekvivalentnost ne važi globalno, pa se prava gravitaciona polja ne mogu eliminisati globalno. Zato se u OTR poslednji korak u opisu gravitacije sastoji u zameni metrike $g_{\mu\nu}$ metrikom nekog Rimanovog prostora V_4.

S druge strane, gravitacija se u prostoru V_4 može lokalno eliminisati. Pokazaćemo, najpre, da se metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ u tački P može svesti na oblik η_{ij}. Pri transformacijama koordinata $x^\mu \to f^\mu(x)$, $g_{\mu\nu}$ se menja po zakonu

$$g'_{\mu\nu}(f) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial f^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial f^\nu} g_{\lambda\rho}(x)\,, \tag{3.47a}$$

U tački P matrica $L_\mu{}^\lambda = \partial x^\lambda/\partial f^\mu$ je konstantna, kao i vrednosti $g_{\lambda\rho}$, $g'_{\mu\nu}$, pa se prethodna relacija može prepisati u matričnom obliku:

$$G' = LGL^T\,. \tag{3.47b}$$

Iz teorije matrica je poznato da se svaka simetrična matrica transformacijom ovog tipa sa nesingularnom matricom L može svesti na dijagonalnu matricu opšte forme, tj. sa dijagonalnim elementima jednakim 1,0 ili -1 (Silvesterova kanonska forma). Matrica L nije jedinstvena, ali je skup dijagonalnih elemenata jedinstven i naziva se *signaturom* matrice G. Svake dve matrice G i G', koje imaju istu signaturu, povezane su transformacijom kongruencije (3.47b) sa nesingularnom matricom L. Pošto je metrički tenzor nesingularan, medju dijagonalnim elementima nema vrednosti 0. Ako je signatura metrike $(+1,-1,-1,-1)$, jasno je da se G može identifikovati sa η. Iz ovoga sledi da je signatura metrike direktno povezana sa oblikom lokalne simetrije teorije: lokalna Lorencova simetrija nije logički nužna u teoriji gravitacije $-$ ona se nameće na osnovu eksperimentalnih činjenica.

Opisani izbor koordinatnog sistema, kojim se metrika u tački P svodi na η, ne znači eliminaciju gravitacionog polja u beskonačno maloj okolini te tačke. Za to je potrebno da se i koneksija svede na nulu u P. Izaberimo tačku P za koordinatni početak ($x=0$) i definišimo u njenoj okolini koordinatnu transformaciju

$$\begin{aligned} & y^\mu = x^\mu + \tfrac{1}{2}G^\mu_{\lambda\nu}x^\lambda x^\nu\,, \qquad G^\mu_{\lambda\nu} = G^\mu_{\nu\lambda}\,, \\ & \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\bigg|_{x=0} = \delta^\mu_\nu\,. \end{aligned}$$

Pri tome se koneksija Γ transformiše po pravilu

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^\tau}{\partial y^\lambda}\Gamma^\rho_{\sigma\tau} + \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\nu \partial y^\lambda}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\tau} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - G^\mu_{\nu\lambda}\,. \tag{3.48}$$

U prostoru V_4 koneksija je simetrična, pa izbor $G^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ osigurava da svi Γ' postanu jednaki nuli u P.

Posmatrana transformacija ne menja vrednost nijednog tenzora u datoj tački, pa se izbor $\Gamma' = 0$ može ostvariti istovremeno sa svodjenjem metrike na dijagonalan oblik. Time se lokalno eliminiše svaki efekat gravitacije, u skladu sa PE.

Princip ekvivalencije i torzija. Analiza izraza $D_k\phi$ u V_4 pokazuje da odgovarajuće uvodjenje gravitacije ima izvesne karakteristike koje ne slede nužno iz PE. Naime, oblik spinske koneksije Δ pokazuje da je relativna orijentacija tetrada $\boldsymbol{e}_i(x)$ i $\boldsymbol{e}_i(x+dx)$ potpuno definisana izborom koordinatnog sistema. Pošto promena relativne orijentacije označava jednu dodatnu Lorencovu transformaciju, to ona ne uzrokuje nikakve gravitacione efekte, pa je, sa gledišta PE, potpuno dozvoljena. Drugim rečima, lokalno inercijalni referentni sistem je odredjen samo do na lokalnu Lorencovu transformaciju. Ako hoćemo da ovu slobodu iskoristimo, onda spinska koneksija treba da sadrži deo nezavisan od metrike, koji će realizovati nezavisnu rotaciju tetrada pri paralelnom prenosu,

$$\omega^{ij}{}_{\mu} \equiv \Delta^{ij}{}_{\mu} + K^{ij}{}_{\mu} \,. \tag{3.49}$$

Na taj način se gravitaciona interakcija, preko PE, opisuje ne Rimanovom već U_4 geometrijom. Prostor–vreme ima torziju ako zahtevamo da svi lokalno inercijalni sistemi u datoj tački budu ravnopravni.

Pokazaćemo sada da prostor U_4 ima lokalno strukturu M_4, u skladu sa PE. Argumenti koji pokazuju da se metrika može svesti u nekoj tački na oblik η isti su kao i u Rimanovom prostoru V_4. Sa koneksijom stvar stoji nešto drugačije. Jednačina (3.48) pokazuje da se koordinatnim transformacijama može postići da samo simetričan deo od Γ postane jednak nuli. Ova činjenica navodi na pomisao da U_4 geometrija nije kompatibilna sa PE. Medjutim, ako se setimo da geometrijski smisao torzije nije vezan za opšte koordinatne transformacije, već za nezavisnu Lorencovu rotaciju tetrada pri paralelnom prenosu, onda je jasno da mogućnost iščezavanja torzije treba tražiti u podešavanju medjusobne orijentacije bliskih tetrada.

Izvršimo najpre koordinatnu transformaciju $dx^{\mu} \to dx^i = e^i{}_{\mu} dx^{\mu}$, kojom se lokalno prelazi na inercijalne koordinate L–baze. Pri ovim transformacijama metrika i koneksija prelaze u izraze

$$\begin{aligned}
g'_{ij} &= e_i{}^{\mu} e_j{}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{ij} \,, \\
\Gamma'^{i}_{jk} &= e^i{}_{\mu} e_j{}^{\nu} e_k{}^{\lambda} (\Delta^{\mu}{}_{\nu\lambda} + K^{\mu}{}_{\nu\lambda}) \equiv e_k{}^{\lambda} \omega^i{}_{j\lambda} \,.
\end{aligned}$$

Diferenciranje prve relacije daje $10 \cdot 4 = 40$ uslova na veličine $\partial_{\mu} e_k{}^{\nu}$ (kojih ima 64). Ostala 24 izvoda $\partial_{\mu} e_k{}^{\nu}$ se mogu odrediti proizvoljno, što ne utiče na vrednost metrike u posmatranoj tački. Izabraćemo ih tako da bude zadovoljen uslov

$$c^i{}_{\lambda\nu} = T^i{}_{\lambda\nu} \,,$$

(koji fiksira relativnu orijentaciju bliskih tetrada), posle čega se dobija $\omega^{ij}{}_\lambda(P) = 0$.

Torzija, dakle, ne narušava PE.

Prostor U_4 ima lokalno strukturu M_4: $\omega(P) = 0$, $g(P) = \eta$. Potpuna realizacija PE zahteva, kao što smo videli, uvodjenje U_4 geometrije u kojoj se pored metrike pojavljuje i koneksija kao nezavisan objekat teorije. Opštije geometrije u kojima nije ispunjen uslov metričnosti narušavaju PE, jer u njima lokalno, u okolini proizvoljne tačke P, simetrija nije opisana Poenkareovom grupom. One zadovoljavaju generalisani PE, u kome je Poenkareova simetrija zakona ponašanja materije zamenjena nekom drugom simetrijom, koja ne čuva dužine vektora.

3. DINAMIKA GRAVITACIONOG POLJA

Dinamika gravitacionog sektora odredjena je izborom lagranžijana slobodnog gravitacionog polja $\mathcal{L}_G$. Ako zahtevamo da jednačine kretanja budu najviše drugog reda po izvodima polja, $\mathcal{L}_G$ može biti najviše kvadratičan po torziji i krivini (Hajashi i Shirafuji, 1980–I).

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_G =& b(-aR + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_R + \lambda)\,, \\
\mathcal{L}_T \equiv& AT_{ijk}T^{ijk} + BT_{ijk}T^{jik} + CT^k{}_{ki}T_s{}^{si}\,, \\
\mathcal{L}_R \equiv& b_1 R_{ijkl}R^{ijkl} + b_2 R_{ijkl}R^{klij} + b_3 R_{ij}R^{ij} \\
&+ b_4 R_{ij}R^{ji} + b_5 R^2 + b_6(\varepsilon_{ijkl}R^{ijkl})^2\,,
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

gde su a, A, B, C, b_i konstantni parametri, a λ je kosmološka konstanta (zahtev parnosti eliminiše pseudoskalarne članove). Veliki broj konstanti otvara puno mogućnosti za izbor $\mathcal{L}_G$. U narednom izlaganju neke od ovih mogućnosti biće delimično rasvetljene.

3.1 Ajnštajn–Kartanova teorija

Za razliku od Jang–Milsove teorije, u teoriji lokalne Poenkareove grupe može se konstruisati i linearna invarijanta $R = h_i{}^\mu h_j{}^\nu R^{ij}{}_{\mu\nu}$. Izbor dejstva

$$
I_{AK} = \int d^4x b(-aR + \mathcal{L}_M) \equiv \int d^4x b\mathcal{L}_{AK}
\tag{3.51}
$$

definiše tzv. Ajnštajn–Kartanovu (AK) teoriju koja predstavlja neposredno uopštenje OTR (Kibble, 1961).

Jednačine kretanja za materiju se mogu napisati u kovarijantnom vidu (3.24a). Jednačine kretanja za tetrade se dobijaju jednostavno, jer $\mathcal{L}_{AK}$ ne zavisi od izvoda tetrada,

$$b\left(R^{\mu}{}_{k} - \tfrac{1}{2}h_k{}^{\mu}R\right) = -\tau^{\mu}{}_{k}/2a\,, \tag{3.52}$$

gde je τ dinamički TEI. Formalno, obe jednačine su istog oblika kao Ajnštajnove jednačine, s tim što je ovde koneksija različita od Kristofelovog simbola, a τ_{ij} nije nužno simetričan. Najzad, jednačine kretanja za $A^{ij}{}_{\mu}$ su oblika

$$\begin{aligned}\nabla_{\nu}H^{\mu\nu}_{ij} &\equiv bh_m{}^{\mu}\left(T^{m}{}_{ij} + \delta^m_i T^s{}_{js} - \delta^m_j T^s{}_{js}\right) = \sigma^{\mu}{}_{ij}/2a\,,\\ H^{\mu\nu}_{ij} &\equiv b\left(h_i{}^{\mu}h_j{}^{\nu} - h_j{}^{\mu}h_i{}^{\nu}\right)\,,\end{aligned} \tag{3.53}$$

gde je T torzija a σ dinamički tenzor spina. Tako masa i spin imaju ravnopravnu ulogu kao izvori gravitacionog polja.

Jednačine (3.53) se mogu formalno rešiti po torziji

$$2abT_{ijk} = \sigma_{ijk} + \tfrac{1}{2}\eta_{ij}\sigma^{m}{}_{km} - \tfrac{1}{2}\eta_{ik}\sigma^{m}{}_{jm}\,, \tag{3.54}$$

a zatim i po spinskoj koneksiji, $A_{ijk} = \Delta_{ijk} + K_{ijk}$.

U slučaju skalarne materije $\sigma_{ijk} = 0$ i torzija iščezava, pa se AK teorija svodi na OTR. Ukoliko je $\mathcal{L}_M$ *linearan* po izvodima polja σ_{ijk} ne zavisi od A_{ijk}, i (3.54) daje eksplicitno rešenje za koneksiju kao funkciju drugih varijabli. Spinska koneksija, dakle, nije dinamički nezavisan stepen slobode, ne propagira. Imajući u vidu jednostavnost izlaganja pretpostavićemo da je uslov linearnosti ispunjen (ta pretpostavka obuhvata važan slučaj Dirakovog polja).

Zakoni održanja. Interesantno je uočiti, po analogiji sa lokalnom neabelovom teorijom, da se jednačina kretanja (3.53) može prepisati u obliku

$$\begin{aligned}\partial_{\nu}H^{\mu\nu}_{ij} - f^{\mu}{}_{ij}/2a &= \sigma^{\mu}{}_{ij}/2a\,,\\ f^{\mu}{}_{ij}/2a &\equiv A^{s}{}_{i\nu}H^{\mu\nu}_{js} + A^{s}{}_{j\nu}H^{\mu\nu}_{si}\,,\end{aligned}$$

iz koga sledi tačan (a ne kovarijantan) zakon održanja:

$$\partial_{\mu}(f^{\mu}{}_{ij} + \sigma^{\mu}{}_{ij}) = 0\,. \tag{3.55}$$

Pošto se $f^{\mu}{}_{ij}$ može izraziti u obliku $f^{\mu}{}_{ij} = -\partial\widetilde{\mathcal{L}}_G/\partial A^{ij}{}_{\mu}$, postaje jasno da je $f^{\mu}{}_{ij}$ gustina spina gravitacionog polja, i da prethodna jednačina opisuje tačan zakon održanja ukupnog spina.

Na sličan način se iz jednačine (3.52) može dobiti tačan zakon održanja energije–impulsa,

$$\partial_{\mu}(f^{\mu}{}_{k} + \tau^{\mu}{}_{k}) = 0\,, \tag{3.56}$$

gde veličina $f^{\mu}{}_{k}$ opisuje gustinu energije–impulsa gravitacionog polja. Ako bi se, po analogiji sa spinom, usvojila prirodna definicija $f^{\mu}{}_{k} = -\bar{\partial}\widetilde{\mathcal{L}}_G/\partial b^{k}{}_{\mu}$

[oznaka $\bar\partial$ je ista kao i u (3.24b)], tada bi zakon održanja (3.56) bio trivijalan, jer je $f^\mu{}_k + \tau^\mu{}_k = 0$. Pitanje korektne definicije održanih veličina u gravitaciji biće razmatrano u glavi VI.

Formalizam drugog reda. Zamena relacije (3.54) u preostale jednačine potpuno eliminiše A_{ijk} iz teorije, dajući tako efektivne AK jednačine bez polja A_{ijk}. Imajući u vidu da je dejstvo (3.51) dato u tzv. formalizmu prvog reda, iste efektivne jednačine se mogu dobiti iz dejstva u kome je izvršena eliminacija polja A_{ijk} uz pomoć jednačina kretanja (3.54). Koristeći identitete

$$
\begin{aligned}
&bR(A) = bR(\Delta) + b\big(\tfrac{1}{4}T_{ijk}T^{ijk} + \tfrac{1}{2}T_{ijk}T^{jik} - T^i{}_{ki}T_j{}^{kj}\big) - 2\partial_\nu(bK^{i\nu}{}_i)\,,\\
&\widetilde{\mathcal{L}}_M(\Delta + K) = \widetilde{\mathcal{L}}_M(\Delta) - \tfrac{1}{2}\sigma^\mu{}_{ij}K^{ij}{}_\mu\,,
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

neposrednim računom se dobija odgovarajući lagranžijan drugog reda:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{L}}^{(2)}_{AK} = -abR(\Delta) + \widetilde{\mathcal{L}}_M(\Delta) + \widetilde{\mathcal{L}}'\,,\\
&\widetilde{\mathcal{L}}' = \frac{b}{8a}(S_{ijk}S^{ijk} + 2S_{ijk}S^{jki} - 2S^i{}_{ji}S_k{}^{jk})\,,
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

gde smo uveli smenu $\sigma_{ijk} = bS_{ijk}$. Ovaj izraz se razlikuje od lagranžijana u OTR prisustvom dodatnog člana $\widetilde{\mathcal{L}}'$, koji predstavlja "kontaktnu" spin–spin interakciju. U slučaju Dirakovog polja ova interakcija je četvrtog stepena po polju materije, i podseća na Fermijevu slabu interakciju. Pošto je $\widetilde{\mathcal{L}}'$ proporcionalan gravitacionoj konstanti $G = c^3/16\pi a$, on je mnogo manji od ostalih članova, pa je, sa praktičnog stanovišta, AK teorija ekvivalentna sa OTR.

Uopšteni Belinfanteov tenzor. Posle eliminacije polja $A^{ij}{}_\mu$ iz dejstva, u jednačinama se pojavljuje efektivni dinamički TEI

$$
\overset{E}{\tau}{}^\mu{}_k \equiv -\frac{\delta}{\delta b^k{}_\mu}\widetilde{\mathcal{L}}_M(\Delta)\,. \tag{3.59a}
$$

Ovaj tenzor se naziva Ajnštajnovim TEI, jer se upravo on pojavljuje u Ajnštajnovim jednačinama polja u OTR. Kako je dinamički tenzor $\tau^\mu{}_k$ prešao u Ajnštajnov? Uzimajući u obzir da $\widetilde{\mathcal{L}}_M(\Delta)$ zavisi od $b^k{}_\mu$ i preko Δ, direktno se dobija

$$
\begin{aligned}
\overset{E}{\tau}{}^\mu{}_k &= -\frac{\delta}{\delta b^k{}_\mu}\widetilde{\mathcal{L}}_M(A)\Big|_{A=\Delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\Delta^{ij}{}_\nu}{\delta b^k{}_\mu}\right)\frac{\delta}{\delta A^{ij}{}_\nu}\widetilde{\mathcal{L}}_M(A)\Big|_{A=\Delta}\\
&= \tau^\mu{}_k(\Delta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\Delta^{ij}{}_\nu}{\delta b^k{}_\mu}\right)\sigma^\nu{}_{ij}(\Delta)\,.
\end{aligned}
$$

Da bismo izračunali ovaj izraz, zapazićemo da variranje relacije $A = \Delta + K$ po $b^k{}_\mu$, uz uslov $T = 0$, daje

$$\begin{aligned}
&\delta\Delta^{ij}{}_\mu - \tfrac{1}{2}\Big(h^{j\lambda}\delta T^i{}_{\lambda\mu} - b^s{}_\mu h^{i\lambda}h^{j\rho}\delta T_{s\lambda\rho} + h^{i\rho}\delta T^j{}_{\mu\rho}\Big) = 0\,,\\
&\delta T^k{}_{\mu\lambda} = \nabla'_\mu(\delta b^k{}_\lambda) - \nabla'_\lambda(\delta b^k{}_\mu)\,.
\end{aligned}$$

Ovde je $\nabla'_\mu = \nabla_\mu(\Delta)$, jer je $A = \Delta$ pri $T = 0$. Kovarijantni izvod ∇'_μ deluje na latinski indeks od $\delta b^k{}_\mu$, ali se lako može proširiti u operator $\widetilde{\nabla}'_\mu \equiv \nabla_\mu(\Delta + \Gamma)$ koji deluje i na grčki indeks od $\delta b^k{}_\mu$, jer je

$$\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\delta b^k{}_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\delta b^k{}_\rho = 0 \qquad \text{pri} \quad T = 0\,.$$

Posle toga eksplicitno izračunavanje daje rezultat

$$\overset{E}{\tau}{}^\mu{}_k = \tau^\mu{}_k(\Delta) - \tfrac{1}{2}\widetilde{\nabla}'_\lambda(\sigma^\mu{}_k{}^\lambda + \sigma_k{}^{\mu\lambda} - \sigma^\lambda{}_k{}^\mu)\,, \tag{3.59b}$$

koji predstavlja kovarijantno uopštenu Belinfanteovu relaciju. Ovde je $\widetilde{\nabla}'_\lambda$ "totalni" kovarijantni izvod koji deluje na slobodne indekse (μ, k). Pošto ovaj izvod, delujući na $h_k{}^\mu$ ili $b^k{}_\mu$, daje nulu, lako se proverava da je $\overset{E}{\tau}{}_{mk}$ simetrična veličina. Prema tome, pri prelazu $A \to \Delta$ ulogu dinamičkog TEI preuzima simetričan Ajnštajnov tenzor $\overset{E}{\tau}{}^\mu{}_k$.

Prethodni rezultat se često koristi za dobijanje simetrizovanog TEI u ravnom prostoru, koristeći tzv. *Rozenfeldov postupak*:

a) najpre se lagranžijan $\mathcal{L}_M$ u M_4 pretvori u odgovarajući lagranžijan $\widetilde{\mathcal{L}}_M$ u Rimanovom prostoru koristeći minimalnu interakciju ($\mathcal{L}_M$ se množi sa b, $\partial_i \to h_i{}^\mu\nabla_\mu$);

b) zatim se definiše Ajnštajnov dinamički tenzor $\overset{E}{\tau}{}^\mu{}_k$;

c) na kraju, vraćanje na ravan prostor pretvara $\overset{E}{\tau}{}^\mu{}_k$ u Belinfanteov TEI u M_4.

3.2 Opšte karakteristike dinamike

Pre razmatranja opštih karakteristika dinamike korisno je upoznati se sa još nekim specijalnim modelima.

$\boldsymbol{R + T^2}$ **teorija.** Jedna od najprostijih generalizacija AK teorije ima oblik

$$I_1 = \int d^4x\, b(-aR + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_M)\,.$$

Ni ova teorija ne sadrži kinetički član za spinsku koneksiju, pa su odgovarajuće jednačine kretanja algebarske po A_{ijk}:

$$(2A - B)T_{[ij]k} - (B - a/2)T_{kij} + (C + a)\eta_{k[i}T^m{}_{j]m} = -\tfrac{1}{4}\sigma_{kji}\,.$$

Ove jednačine se rešavaju po T razlaganjem torzije na ireducibilne komponente u odnosu na Lorencovu grupu (Hayashi i Shirafuji, 1980–II). Posle toga se dobija

$$\begin{aligned}\mu_V T^V{}_i &= \sigma^V{}_i\,,\\ \mu_A T^A{}_i &= \sigma^A{}_i\,,\\ \mu_T T^T{}_{ijk} &= \sigma^T{}_{ijk}\,,\end{aligned}$$

gde indeksi V, A i T označavaju vektorsku, aksijalnu i tenzorsku ireducibilnu komponentu, redom, a μ_a su tzv. maseni parametri. Ako su svi $\mu_a \neq 0$ prethodna jednačina se može rešiti po T^a (dakle, i po koneksiji), pa se efektivna teorija razlikuje od OTR kontaktnom interakcijom σ^2 tipa. Ako je neko $\mu_a = 0$, odgovarajuća komponenta T^a se ne pojavljuje u jednačini, a σ^a mora biti jednako nuli zbog konzistentnosti. Ovaj slučaj u opštoj teoriji odgovara postojanju bezmasenih tordiona (čestice koje odgovaraju polju torzije).

Teorija teleparalelizma. Ova teorija se dobija iz opšte U_4 teorije nametanjem uslova apsolutnog paralelizma, $R^{ij}{}_{\mu\nu}(A) = 0$, koji pretvara U_4 u Vajcenbekov prostor T_4. U svakoj tački prostora T_4 postoji baza $\boldsymbol{b}^k$ koja zadovoljava uslov apsolutnog paralelizma:

$$D_\mu(\Gamma) b^k{}_\nu = \partial_\mu b^k{}_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\mu} b^k{}_\rho = 0\,.$$

Rešavanje ove jednačine daje nesimetričnu koneksiju

$$\Gamma^\nu_{\rho\mu} = h_k{}^\nu \partial_\mu b^k{}_\rho\,,$$

koja implicira postojanje torzije. Interesantno je uočiti da je teorija tipa T^2 sa praktičnog stanovišta ekvivalentna sa OTR. Zaista, koristeći prvi identitet u (3.57) i uslov $R(A) = 0$, lako se vidi da je T^2 teorija, uz izbor parametara

$$A = -\tfrac{1}{4}a\,, \qquad B = -\tfrac{1}{2}a\,, \qquad C = a\,,$$

ekvivalentna sa OTR (Hayashi i Shirafuji, 1979).

Model tipa $\boldsymbol{R}^2+\boldsymbol{T}^2$. U dinamičkom smislu AK (kao i $R+T^2$) teorija je nekompletna. U U_4 teoriji koneksija se uvodi kao nezavisan objekat, ali je dinamika AK teorije takva da se na kraju koneksija, ipak, izražava pomoću metrike, do na male algebarske popravke. Dinamički smisao koneksija dobija tek uključenjem R^2 članova, koji predstavljaju kinetički član za A_{ijk}. Na bazi nekih analogija sa elektrodinamikom predložen je sledeći model tipa $R^2 + T^2$ (von der Heyde, 1976):

$$I_3 = \int d^4x\, b\big[\alpha R_{ijkl}R^{ijkl} + \beta\big(-T_{ijk}T^{ijk} + 2T^{ik}{}_i T_{jk}{}^j\big)\big]\,.$$

Osnovno pitanje za modele bez linearne krivine R u dejstvu je pitanje makroskopskog limita teorije. Kao objašnjenje je predložen sledeći mehanizam (Hehl, Nitsch i von der Heyde, 1980). U klasičnoj teoriji polja makroskopska materija se opisuje skalarnim poljem. Ako, u ovom kontekstu, *izmenimo* proceduru lokalizacije simetrije i uvedemo samo translaciona gradijentna polja (skalarna materija ne interaguje direktno sa Lorencovom koneksijom), onda je $R_{ijkl}(A) = 0$ pa se I_3 svodi na T^2 dejstvo u T_4, sa $B = 0$. Analiza ove specijalne teorije paralelizma pokazuje da ona opisuje sve standardne gravitacione testove isto tako dobro kao i OTR. Ipak, ostaje utisak da ovo objašnjenje nije dovoljno ubedljivo; za ocenu prihvatljivosti ove teorije od velikog je značaja analiza klasičnih rešenja, na čemu je poslednjih godina dosta radjeno.

Interesantna osobina modela I_3, kao i svih modela bez linearnog člana u dejstvu, jeste da se u aproksimaciji slabog polja pored Njutnovog potencijala javlja i član koji linearno raste sa r. Ovaj član je interpretiran kao deo "jake gravitacije" koja je značajna za interakciju hadrona. Ideja je proširena na (L_4, g) teoriju (Šijački, 1982).

Opšta struktura teorije. Posle izlaganja ovih specijalnih modela preći ćemo na razmatranje nekih opštih karakteristika teorije (3.50) bez kosmološke konstante.

Osnovne dinamičke varijable u teoriji su ${b^k}_\mu$ i ${A^{ij}}_\mu$. Pošto se vremenski izvodi od ${b^k}_0$ i ${A^{ij}}_0$ ne pojavljuju u torziji i krivini, redom, njihov vremenski razvoj ostaje neodredjen. Preostalih varijabli ${b^k}_\alpha$ i ${A^{ij}}_\alpha$ ima ukupno $4{\cdot}3+6{\cdot}3 = 30$. Izborom 10 parametara lokalne Poenkareove simetrije može se nametnuti 10 uslova, posle čega se broj nezavisnih varijabli smanjuje na $30 - 10 = 20$. Dva stepena slobode odgovaraju *gravitonu*, a 18 stepeni slobode ${A^{ij}}_\alpha$ opisuju *tordione*. Razlaganjem ${A^{ij}}_\alpha$ na ireducibilne komponente rotacione grupe dobijaju se komponente odredjenog spina i parnosti,

$$J^P(A) = 2^\pm, 1^\pm, 0^\pm\,,$$

čiji je ukupan broj 2(5+3+1)=18.

Pošto skalarna krivina i T^2 sadrže članove tipa A^2, tordioni mogu imati mase različite od nule, i one su proporcionalne masenim parametrima μ_a. Naravno, tek prisustvo kinetičkih članova tipa R^2 u dejstvu omogućava da tordioni budu fizičke, propagirajuće čestice. Spektar linearizovane teorije je detaljno analiziran u slučaju kad su svi tordioni masivni (Hayashi i Shirafuji, 1980–IV; Sezgin i Nieuwenhuizen, 1980). Postoje i neke analize slučaja bezmasenih tordiona, ali nisu kompletne (Battiti i Toller, 1985).

Uradjena je opšta Hamiltonova analiza teorije (Blagojević i Nikolić, 1983; Nikolić, 1984). U slučaju masivnih tordiona uspostavljena je korespodencija izmedju čestičnog spektra i postojanja veza u teoriji. Nadjeno je da, kad god neki tordion ne propagira, u teoriji postoje veze koje se mogu iskoristiti da se odgovarajuće polje eliminiše. Zatim je analiza proširena i na slučaj bezmasenih tordiona, sa rezultatom da je postojanje bezmasenih tordiona vezano za pojavu ekstra simetrija. Hamiltonov metod je pogodan i za analizu energije, impulsa i ugaonog momenta izolovanog gravitacionog sistema, kao što ćemo videti u glavi VI.

Interesantno je pitanje opšte strukture jednačina kretanja sa gledišta mogućnosti njihovog rešavanja uz zadate početne uslove, tj. Košijev problem (Dimakis, 1989). Od četrdeset jednačina polja deset predstavlja veze na početne uslove, dok ostalih trideset odredjuje vremenski razvoj dinamičkih varijabli, ukoliko su zadovoljeni odredjeni uslovi na konstante teorije. Ovi uslovi su isti kao i oni koji odredjuju postojanje veza u Hamiltonovoj analizi.

Problem nalaženja egzaktnih rešenja nelinearnih jednačina kretanja je rešavan koristeći poznate metode iz neabelovih gradijentnih teorija. Suština metoda je tzv. modifikovani dvostruko dualni anzac, u kome se postulira linearna veza uopštenog momenta ${\pi_{ij}}^{\mu\nu}$ i dvostruko dualnog lika tenzora krivine. Ovaj anzac uprošćava opšte jednačine i omogućava eksplicitno nalaženje odredjene klase egzaktnih rešenja, čime se postiže mnogo dublji uvid u fizički sadržaj teorije (Mielke, 1987).

Mada je prethodna analiza bila usmerena na četvorodimenzioni prostor, mnogi rezultati se mogu uopštiti na slučaj $d > 4$ koji odgovara Kaluca–Klajnovom programu ujedinjenja interakcija, kao i na slučaj $d = 2$ koji se odnosi na teoriju struna.

Na kraju ovog izlaganja nameće se pitanje kako se na osnovu prethodnih razmatranja može izabrati prihvatljiva teorija gravitacije. Pošto je OTR fenomenološki prihvatljiva teorija, osnovni kriterijumi za prihvatljivost neke alternativne teorije su:

α) mogućnost kvantizacije,

β) izbegavanje klasičnog singulariteta i

γ) mogućnost ujedinjenja sa drugim interakcijama.

U opštoj U_4 teoriji članovi tipa R i T^2 sadrže dimenzione konstante, što nije privlačno sa aspekta izgradnje konzistentne kvantne teorije. S druge strane, članovi tipa R^2 sadrže samo bezdimenzione konstante, ali oni ne daju korektan klasičan limit. Sa aspekta razjašnjenja problema singulariteta u teoriji gravitacije interesantno je pomenuti mogućnost odbojne tordionske interakcije na malim rastojanjima, čime se može sprečiti kolaps. Analiza slučaja homogenog i izotropnog prostora pokazuje da se tako nešto može dogoditi uz odredjen izbor parametara. Iz analize jednačina kretanja sledi da tada gustina materije ne može postati beskonačna (Minkevič, 1980; Blagojević, Popović i Živanović, 1982), što predstavlja interesantan rezultat. S obzirom na to da je U_4 teorija zasnovana na principu lokalne invarijantnosti, ona izgleda pogodna za ujedinjenje sa drugim interakcijama.

Moguće je da neki problemi Poenkareove teorije mogu biti lakše rešeni zahtevom veće simetrije dejstva. Sa tog aspekta je zanimljivo razmatranje lokalne Vajlove teorije, što će biti predmet izlaganja u sledećoj glavi.

ZADACI

1. *a*) Izvesti zakon transformacije gradijentnog polja $A^{ij}{}_\mu$.
   b) Izvesti zakone transformacije gradijentnih polja $h_k{}^\mu$ i $b^k{}_\mu$.
2. a) Dokazati, koristeći uslov invarijantnosti $\delta_0\Lambda + \partial_\mu(\xi^\mu\Lambda) = 0$, da veličina $\Lambda = \Lambda(h, A, x)$ ne zavisi eksplicitno od x niti od $A^{ij}{}_\mu$.
   b) Dokazati da je $\Lambda = \det(b^k{}_\mu)$ rešenje prethodne jednačine.
3. *a*) Izvesti relaciju $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]b^s{}_\lambda = F^s{}_{\lambda\mu\nu}$.
   b) Koristeći Jakobijev identitet za ∇_μ pokazati da jačine polja zadovoljavaju Bjankijeve identitete date u tekstu.
4. Pokazati da jednačine kretanja polja materije ϕ imaju Poenkare–kovarijantan oblik (3.24*a*). Naći eksplicitan oblik ovih jednačina u slučaju slobodnog *a*) skalarnog i *b*) elektromagnetnog polja.
5. Izvesti jednačine kretanja za gradijentna polja $b^k{}_\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ u obliku (3.24*b*).
6. Polazeći od lagranžijana materije $\widetilde{\mathcal{L}}_M$ dokazati direktno jednakost kovarijantnih i dinamičkih struja energije–impulsa i spina. Rezultat proveriti na slučaju slobodnog *a*) skalarnog i *b*) elektromagnetnog polja.
7. Izvesti direktnim računom kovarijantna uopštenja zakona održanja *a*) ugaonog momenta i *b*) TEI, datih jednačinom (3.23), koristeći jednačine kretanja polja materije.
8. Uopštene zakone održanja uglovnog momenta i TEI proveriti na slučaju slobodnog *a*) skalarnog, *b*) Dirakovog i *c*) elektromagnetnog polja.
9. Koristeći definiciju δ_0^* varijacije pokazati da su odgovarajući zakoni transformacije gradijentnih polja dati relacijama

$$\delta_0^* b^k{}_\mu = \omega^k{}_s b^s{}_\mu - \nabla_\mu \xi^k + \xi^\lambda F^k{}_{\mu\lambda}\,,$$
$$\delta_0^* A^{ij}{}_\mu = -\nabla_\mu \omega^{ij} + \xi^\nu F^{ij}{}_{\mu\nu}\,.$$

10. *a*) Iz činjenice da je $D(\Gamma)A^\mu$ vektor, naći zakon transformacije afine koneksije $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$. Pokazati da je torzija $T^\mu{}_{\lambda\nu}$ tenzor.
    b) Izraziti afinu koneksiju preko Kristofelovog simbola i tenzora torzije, koristeći metrički postulat.
11. *a*) Dokazati relaciju $D_\mu(\omega)v^i = b^i{}_\nu D_\mu(\Gamma)v^\nu$.
    b) Pokazati da uslov metričnosti nije ispunjen ako spinska koneksija ima simetričan deo.
    c) Rešiti relaciju $D_\mu(\omega + \Gamma)e^i{}_\mu = 0$ po ω.
12. Kvadrat intervala u dvodimenzionom Rimanovom prostoru ima oblik $ds^2 = dv^2 - v^2 du^2$. Dokazati da je prostor ravan izračunavanjem tenzora krivine.
13. Metrika dvodimenzionog euklidskog prostora E_2 u polarnim koordinatama je odredjena kvadratom intervala $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$.
    a) Izračunati Kristofelove simbole;
    b) pokazati da svaka prava linija u E_2 zadovoljava geodezijsku jednačinu;
    c) Naći komponente vektora $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho$ zadatog u tački $(\rho, \theta) = (1, 0)$ posle paralelnog prenosa u $(1, \pi/2)$.
14. Neka je $H^{\mu\nu}_{ij} = b(h_i{}^\mu h_j{}^\nu - h_j{}^\mu h_i{}^\nu)$, a $\nabla'_\nu = \nabla_\nu(\Delta)$. Dokazati identitete:

$$\nabla_\nu H^{\mu\nu}_{ij} = b h_k{}^\mu \big(T^k{}_{ij} + \delta^k_i T^s{}_{js} - \delta^k_j T^s{}_{is}\big)\,;$$
$$R^{ij}{}_{\mu\nu}(A) = R^{ij}{}_{\mu\nu}(\Delta) - \big[\nabla'_\nu K^{ij}{}_\mu + K^i{}_{s\nu}K^{sj}{}_\mu - (\mu \leftrightarrow \nu)\big]\,.$$

15. Dokazati identitete (3.57).
16. Koristeći Rozenfeldov postupak naći TEI za slobodno *a*) Dirakovo i *b*) elektromagnetno polje.
17. Pokazati da je u Vajcenbekovom prostoru teorija tipa T^2, sa pogodno odabranim parametrima, ekvivalentna sa OTR.

GLAVA IV

LOKALNA VAJLOVA TEORIJA

Pri ispitivanju mogućnosti ujedinjenja gravitacije i ostalih osnovnih interakcija razmatrane su i teorije sa lokalnom simetrijom koja je različita od Poenkareove. Prvi ozbiljan pokušaj geometrijskog ujedinjenja elektrodinamike i gravitacije predstavlja Vajlova teorija, predložena pre skoro osamdeset godina (Weil, 1918). Geometrija Vajlove jedinstvene teorije predstavlja uopštenje Rimanove geometrije prostor–vremena u OTR. Vajl je uveo prostor u kome važi ne samo princip relativnosti izbora referentnog sistema, već i princip relativnosti izbora jedinice za dužinu.

U osnovi ove geometrije leži osobina simetrije u odnosu na lokalnu promenu *jedinice dužine*, koja se realizuje uz pomoć dodatnog kompenzujućeg polja. Vajl je pokušao da ovo polje interpretira kao elektromagnetni potencijal, ali je dalji razvoj teorije pokazao da to nije moguće. Razlog se nalazio u činjenici da se interakcije ovog polja opisuju nabojem koji ne razlikuje česticu od antičestice, što nije osobina elektromagnetne interakcije. Kasnije je ova ideja evoluirala u izmenjeni princip simetrije, koji se umesto na lokalnu izmenu dužine odnosi na lokalnu izmenu *faze* polja (Weil, 1931). Taj novi princip predstavlja osnovu današnjeg shvatanja lokalne unutrašnje simetrije u teoriji osnovnih interakcija.

Mada originalna Vajlova ideja nije bila pogodna za opis elektromagnetne interakcije, ona je u novije vreme ponovo oživela u teoriji elementarnih čestica. Sedamdesetih godina eksperimentalno je otkriveno da se u jako neelastičnim procesima rasejanja na visokim energijama mase čestica mogu praktično zanemariti. U tom graničnom slučaju teorija ne sadrži nikakav dimenzioni parametar i postaje invarijantna u odnosu na promenu masene (ili dužinske) skale. Lokalizacija ove simetrije vodi, kao što će se videti, do stare Vajlove teorije, koja se ovog puta ne odnosi na elektromagnetnu, već na gravitacionu interakciju (gde je, na osnovu principa ekvivalencije, interakcija čestice i antičestice jednaka).

Vajlova ideja se može realizovati na dva načina:

a) izgradnjom lokalno invarijantne teorije zasnovane na Vajlovoj grupi $W(1,3)$, i

b) uopštenjem Rimanove geometrije putem uvodjenja lokalne simetrije reskaliranja dužina.

Realizacije prve ideje daje novi smisao Vajlovoj geometrijskoj konstrukciji.

1. LOKALNA VAJLOVA INVARIJANTNOST

Teorija gravitacije zasnovana na lokalizaciji Vajlove simetrije $W(1,3)$ predstavlja minimalno proširenje lokalne Poenkareove teorije (Bregman, 1973; Charap i Tait, 1974; Kasuya, 1975). Jasno je da će kinematika ove teorije biti složenija, jer će se u njoj pojaviti nova kompenzujuća polja, ali će, s druge strane, dejstvo postati jednostavnije zbog zahteva veće simetrije.

1.1 Lokalizacija Vajlove simetrije

Posmatrajmo dinamički sistem polja materije u prostoru M_4, čije je dejstvo invarijantno u odnosu na *globalne* Vajlove transformacije $\delta x^\mu = \xi^\mu$,

$$\xi^\mu = \varepsilon^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \rho x^\mu \,, \tag{4.1}$$

pri čemu se polja i njihovi izvodi transformišu po nekoj reprezentaciji grupe $W(1,3)$:

$$\begin{aligned} \delta_0\phi &= \left(\tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \varepsilon^\mu P_\mu + \rho D\right)\phi \equiv W\phi\,, \\ \delta_0\partial_k\phi &= W\partial_k\phi + \omega_k{}^\nu\partial_\nu\phi - \rho\partial_k\phi \equiv W_k{}^\nu\partial_\nu\phi\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Polja i njihove transformacije su zadati u odnosu na lokalni koordinatni sistem u tangentnom prostoru, u kome grupa $W(1,3)$ deluje. Uslov invarijantnosti dejstva (2.11), u kome je $\partial_\mu\xi^\mu = 4\rho$, dovodi do relacija (2.12) i (2.32*a*).

Ako sada uopštimo ove transformacije pretpostavljajući da parametri nisu konstante već neke *funkcije* koordinata, invarijantnost dejstva će biti narušena iz dva razloga. Prvo, menja se zakon transformacije izvoda polja,

$$\begin{aligned} \delta_0\partial_k\phi &= W_k{}^\nu\partial_\nu\phi + \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}{}_{,k}M_{\mu\nu}\phi + \varepsilon^\nu{}_{,k}P_\nu\phi + \rho_{,k}D\phi \\ &= W\partial_k\phi - \xi^\nu{}_{,k}\partial_\nu\phi + \tfrac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,k}\Sigma_{ij}\phi + \rho_{,k}d\phi\,, \end{aligned} \tag{4.3}$$

a drugo, sada je $\partial_\mu\xi^\mu \neq 4\rho$. Umesto uslova invarijantnosti dejstva dobija se relacija

$$\Delta\mathcal{L}_M = \tfrac{1}{2}\omega^{ij}{}_{,\mu}M^\mu{}_{ij} - \varepsilon^i{}_{,\mu}T^\mu{}_i - \rho_{,\mu}D^\mu \neq 0\,.$$

Invarijantnost se može povratiti uvodjenjem *kovarijantnog izvoda* $\nabla_k\phi$ koji se transformiše po pravilu

$$\delta_0\overset{*}{\nabla}_k\phi = W\overset{*}{\nabla}_k\phi + \omega_k{}^i\overset{*}{D}_i\phi - \rho\overset{*}{\nabla}_k\phi \equiv W_k{}^i\overset{*}{\nabla}_i\phi\,, \tag{4.4}$$

i kompenzovanjem osobine $\partial_\mu\xi^\mu \neq 4\rho$.

Kovarijantni izvod. Da bismo konstruisali kovarijantni izvod $\overset{*}{\nabla}_k\phi$, uvešćemo, najpre, (ω,ρ)–kovarijantni izvod,

$$\overset{*}{\nabla}_\mu\phi = (\partial_\mu + \overset{*}{A}_\mu)\phi\,, \qquad \overset{*}{A}_\mu \equiv \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij} + B_\mu d^*\,, \tag{4.5}$$

koji se transformiše po pravilu

$$\delta_0\overset{*}{\nabla}_\mu\phi = W\overset{*}{\nabla}_\mu\phi - \xi^\nu{}_{,\mu}\overset{*}{\nabla}_\nu\phi\,, \tag{4.6}$$

čime se eliminišu članovi $\omega^{ij}{}_{,k}$ i $\rho_{,k}$ u (4.3). Pretpostavićemo da je naboj d^* jednak dilatacionoj dimenziji polja,

$$d^* = d\,.$$

Tada se dobijaju sledeći zakoni transformacije za $A^{ij}{}_\mu$ i B_μ:

$$\begin{aligned} &\delta_0 A^{ij}{}_\mu = \delta_0^P A^{ij}{}_\mu\,, \\ &\delta_0 B_\mu = -\xi^\nu{}_{,\mu}B_\nu - \xi\cdot\partial B_\mu - \rho_{,\mu} \equiv \delta_0^P B_\mu - \rho_{,\mu}\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

gde je δ_0^P označava transformaciju Poenkareovog oblika sa novim ξ^μ. Ako zahtev (4.6) prepišemo u obliku

$$\delta_0\overset{*}{\nabla}_\mu\phi = W_\mu{}^\nu\overset{*}{\nabla}_\nu\phi - (\xi^\nu{}_{,\mu} + \omega^\nu{}_\mu - \rho\delta^\nu_\mu)\overset{*}{\nabla}_\nu\phi\,,$$

postaje jasno da se zadnji član, koji je homogen po $\overset{*}{\nabla}_\nu\phi$, može eliminisati dodavanjem novog kompenzujućeg polja,

$$\overset{*}{\nabla}_k\phi = \delta^\nu_k\overset{*}{\nabla}_\nu\phi - A_k{}^\nu\overset{*}{\nabla}_\nu\phi \equiv h_k{}^\nu\overset{*}{\nabla}_\nu\phi\,, \tag{4.8}$$

čiji zakon transformacije sledi iz (4.4):

$$\delta_0 h_k{}^\mu = \delta_0^P h_k{}^\mu - \rho h_k{}^\mu\,. \tag{4.9}$$

Proširenje Poenkareove grupe na Vajlovu se ogleda u dva efekta:
a) pojavljuje se novo kompenzujuće polje B, i
b) zakoni transformacije za "stara" polja A i h se menjaju.
Ovo znači da se A i h *razlikuju* od odgovarajućih polja u U_4 teoriji, mada za njih koristimo iste oznake.

Lagranžijan materije. Posle uvodjenja kovarijantnog izvoda $\overset{*}{\nabla}_k\phi$ može se definisati novi lagranžijan materije,

$$\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M(\phi, \overset{*}{\nabla}_k\phi)\,, \tag{4.10}$$

koji zadovoljava uslov invarijantnosti različit od (2.11):

$$\delta_0\mathcal{L}'_M + \xi\cdot\partial\mathcal{L}'_M + 4\rho\mathcal{L}'_M = 0\,.$$

Da bismo kompenzovali osobinu $\partial_\mu\xi^\mu \neq 4\rho$, uvešćemo još jednu izmenu u lagranžijan:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M = \Lambda\mathcal{L}'_M\,, \tag{4.11}$$

gde je Λ neka funkcija kompenzujućih polja i njihovih izvoda. Iz uslova (2.11) sledi

$$\delta_0\Lambda + \partial_\mu(\Lambda\xi^\mu) - 4\rho\Lambda = 0\,.$$

Koristeći poznata transformaciona pravila za kompenzujuća polja i njihove izvode, dobija se uslov koji sadrži lokalne parametre i njihove prve i druge izvode. Iščezavanje koeficijenata uz druge izvode parametara znači nezavisnost Λ od izvoda polja. Iščezavanje koeficijenata uz $\omega^{ij}{}_{,\mu}$ i $\rho_{,\mu}$ označava nezavisnost Λ od polja $A^{ij}{}_\mu$ i B_μ, dok je koeficijent uz ξ^μ nula, pošto Λ ne zavisi eksplicitno od x. Iščezavanje koeficijenata uz $\xi^\mu{}_{,\mu}$ i ω^{ij} daje iste uslove kao i u slučaju Poenkareove teorije, dok iščezavanje koeficijenta uz ρ daje:

$$\rho: \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial h_k{}^\mu}h_k{}^\mu + 4\rho\Lambda = 0\,.$$

Rešenje glasi $\Lambda = \det(b^k{}_\mu) \equiv b$, tako da konačni lagranžijan materije postaje

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M \equiv b\mathcal{L}_M(\phi, \overset{*}{\nabla}_k\phi)\,. \tag{4.12}$$

Primer 1. Kovarijantni izvod skalarnog polja u Vajlovoj teoriji ima oblik $\overset{*}{\nabla}_k\varphi = h_k{}^\mu\overset{*}{\nabla}_\mu\varphi = h_k{}^\mu(\partial_\mu - B_\mu)\varphi$, pošto je $d(\varphi) = -1$. Lagranžijan bezmasene φ^4 teorije, koji u prostoru M_4 ima globalnu Vajlovu simetriju, posle lokalizacije simetrije postaje

$$\widetilde{\mathcal{L}}_S = b\big(\tfrac{1}{2}\eta^{ij}\overset{*}{\nabla}_i\varphi\overset{*}{\nabla}_j\varphi + f\varphi^4\big) = b\big(\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\overset{*}{\nabla}_\mu\varphi\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi + f\varphi^4\big)\,.$$

Analogno se za antisimetrizovani, bezmaseni Dirakov lagranžijan dobija

$$\widetilde{\mathcal{L}}_D = \tfrac{1}{2}ib\left(\bar\psi\gamma^k\overset{*}{\nabla}_k\psi - \overset{*}{\nabla}_k\bar\psi\gamma^k\psi\right)\,,$$

gde je $\overset{*}{\nabla}_k\psi = h_k{}^\mu\left(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\sigma_{ij} - \tfrac{3}{2}B_\mu\right)\psi$, i slično za $\overset{*}{\nabla}_k\bar\psi$, pri čemu je $d(\psi) = d(\bar\psi) = -\frac{3}{2}$. Pošto polje B_μ na isti način interaguje sa ψ i $\bar\psi$, ono ne može da predstavlja elektromagnetni potencijal. Ustvari, B_μ potpuno nestaje iz antisimetrizovanog lagranžijana $\widetilde{\mathcal{L}}_D$.

Pošto su veličine Σ_{ij} i d^* u (4.5) odredjene transformacionim osobinama polja, pojam kovarijantnog izvoda se može prirodno uopštiti na proizvoljan tenzor. Tako se za polje $h_i{}^\nu$ dobija

$$\overset{*}{\nabla}_\mu h_i{}^\nu = \left(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}A^{mn}{}_\mu \Sigma^1_{mn} - B_\mu\right)_i{}^s h_s{}^\nu = \partial_\mu h_i{}^\nu - A^s{}_{i\mu} h_s{}^\nu - B_\mu h_i{}^\nu \,.$$

Slučaj *elektromagnetnog polja* zaslužuje posebnu pažnju. Slobodno elektromagnetno polje u M_4 ima dilatacionu simetriju uz $d(A) = -1$, pa je

$$\overset{*}{\nabla}_\mu A_i = \left(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}A^{mn}{}_\mu \Sigma^1_{mn} - B_\mu\right)_i{}^s A_s \,.$$

Treba istaći da ovde koristimo elektromagnetni potencijal A_i, a ne A_μ. Objašnjenje se nalazi u pažljivoj analizi strukture kovarijantnog izvoda $\overset{*}{\nabla}_\mu \phi$. Polje ϕ pripada reprezentaciji grupe $W(1,3)$ koja deluje u *tangentnom* prostoru mnogostrukosti. Ako je ϕ vektor koji ćemo označiti sa A, onda to mora biti vektor A_i čija je dilataciona dimenzija $d(A_i) = -1$, a ne A_μ. Lokalno invarijantni lagranžijan ima oblik

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{EM} = -\tfrac{1}{4} b\eta^{ik}\eta^{jl} G_{ij} G_{kl} \,, \qquad G_{ij} \equiv \overset{*}{\nabla}_i A_j - \overset{*}{\nabla}_j A_i \,.$$

Interesantno je pomenuti da će posle prelaza na koordinatnu bazu lagranžijan postati

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{EM} = -\tfrac{1}{4} b g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} G_{\mu\nu} G_{\rho\lambda} \,,$$

gde je jačina polja $G_{\mu\nu}$ definisana preko potencijala $A_\mu = b^i{}_\mu A_i$ koji ima dimenziju nula: $d(A_\mu) = 0$. Ponekad se, nerazlikovanjem A_μ od A_i, izvodi pogrešan zaključak da je naboj d^*, koji se pojavljuje u kovarijantnom izvodu, uvek jednak dilatacionoj dimenziji osim u slučaju elektromagnetnog polja. Relacija $d^* = d$ je tačna *za sva polja* definisana u odnosu na lokalni koordinatni sistem u kome deluje $W(1,3)$. Pitanje prelaza na koordinatnu bazu odložićemo dok ne razjasnimo geometrijsku strukturu lokalne Vajlove teorije.

Jačine polja. Da bismo našli invarijantan lagranžijan za slobodna polja (A, h, B), definisaćemo, najpre, odgovarajuće jačine polja. Komutator dva (ω, ρ)–kovarijantna izvoda ima oblik

$$[\overset{*}{\nabla}_\mu, \overset{*}{\nabla}_\nu]\phi = \tfrac{1}{2} F^{ij}{}_{\mu\nu} \Sigma_{ij} \phi + F_{\mu\nu} d\phi \,, \qquad (4.13)$$

gde je $F^{ij}{}_{\mu\nu} = F^{ij}{}_{\mu\nu}(A)$ Lorencova, a $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ dilataciona jačina polja. Prelaz na $\overset{*}{\nabla}_k$ kovarijantne izvode daje

$$[\overset{*}{\nabla}_k, \overset{*}{\nabla}_l]\phi = \tfrac{1}{2} F^{ij}{}_{kl} \Sigma_{ij} \phi + F_{kl} d\phi - \overset{*}{F}{}^s{}_{kl} \overset{*}{\nabla}_s \phi \,, \qquad (4.14)$$

gde je $\overset{*}{F}{}^i{}_{\mu\nu} = \overset{*}{\nabla}_\mu b^i{}_\nu - \overset{*}{\nabla}_\nu b^i{}_\mu$ translaciona jačina polja, a

$$
\begin{aligned}
&F^{ij}{}_{kl} = h_k{}^\mu h_l{}^\nu F^{ij}{}_{\mu\nu}\,, \\
&F_{kl} = h_k{}^\mu h_l{}^\nu F_{\mu\nu}\,, \\
&\overset{*}{F}{}^i{}_{kl} = h_k{}^\mu h_l{}^\nu \overset{*}{F}{}^i{}_{\mu\nu}\,.
\end{aligned}
$$

U odnosu na Vajlove transformacije jačine polja se transformišu po zakonu

$$
\begin{aligned}
&\delta_0 F^{ij}{}_{kl} = \delta_0^P F^{ij}{}_{kl} - 2\rho F^{ij}{}_{kl}\,, \\
&\delta_0 F_{kl} = \delta_0^P F_{kl} - 2\rho F_{kl}\,, \\
&\delta_0 \overset{*}{F}{}^i{}_{kl} = \delta_0^P \overset{*}{F}{}^i{}_{kl} - \rho \overset{*}{F}{}^i{}_{kl}\,.
\end{aligned}
$$

Za veličinu ϕ, koja se transformiše po pravilu (4.2), tj.

$$
\delta_0\phi = \delta_0^P \phi + d\rho\phi\,,
$$

kažemo da ima *težinu* d. Iz ove definicije sledi $d(F^{ij}{}_{kl}) = d(F_{kl}) = -2$, $d(\overset{*}{F}{}^i{}_{kl}) = -1$. Kovarijantni izvod skalara ϕ težine d ima oblik,

$$
\overset{*}{\nabla}_\mu \varphi = (\partial_\mu + dB_\mu)\varphi \equiv \partial^*_\mu \varphi\,,
$$

dok za vektor V^i težine d važi

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\nabla}_\mu V^i = \partial^*_\mu V^i + A^i{}_{j\mu} V^j = \partial_\mu V^i + \overset{*}{A}{}^i{}_{j\mu} V^j\,, \\
&\overset{*}{A}{}^i{}_{j\mu} \equiv A^i{}_{j\mu} + d\delta^i_j B_\mu\,.
\end{aligned}
$$

Ako definišemo $\overset{*}{F}{}^{ij}{}_{\mu\nu} \equiv F^{ij}{}_{\mu\nu}(\overset{*}{A})$, lako se dobijaju relacije

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{F}{}^{ij}{}_{\mu\nu} = F^{ij}{}_{\mu\nu}(A) + d\eta^{ij} F_{\mu\nu}\,, \\
&\overset{*}{F}{}^i{}_{\mu\nu} = F^i{}_{\mu\nu}(A) + (B_\mu b^i{}_\nu - B_\nu b^i{}_\mu)\,.
\end{aligned}
$$

Veličina $\overset{*}{F}{}^{ij}{}_{\mu\nu}$ se pojavljuje u (4.13) kad je ϕ vektor. Treba uočiti da ona nije antisimetrična po (i,j) kao u slučaju Poenkareove teorije, što ima odredjeno geometrijsko značenje.

Ukupni lagranžijan materije i gradijentnih polja ima oblik

$$
\mathcal{L} = b\mathcal{L}_G(F^{ij}{}_{kl}, \overset{*}{F}{}^i{}_{kl}, F_{kl}) + b\mathcal{L}_M(\phi, \overset{*}{\nabla}_k\phi)\,. \tag{4.15}
$$

Slobodan lagranžijan $\mathcal{L}_G$ je invarijantna funkcija jačina polja, tj. mora imati težinu -4, što znači da može biti kvadratična funkcija od F_{ijkl} i F_{kl}, dok izrazi koji su linearni po $F^{ij}{}_{ij}$ i kvadratični po $\overset{*}{F}{}^i{}_{kl}$ nisu dozvoljeni. Vajlova invarijantnost, dakle, ograničava neke mogućnosti koje postoje u lokalnoj Poenkareovoj teoriji: članovi u $\mathcal{L}_G$ koji sadrže dimenzionu konstantu nisu dozvoljeni.

1.2 Zakoni održanja

Pogledajmo kako izgledaju kovarijantna uopštenja zakona održanja u ovoj teoriji. Uvedimo najpre kompaktnu oznaku $Q_A = (\phi, b^k{}_\mu, A^{ij}{}_\mu, B_\mu)$. Transformacije polja Q_A su odredjene relacijama (4.2a), (4.7) i

$$\delta_0 b^k{}_\mu = \delta_0^P b^k{}_\mu + \rho b^k{}_\mu \,. \tag{4.16}$$

Koristeći metodu izloženu u glavi III uslov invarijantnosti lagranžijana $\mathcal{L}$ se može napisati u obliku

$$\Delta\mathcal{L} = -\xi^\nu I^*_\nu + \tfrac{1}{2}\omega^{ij} I_{ij} * + \rho I^* + \partial_\mu \Lambda^* = 0 \,. \tag{4.17}$$

Odavde sledi

$$I^*_\nu = 0, \qquad I^*_{ij} = 0, \qquad I^* = 0 \,, \tag{4.18a}$$
$$\partial_\mu \Lambda^{*\mu} = 0 \,. \tag{4.18b}$$

I ovde ćemo se ograničiti, radi ilustracije smisla ovih identiteta, na slučaj kada je $\mathcal{L}$ lagranžijan materije.

Definicije *kanonskih* i *kovarijantnih* struja koje odgovaraju translaciji i Lorencovoj rotaciji imaju oblik (3.19) i (3.20), uz zamenu $\nabla_\nu\phi \to \overset{*}{\nabla}_\nu\phi$. Definicije *dinamičkih* struja energije–impulsa i spina ostaju iste kao u (3.21). Uvedimo sada odgovarajuće definicije dilatacionih struja:

$$\widetilde{D}^\mu = \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial\phi_{,\mu}} d\phi \,, \qquad \widetilde{D}'^\mu = \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial\nabla^*_\mu\phi} d\phi \,, \qquad \delta^\mu = \frac{\delta\widetilde{\mathcal{L}}_M}{\delta B_\mu} \,. \tag{4.19}$$

Pretpostavićemo da su jednačine kretanja za materiju zadovoljene. Tada, izjednačavanjem koeficijenata uz izvode parametara u (4.18b) sa nulom, dobija se jednakost kovarijantnih i dinamičkih struja:

$$\tau^\mu{}_\nu = \widetilde{T}'^\mu{}_\nu \,, \qquad \sigma^\mu{}_{ij} = \widetilde{S}'^\mu{}_{ij} \,, \qquad \delta^\mu = \widetilde{D}'^\mu \,. \tag{4.20}$$

Naravno, $\widetilde{T}'^\mu{}_\nu$ se razlikuje od odgovarajućeg Poenkareovog izraza, jer je $\overset{*}{\nabla}_\nu\phi \neq \nabla_\nu\phi$.

Uslovi (4.18a) daju sledeće kovarijantne diferencijalne identitete:

$$\begin{aligned} &b^k{}_\mu \overset{*}{\nabla}_\nu \tau^\nu{}_k = \tau^\nu{}_k F^k{}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\sigma^\nu{}_{ij} F^{ij}{}_{\mu\nu} + \delta^\nu F_{\mu\nu} \,, \\ &\overset{*}{\nabla}_\mu \sigma^\mu{}_{ij} = \tau_{ij} - \tau_{ji} \,, \\ &\overset{*}{\nabla}_\mu \delta^\mu = \tau^\mu{}_\mu \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Poslednju relaciju treba uporediti sa zakonom održanja globalne dilatacione struje (2.41).

Primer 2. Za skalarno polje iz primera 1 dobijamo

$$\widetilde{D}^\mu = \widetilde{D}'^\mu = \delta^\mu = -bg^{\mu\nu}\varphi\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi\,.$$

Jednačine kretanja polja φ su oblika

$$\begin{aligned}
&-\overset{*}{\Box}\varphi + 4f\varphi^3 = 0\,,\\
&\overset{*}{\Box}\varphi \equiv b^{-1}\overset{*}{\nabla}_\mu(bg^{\mu\nu}\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi) = b^{-1}(\partial_\mu + B_\mu)(bg^{\mu\nu}\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Koristeći ove jednačine i izraz za TEI,

$$\tau_{\mu\nu} = b\overset{*}{\nabla}_\mu\varphi\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\widetilde{\mathcal{L}}_S\,, \qquad \tau^\mu{}_\mu = -bg^{\mu\nu}\overset{*}{\nabla}_\mu\varphi\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi - 4bf\varphi^4\,,$$

dolazimo do rezultata

$$\overset{*}{\nabla}_\mu\delta^\mu = -bg^{\mu\nu}\overset{*}{\nabla}_\mu\varphi\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi - \varphi\overset{*}{\nabla}(bg^{\mu\nu}\overset{*}{\nabla}_\nu\varphi) = \tau^\mu{}_\mu\,,$$

u skladu sa (4.21).

Za Dirakovo polje važi $\widetilde{D}^\mu = \widetilde{D}'^\mu = \delta^\mu = 0$. Razlog ovog neobičnog rezultata nalazi se u činjenici da se interakcija polja B_μ sa Dirakovim poljem poništava u antisimetrizovanom lagranžijanu zbog $d(\psi) = d(\bar{\psi})$. Uz pomoć jednačina kretanja dobija se $\tau^\mu{}_\mu = 0$, u skladu sa $\delta^\mu = 0$.

1.3 Odnos lokalne Vajlove i konformne simetrije

Da bismo lokalizovali konformnu simetriju, poći ćemo od izraza (2.23) za globalne transformacije polja,

$$\delta_0\phi = \big(\tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \varepsilon^\mu P_\mu + \rho D + c^\mu K_\mu\big)\phi \equiv K\phi\,.$$

Posle prelaza na lokalnu simetriju možemo definisati kovarijantni izvod

$$\overset{c}{\nabla}_\mu\phi = \big(\partial_\mu + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij} - B_\mu\Delta + C^i{}_\mu\kappa_i\big)\phi\,,$$

naći zakone transformacije za kompenzujuća polja, definisati jačine polja, itd. Medjutim, ako posmatramo reprezentacije generatora konformne grupe $C(1,3)$ na poljima, uočićemo da se generator SKT može izraziti pomoću D, P_μ i $\Sigma_{\mu\nu}$,

$$K_\mu = -2x_\mu D + x^2 P_\mu + 2x^\nu\Sigma_{\mu\nu}\,.$$

Ovaj izraz za K_μ sugeriše da se $\delta_0\phi$ prepiše u obliku

$$\delta_0\phi = \big(\tfrac{1}{2}\bar{\omega}^{ij}\Sigma_{ij} + \xi^\nu P_\nu - \bar{\rho}\Delta\big)\phi\,,$$

gde je $\bar{\omega}^{ij} = \omega^{ij} + 2(c^i x^j - c^j x^i)$, $\bar{\rho} = \rho - 2c{\cdot}x$, a ξ^ν je dato izrazom (2.21).

Posle lokalizacije u zakonu transformacije $\delta_0\phi$ pojavljuje se samo 11 nezavisnih lokalnih parametara: $\bar{\omega}^{ij}, \bar{\rho}$ i ξ^ν. Lokalne SKT su izgubile svoj nezavisan smisao, one su se svele na lokalne dilatacije, translacije i Lorencove rotacije. Da li je onda potrebno uvoditi kompenzujuće polje $C^i{}_\mu$ koje odgovara lokalnoj SKT? Ako ga uvedemo, da li je ono nezavisno od ostalih polja? Da bismo našli odgovore na ova pitanja, korisno je da se podsetimo prvobitnog razloga za uvodjenje kompenzujućih polja: ona se uvode da kompenzuju "višak" članova u zakonu transformacije izvoda polja posle lokalizacije simetrije (obično se za svaki nezavisan lokalni parametar uvodi po jedno polje). Pri globalnim transformacijama izvod polja se transformiše po pravilu

$$\delta_0\partial_k\phi = K\partial_k\phi + \left[2(c^i\Sigma_{ik} + c_k\Delta) + (\bar{\omega}_k{}^\nu + \bar{\rho}\delta_k^\nu)P_\nu\right]\phi\,.$$

Posle lokalizacije simetrije, na desnoj strani će se pojaviti izvodi parametara $\bar{\omega}^{ij}, \bar{\rho}, \xi^\nu$ i c^i. Pošto je broj ovih parametara 15 (a ne 11), vidi se da je, ipak, *potrebno* uvesti svih 15 kompenzujućih polja, tj. da su lokalna konformna i lokalna Vajlova teorija suštinski različite.

2. VAJL–KARTANOVA GEOMETRIJA

Pokušavajući da ujedini Ajnštajnovu OTR sa elektrodinamikom, Vajl je proširio Rimanovu geometriju uvodeći jedan dodatni geometrijski objekat. Ova geometrijska struktura je zasnovana na pojmu Vajlovog reskaliranja metrike. U ovom odeljku će, najpre, biti uvedena konformna simetrija u opštem Rimanovom prostoru, što će razjasniti vezu konformne simetrije i Vajlovog reskaliranja, a zatim će se izložiti Vajlova geometrija i razjasniti njena veza sa lokalnom $W(1,3)$ teorijom.

2.1 Konformne transformacije u Rimanovom prostoru

Pojam konformnih transformacija u prostoru M_4 definiše konformnu grupu $C(1,3)$. Sada ćemo videti kako se ove transformacije uopštavaju pri prelazu na Rimanov prostor V_4 (Fulton, Rohrilch i Witten, 1962).

Konformne transformacije. U narednom izlaganju treba pažljivo razlikovati tačke prostora od koordinata koje se koriste da opišu njihove položaje.

Posmatrajmo, najpre, *konformno preslikavanje* $f : V_4 \to V_4$, koje se može shvatiti kao konformno "pomeranje" tačaka u V_4 (aktivna interpretacija). Neka su (P, Q) dve bliske tačke sa koordinatama $(x, x+dx)$ u lokalnom koordinatnom sistemu S,

$$ds^2(P,Q) = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu\,.$$

Pri preslikavanju f tačke (P,Q) prelaze u tačke $(\bar{P},\bar{Q})$, čije su koordinate $(\bar{x},\bar{x}+d\bar{x})$, u *istom* koordinatnom sistemu S. Preslikavanje f je konformno ako je ispunjen uslov

$$ds^2(\bar{P},\bar{Q}) = s(P)ds^2(P,Q)\,, \tag{4.24a}$$

tj.

$$g_{\mu\nu}(\bar{x})d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu = s(x)g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu\,, \tag{4.24b}$$

gde je $s(x) > 0$.

Posmatrajmo sada tačke (P,Q) u *dva* lokalna koordinatna sistema, S i S'. Neka je $x \to x' = F(x)$ transformacija koordinata pri kojoj rastojanje tačaka (P,Q) u S' "izgleda isto" kao rastojanje $(\bar{P},\bar{Q})$ u S. Drugim rečima, rastojanje tačaka (P,Q) u S' ima oblik

$$g'_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu = s(x')g_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu\,, \tag{4.25a}$$

odnosno

$$g'_{\mu\nu}(x') = s(x')g_{\mu\nu}(x')\,. \tag{4.25b}$$

Ovaj uslov na promenu forme metričkog tenzora definiše *konformnu transformaciju koordinata* (pasivna interpretacija). Pošto vrednost ds^2 ne zavisi od koordinatnog sistema, prethodni uslovi se mogu napisati u obliku

$$s(x')g_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu\,. \tag{4.25c}$$

Konformne transformacije koordinata (4.25) definišu *proširenu konformnu grupu* $\widetilde{C}$.

Vajlovo reskaliranje. Najzad, transformacije konformnog ili Vajlovog reskaliranja metrike,

$$g_{\mu\nu} \to g^r_{\mu\nu} = s(x)g_{\mu\nu} \equiv e^{2\lambda(x)}g_{\mu\nu}\,, \tag{4.26a}$$

definišu grupu W_g. Ove transformacije ne uključuju promenu koordinata, i potpuno su različite od $\widetilde{C}$. U slučaju kad dinamički sistem sadrži i druga polja osim $g_{\mu\nu}$, onda se definicija Vajlovog reskaliranja mora *proširiti* i na njih. Ovo proširenje ima oblik

$$\phi \to \phi^r = [s(x)]^{w/2}\phi \equiv e^{w\lambda}\phi\,, \tag{4.26b}$$

gde se realan broj w naziva Vajlova dimenzija, ili *težina*, polja ϕ. Transformacije (4.26) se mogu shvatiti kao (lokalne) konformne transformacije u kojima je koordinatni deo "zanemaren". Vajlova dimenzija je, ustvari, jednaka sa dilatacionom dimenzijom d.

PRIMER 3. Neka je interakciju skalarnog i Dirakovog polja u Rimanovom prostoru zadata lagranžijanom

$$\widetilde{\mathcal{L}}_I = f\sqrt{-g}\bar{\psi}\psi\varphi\,.$$

Pošto je $w(g_{\mu\nu}) = 2$, $w(g^{\mu\nu}) = -2$, i $w(\sqrt{-g}) = 4$, Vajlovo reskaliranje sa $w(\varphi) = -1$, $w(\psi) = w(\bar{\psi}) = -\frac{3}{2}$, je simetrija lagranžijana interakcije. Medjutim, kinetički deo za skalarno polje

$$\widetilde{\mathcal{L}}_S = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\,,$$

nije invarijantan. Razlog je lokalnost posmatranih transformacija. Simetrija teorije se, kao i obično, može postići tek posle pogodne izmene dejstva.

PRIMER 4. Elektromagnetno polje u V_4 je opisano lagranžijanom oblika

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{EM} = -\tfrac{1}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}G_{\mu\nu}G_{\rho\lambda}\,,$$

gde je $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. U Rimanovom prostoru zamena parcijalnog izvoda kovarijantnim (sa simetričnom koneksijom) nema efekta na antisimetričnu veličinu $G_{\mu\nu}$. Na osnovu brojanja težina polja sledi $w(A_\mu) = 0$, posle čega nije teško uočiti W_g invarijantnost teorije. Konzistentnost ovakvog dodeljivanja težine se proverava konstrukcijom elektromagnetne interakcije se drugim poljima. Interakcija sa kompleksnim skalarnim poljem,

$$\widetilde{\mathcal{L}}_I = \int d^4x\sqrt{-g}\tfrac{1}{2}\big\{e^2A_\mu A_\nu\varphi^*\varphi + ieA_\mu\big[\varphi^*\partial_\nu\varphi - (\partial_\nu\varphi^*)\varphi\big]\big\}\,,$$

je W_g–invarijantna za $w(A_\mu) = 0$, što je konzistentno sa prethodnom diskusijom.

Reskaliranje metrike se može shvatiti kao preslikavanje Rimanovog prostora $(V_4, g_{\mu\nu})$ u $(V_4, g^r_{\mu\nu})$. Ovo preslikavanje definiše kolekciju Rimanovih prostora koji su medjusobno povezani reskaliranjem metrike:

$$V_4^r = \big\{(V_4, g^{r_i}_{\mu\nu})\big\}\,.$$

Rastojanje tačaka (P, Q) sa koordinatama $(x, x + dx)$ nije definisano u V_4^r, jer zavisi od izbora predstavnika. Medjutim, *odnos dužina* dva vektora u istoj tački, kao i *ugao* izmedju njih, ne zavise od predstavnika.

U prostoru $(V_4, g_{\mu\nu})$ koneksija je definisana preko Kristofelovog simbola. Posle reskaliranja metrike koneksija se menja po zakonu

$$\left\{{}^{\,\mu}_{\nu\rho}\right\}^r = \left\{{}^{\,\mu}_{\nu\rho}\right\} + \tfrac{1}{2}(\delta^\mu_\nu s_\rho + \delta^\mu_\rho s_\nu - g_{\nu\rho}s^\mu)\,, \tag{4.27}$$

gde je $s_\mu = \partial_\mu \ln s$, $s^\mu = g^{\mu\nu}s_\nu$. Odavde sledi odgovarajući zakon transformacije za Rimanov tenzor $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$.

Vajl je uveo *konformni tenzor krivine*,

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \tfrac{1}{2}\big(\eta_{ik}R_{jl} - \eta_{il}R_{jk} - \eta_{jk}R_{il} + \eta_{jl}R_{ik}\big) - \tfrac{1}{6}(\eta_{il}\eta_{jk} - \eta_{ik}\eta_{jl})R\,,$$

koji ima sledeće važne osobine:

a) $C^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}$ je invarijantan u odnosu na Vajlovo reskaliranje metrike;

b) trag Vajlovog tenzora je nula: $C^{k}{}_{jkl} = 0$.

Prostor za koji je Vajlov tenzor jednak nuli naziva se konformno ravan prostor. Pošto je Minkovskijev prostor konformno ravan, iz osobine *a*) sledi da je svaki Rimanov prostor sa metrikom $g_{\mu\nu} = s\eta_{\mu\nu}$ konformno ravan.

Konformne transformacije u M_4. Vratimo se sada grupi konformnih transformacija $\widetilde{C}$. Označimo sa C_0 grupu specijalnih koordinatnih transformacija iz $\widetilde{C}$ koje transformišu ravan prostor (M_4, η) u *ravan* prostor $(M_4, s\eta)$:

$$C_0: \qquad R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}(s\eta) = 0\,. \tag{4.28a}$$

Pošto je $(M_4, s\eta)$ konformno ravan, $C^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}(s\eta) = 0$, prethodni uslov se svodi na

$$R_{\nu\rho}(s\eta) = -s_{\nu,\rho} + \tfrac{1}{2}s_\nu s_\rho - \tfrac{1}{2}\eta_{\nu\rho}s^{\lambda}{}_{,\lambda} - \tfrac{1}{2}\eta_{\nu\rho}s^{\lambda}s_\lambda = 0\,. \tag{4.28b}$$

Ova relacija daje ograničenja na $s(x)$, tj. na koordinatne transformacije koje indukuju dato $s(x)$. Koristeći činjenicu da je za beskonačno male konformne transformacije prostora (M_4, η) ispunjen uslov $s(x) - 1 = -\frac{1}{2}\partial{\cdot}\xi$, jednačina (4.28*b*) se lako dovodi na oblik konformne Kilingove jednačine (2.20*b*). Prema tome, grupa C_0 se svodi na grupu globalnih konformnih transformacija koordinata $C(1,3)$, koja nam je poznata iz glave II.

Veza $\widetilde{C}$ i W_g. Mada su konformna grupa $\widetilde{C}$ i grupa Vajlovog reskaliranja W_g potpuno različite, medju njima postoji interesantna veza, kao što je sugerisalo razmatranje u M_4 (odeljak II.2). Iz oblika $\widetilde{C}$ transformacije se vidi da se ona može shvatiti kao kompozicija izometrije ($s = 1$) i reskaliranja metrike. Odavde sledi praktično pravilo (Fulton, Rorlich i Witte, 1962):

> *ako je neka teorija invarijantna u odnosu na opšte koordinatne transformacije, onda W_g invarijantnost implicira $\widetilde{C}$ invarijantnost.*

Smisao ovog iskaza se lakše vidi iz sledeće, jednostavnije verzije (Zumino, 1970):

> *ako je dejstvo neke teorije u Rimanovom prostoru invarijantno u odnosu na W_g, onda ta teorija posle prelaza na ravan prostor ima $C(1,3)$ invarijantnost.*

Ilustrujmo zadnji iskaz na primeru teorije skalarnog polja. Ako za koordinatne transformacije izaberemo globalne dilatacije, metrički tenzor i skalarno polje se transformišu po zakonu

$$\xi^\mu = \rho x^\mu\,, \qquad \delta_0 g_{\mu\nu} = -2\rho g_{\mu\nu} + \rho x\cdot\partial g_{\mu\nu}\,, \qquad \delta_0\phi = -\rho x\cdot\partial\phi\,.$$

S druge strane, Vajlovo reskaliranje sa parametrom $s(x) = 1 + 2\rho$ daje

$$\delta_0 g_{\mu\nu} = 2\rho g_{\mu\nu}\,, \qquad \delta_0\phi = -\rho\phi\,.$$

Kombinovanjem ovih simetrija zaključujemo da je dejstvo invarijantno i u odnosu na transformaciju

$$\xi^\mu = \rho x^\mu\,, \qquad \delta_0 g_{\mu\nu} = \rho x\cdot\partial g_{\mu\nu}\,, \qquad \delta_0\phi = -\rho(x\cdot\partial + 1)\phi\,.$$

Ako sada predjemo na ravan prostor $g = \eta$, onda je $\delta_0 g = 0$, pa je dejstvo invarijantno u odnosu na globalne dilatacije. Ovaj primer razjašnjava mogućnost izbora $\delta_0\eta = 0$ u definiciji konformne simetrije u teoriji polja.

Na sličan način se dokazuje invarijantnost u odnosu na SKT ako je

$$\xi^\mu = c^\mu x^2 - 2c\cdot x x^\mu\,, \qquad s(x) = 1 + 2c\cdot x\,.$$

2.2 Vajlov prostor bez torzije W_4

Rimanov prostor V_4 se može okarakterisati sa sledeće tri osobine:
a) to je prostor sa metrikom,
b) ima simetričnu koneksiju Γ, i
c) u njemu važi metrički postulat: $D_\mu(\Gamma)g_{\nu\lambda} = 0$.
Odavde sledi, kao što smo ranije pokazali, da je koneksija jednaka Kristofelovom simbolu. Pri paralelnom pomeranju vektora po zatvorenoj krivoj u V_4 njegova *orijentacija* se menja, $\Delta V_\mu = \frac{1}{2}R^\nu{}_{\mu\lambda\rho}\Delta\sigma^{\lambda\rho}V_\nu \neq 0$, dok se *dužine* i *uglovi* ne menjaju zbog metričkog postulata.

Vajlova geometrija. Pri pokušaju da ujedini gravitaciju i elektrodinamiku Vajl je došao na ideju da uopšti prostor V_4 uvodeći mogućnost da se pri paralelnom prenosu *dužine vektora menjaju*, dok uglovi i dalje ostaju nepromenjeni (Fulton, Rohrilich i Witten, 1962; Adler, Bazin i Schiffer, 1965). Ideja je ostvarena pretpostavkom

$$D(\Gamma)V^2 = (\varphi_\rho dx^\rho)V^2\,, \qquad (4.29a)$$

gde je $V^2 \equiv g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$, a φ_ρ je Vajlov vektor koji definiše pravilo promene dužine. Pošto je pri paralelnom prenosu $D(\Gamma)V^\mu = 0$, gornji uslov je ekvivalentan sa relacijom

$$D_\rho(\Gamma)g_{\mu\nu} = \varphi_\rho g_{\mu\nu}\,, \qquad (4.29b)$$

koja označava narušenje metričkog postulata i naziva se *uslov semimetričnosti*. Odavde se, po analogiji sa dobijanjem jednačine (3.32), lako dobija izraz za koneksiju,

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \left\{ {\mu \atop \nu\rho} \right\} - \tfrac{1}{2}(\delta^{\mu}_{\nu}\varphi_{\rho} + \delta^{\mu}_{\rho}\varphi_{\nu} - g_{\nu\rho}\varphi^{\mu}) , \tag{4.30}$$

pri čemu smo pretpostavili simetričnost koneksije (iščezavanje torzije). Metrički prostor sa ovakvom koneksijom naziva se *Vajlov prostor* W_4. Vajlov prostor sa torzijom biće razmatran u narednom poglavlju.

Paralelno pomeranje vektora u W_4 po zatvorenoj krivoj odredjuje krivinu kao funkciju koneksije (4.30). Eksplicitan račun pokazuje da tenzor krivine $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ više nije antisimetričan po prva dva indeksa, već važi $R_{(\mu\nu)\lambda\rho} = -g_{\mu\nu}D_{[\lambda}\varphi_{\rho]}$. Zbog toga je rezultat paralelnog pomeranja (Hehl, Mc Crea i Mielke, 1988)

$$\begin{aligned}
&\Delta V_{\mu} = (\Delta V_{\mu})_{\text{rot}} + (\Delta V_{\mu})_{\text{dil}} , \\
&(\Delta V_{\mu})_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2}R_{[\nu\mu]\lambda\rho}\, \Delta\sigma^{\lambda\rho}\, V^{\nu} , \\
&(\Delta V_{\mu})_{\text{dil}} = \tfrac{1}{2}R_{(\nu\mu)\lambda\rho}\, \Delta\sigma^{\lambda\rho}\, V^{\nu} = -\tfrac{1}{2}\Delta\sigma^{\lambda\rho}(D_{\lambda}\varphi_{\rho})V_{\mu} .
\end{aligned}$$

Pored rotacije, svaki vektor menja i svoju dužinu, ali uglovi ostaju isti. U opštem slučaju povezanog metričkog prostora, u kome je koneksija potpuno nezavisna od metrike, i uglovi se menjaju (Hehl i Šijački, 1980).

U Vajlovoj geometriji se lako uvodi sloboda reskaliranja metrike bez promene koneksije. Zaista, iz relacija (4.27) i (4.30) sledi da, ako se reskaliranje metrike prati gradijentnom transformacijom Vajlovog vektora,

$$g_{\mu\nu}(x) \to s(x)g_{\mu\nu}(x) , \qquad \varphi_{\rho}(x) \to \varphi_{\rho}(x) + \partial_{\rho} \ln s(x) , \tag{4.31}$$

koneksija ostaje nepromenjena. Pri reskaliranju metrike dužine vektora se menjaju. Postojanje Vajlovog vektora omogućava važenje ove simetrije koju ćemo, kao i ranije, označiti sa W_g i zvati Vajlovo reskaliranje.

Ako je Vajlov vektor čisti gradijent, $\varphi_{\rho} = -\partial_{\rho}\beta$, onda transformacija reskaliranja

$$g_{\mu\nu} \to \bar{g}_{\mu\nu} = e^{\beta} g_{\mu\nu} , \qquad \varphi_{\rho} \to \bar{\varphi}_{\rho} = \varphi_{\rho} + \partial_{\rho}\beta = 0 ,$$

pretvara Vajlov prostor $W_4(\varphi_{\rho}, g_{\mu\nu})$ u Rimanov: $V_4(\bar{g}_{\mu\nu}) = W_4(0, \bar{g}_{\mu\nu})$. Ova se situacija može izraziti na sledeći sugestivan način. Potreban i dovoljan uslov da se Vajlova geometrija može redukovati na Rimanovu je da se dužina vektora ne menja pri paralelnom pomeranju duž zatvorene putanje,

$$\oint \frac{DV^2}{V^2} = \oint \varphi_{\rho} dx^{\rho} = -\tfrac{1}{2} \int F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = 0 ,$$

gde je $F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\varphi_{\nu} - \partial_{\nu}\varphi_{\mu}$. Uslov $F_{\mu\nu} = 0$ garantuje da se W_4 može svesti na V_4 pogodnim izborom metrike (u jednostruko povezanim oblastima). Veličina $F_{\mu\nu}$ je W_g–invarijantna.

Vajl–kovarijantni izvod. Vajlova geometrija je konstruisana tako da u njoj posebnu ulogu ima invarijantnost u odnosu na grupu reskaliranja W_g, pa je zato korisno definisati veličine koje imaju odredjene transformacione osobine u odnosu na (4.31). Po analogiji sa (4.26*b*) uvodi se pojam težine. Tako $g_{\mu\nu}$ ima težinu 2, dx^μ ima težinu 0, a ds težinu 1, itd. Obično se tenzor težine $w \neq 0$ naziva tenzorska gustina, ili pseudotenzor.

Kovarijantni izvod vektora je uveden tako da se dužina vektora menja pri paralelnom pomeranju po pravilu (4.29*a*). Ako je vektor V^ν težine nula, onda je izraz $D_\mu V^\nu$ invarijantan u odnosu na Vajlovo reskaliranje (4.31). Medjutim, ako je, na primer, V^ν vektor težine 2, onda DV nije veličina odredjene težine:

$$D_\mu V^\nu \to D_\mu(sV^\nu) = sD_\mu V^\nu + (\partial_\mu \ln s)(sV^\nu)\,.$$

Zato je korisno proširiti definiciju kovarijantnog izvoda tako da on *ne menja težinu* objekta na koji deluje. Radi ilustracije ove ideje posmatrajmo skalar ϕ težine $w = 2$, $\phi^r = s\phi$. Definišimo novi, Vajl–kovarijantni (ili ko–kovarijantni) izvod:

$$\overset{*}{D}_\mu \phi = (\partial_\mu - \tfrac{1}{2} w\varphi_\mu)\phi \equiv \partial^*_\mu \phi\,. \tag{4.32}$$

Pri transformacijama (4.31) $\overset{*}{D}_\mu \phi$ se menja po pravilu

$$\overset{*}{D}_\mu \phi \to (\partial^*_\mu - \partial_\mu \ln s)s\phi = s\overset{*}{D}_\mu \phi\,,$$

tj. i $\overset{*}{D}_\mu \phi$ ima težinu 2. Uopštenje na vektor težine 2 je jednostavno:

$$\begin{aligned} \overset{*}{D}_\mu V^\nu &= \partial^*_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda = \partial_\mu V^\nu + \overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu} V^\lambda\,, \\ \overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu} &\equiv \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2} w \delta^\nu_\lambda \varphi_\mu\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Koneksija $\overset{*}{\Gamma}$ osigurava W_g–kovarijantno uopštenje kovarijantnog izvoda.

Interesantno je uočiti da se koneksija $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ u (4.30) dobija iz $\left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\}$ zamenom $\partial \to \partial^*$:

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \left\{{\nu \atop \lambda\nu}\right\}^* \equiv \left\{{\nu \atop \lambda\nu}\right\}\Big|_{\partial\to\partial^*}\,, \qquad \partial^*_\mu g_{\lambda\rho} = (\partial_\mu - \varphi_\mu) g_{\lambda\rho}\,.$$

Operacija $\overset{*}{D}_\mu$ je kovarijantna u odnosu na opšte koordinatne transformacije, jer se $\overset{*}{D}_\mu$ razlikuje od D_μ za četvorovektor. Napomenimo još da se uslov semimetričnosti može napisati u obliku W_g–invarijantnog uslova:

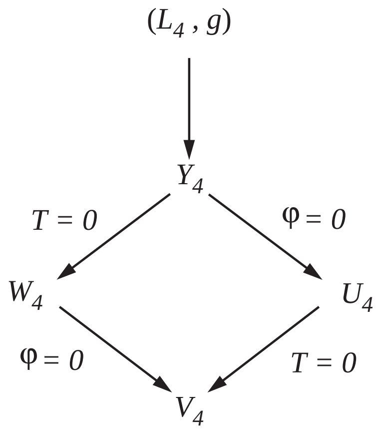
$$\overset{*}{D}_\rho g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{4.34}$$

Dosadašnje izlaganje strukture W_4 je dovoljno za opis gravitacije i tenzorske materije, uključujući i elektrodinamiku. Spinorska materija se može uvesti koristeći tetrade, u okviru Vajlovog prostora sa torzijom.

2.3 Vajl–Kartanov prostor Y_4

Polazeći od prostora (L_4, g) u kome je koneksija definisana nezavisno od metrike, uvodjenje metričkog postulata odredjuje Riman–Kartanov prostor U_4. Ako se metrički postulat oslabi i umesto njega zahtevamo Vajlov uslov semimetričnosti, dolazimo do *Vajl–Kartanovog prostora* Y_4 (Vajlov prostor sa torzijom) (Hayashi i Kugo, 1979; Hehl, Mc Crea i Mielke, 1988).

Ako torzija iščezava, Y_4 prelazi u Vajlov prostor W_4, a ako je $\varphi_\mu = 0$ onda Y_4 prelazi u Riman–Kartanov prostor U_4; najzad, $W_4 \to V_4$ pri $\varphi_\mu \to 0$ (sl. 4.1).



Slika 4.1 Vajlov prostor ne zadovoljava uslov metričnosti

Osnovne relacije u Y_4 se dobijaju kao i u W_4. Uz pomoć uslova semimetričnosti koneksija se može izraziti pomoću metrike, Vajlovog vektora i kontorzije u obliku

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \left\{ {\mu \atop \nu\rho} \right\} - \tfrac{1}{2}(\delta^\mu_\nu \varphi_\rho + \delta^\mu_\rho \varphi_\nu - g_{\nu\rho}\varphi^\mu) + K^\mu{}_{\nu\rho} \,. \tag{4.35}$$

Slično kao i u W_4, kovarijantni izvod se može uopštiti na W_g–kovarijantan oblik.

Spinska koneksija. Spinska materija se opisuje uz pomoć tetrada. Iz veze metrike i tetrada, $g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e^i{}_\mu e^j{}_\nu$, činjenica da je $w(g_{\mu\nu}) = 2$ može se izraziti u obliku uslova

$$w(e^i{}_\mu) = 1\,, \qquad w(\eta_{ij}) = 0\,.$$

Razmotrimo sada kako neke osobine prostora Y_4 izgledaju u lokalnoj bazi tetrada $\boldsymbol{e}^i$. Ako je vektor u^μ težine nula, njegove tetradne komponente $u^i = e^i{}_\mu u^\mu$ imaju težinu 1. Vajlov zahtev semimetričnosti dobija oblik

$$D(\omega)(\eta_{ij} u^i u^j) = (\varphi_\rho dx^\rho)(\eta_{ij} u^i u^j)\,, \tag{4.36a}$$

gde je ω spinska koneksija u Y_4. Ova relacija, zbog $D(\omega)\eta = 0$, prelazi u

$$D_\mu(\omega)u^i = \tfrac{1}{2}\varphi_\mu u^i\,, \qquad (4.36b)$$

gde je $D_\mu(\omega)u^i \equiv \partial_\mu u^i + \omega^i{}_{j\mu}u^j$. Iz uslova $D\eta = 0$ i konstantnosti η sledi *antisimetričnost* spinske koneksije:

$$\omega^i{}_{s\mu}\eta^{sj} + \omega^j{}_{s\mu}\eta^{is} = 0\,.$$

U lokalnoj bazi Vajl–kovarijantni izvod vektora u^i težine $w = 1$ se uvodi relacijom

$$\begin{aligned} &\overset{*}{D}_\mu(\omega)u^i = \partial^*_\mu u^i + \omega^i{}_{s\mu}u^s = \partial_\mu u^i + \overset{*}{\omega}{}^i{}_{s\mu}u^s\,, \\ &\overset{*}{\omega}_{ij\mu} \equiv \omega_{ij\mu} - \tfrac{1}{2}w\eta_{ij}\varphi_\mu\,, \end{aligned} \qquad (4.37)$$

i ima istu težinu kao i u^i. On se lako uopštava na veličinu ϕ koja pripada proizvoljnoj reprezentaciji Lorencove grupe i ima težinu w:

$$\overset{*}{D}_\mu\phi = \big(\partial_\mu + \omega_\mu - \tfrac{1}{2}w\varphi_\mu\big)\phi\,, \qquad \omega_\mu \equiv \tfrac{1}{2}\omega^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij}\,.$$

Veza spinske i afine koneksije. Pošto je pri paralelnom pomeranju $D(\Gamma)u^\mu = 0$, iz uslova semimetričnosti sledi

$$D_\mu(\omega+\Gamma)e^i{}_\nu = \tfrac{1}{2}\varphi_\mu e^i{}_\nu\,. \qquad (4.38a)$$

Tako vidimo da se dužina vektora menja pri paralelnom prenosu, jer se "standard dužine" $e^i{}_\mu$ lokalno menja po zakonu koji odredjuje Vajlov vektor φ_μ. Izražen preko $\overset{*}{D}$ prethodni uslov postaje

$$\overset{*}{D}_\mu(\omega+\Gamma)e^i{}_\nu \equiv \partial^*_\mu e^i{}_\nu + \omega^i{}_{s\mu}e^s{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}e^i{}_\lambda = 0\,. \qquad (4.38b)$$

On povezuje koneksije ω i Γ, i može se interpretirati kao jednakost nuli "totalnog" kovarijantnog izvoda. Rešavanjem ove jednačine dobija se

$$\begin{aligned} &\omega_{ij\mu} = \overset{*}{\Delta}_{ij\mu} + K_{ij\mu}\,, \\ &\overset{*}{\Delta}_{ij\mu} = \Delta_{ij\mu}(\partial \to \partial^*) = \Delta_{ij\mu} - \tfrac{1}{2}(b_{i\mu}\varphi_j - b_{j\mu}\varphi_i)\,. \end{aligned} \qquad (4.39a)$$

Ako sa $\overset{P}{\omega}_{ij\mu}$ označimo Poenkareovu spinsku koneksiju, onda je

$$\omega_{ij\mu} = \overset{P}{\omega}_{ij\mu} - \tfrac{1}{2}(b_{i\mu}\varphi_j - b_{j\mu}\varphi_i) = -\omega_{ji\mu}\,. \qquad (4.39b)$$

Spinska koneksija ω je W_g–invarijantna, tj. ima težinu nula, jer je izražena pomoću $\overset{*}{\Delta}$.

Interpretacija lokalne $W(1,3)$ teorije. Lokalna W(1,3) teorija ima geometrijsku strukturu Y_4 prostora. To se jasno vidi iz prethodnog izlaganja ako se uspostavi sledeća korespodencija:

$$b^i{}_\mu \to e^i{}_\mu\,, \qquad A^{ij}{}_\mu \to \omega^{ij}{}_\mu\,, \qquad B_\mu \to -\tfrac{1}{2}\varphi_\mu\,, \qquad w \to d\,. \tag{4.40}$$

Napomenimo da krivina i torzija u Y_4 nisu jednake sa odgovarajućim veličinama u U_4, jer je $\overset{*}{\omega} \neq \omega$ i $\overset{*}{D} \neq D$.

Primer 5. Lokalna Vajlova teorija elektromagnetnog polja je opisana lagranžijanom

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{EM} = -\tfrac{1}{4}b\eta^{ik}\eta^{jl}G_{ij}G_{kl}\,, \qquad G_{ij} \equiv \overset{*}{D}_i A_j - \overset{*}{D}_j A_i\,.$$

Koristeći relaciju $\overset{*}{D}_i(\omega)A_j = h_i{}^\mu h_j{}^\nu \overset{*}{D}_\mu(\Gamma)A_\nu$, koja sledi iz $\overset{*}{D}_\mu(\omega+\Gamma)h_i{}^\mu = 0$, prethodni lagranžijan posle prelaza na koordinatnu bazu postaje

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{EM} = -\tfrac{1}{4}bg^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}G_{\mu\nu}G_{\rho\lambda}\,, \qquad G_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + 2K^\rho{}_{[\nu\mu]}A_\rho\,.$$

U antisimetričnoj kombinaciji $G_{\mu\nu}$ simetričan deo koneksije (4.35) nestaje, a ostaje samo doprinos kontorzije. Ako je $K=0$, onda je $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

3. DINAMIKA

Dinamički sadržaj teorije odredjen je izborom dejstva. Postoji više načina da se osnovna Vajlova ideja realizuje dinamički.

a) Ako dejstvo poseduje lokalnu $W(1,3)$ simetriju, teorija je definisana u Vajl–Kartanovom prostoru Y_4.

b) U slučaju da dejstvo ima lokalnu $W(1,3)$ simetriju, ali je torzija nula, geometrija odgovara Vajlovom prostoru W_4.

c) Dejstvo može imati lokalnu $W(1,3)$ simetriju i bez prisustva Vajlovog kompenzujućeg polja. Ove teorije se realizuju u Rimanovom prostoru V_4, a njihova lokalna simetrija ima, na neki način, "slučajni" karakter.

Sva tri slučaja se mogu definisati na ekvivalentan način: kombinovanjem lokalne Poenkareove simetrije (ili opšte koordinatne invarijantnosti) i Vajlovog reskaliranja W_g.

Opšti oblik dejstva gravitacionog polja je

$$I = \int d^4x b\,\mathcal{L}_G(R^{ij}{}_{kl}, F_{kl}, \overset{*}{T}{}^i{}_{kl})\,. \tag{4.41a}$$

Pošto je $w(b) = 4$ lagranžijan $\mathcal{L}_G$ mora biti skalar težine $w = -4$. Iz zakona transformacije jačina polja se zna da je $w(R_{ijkl}) = w(F_{kl}) = -2$, $w(\overset{*}{T}_{ikl}) = -1$, pa sledi da je opšte Vajlovo dejstvo tipa $R^2 + F^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G =& b_1 R_{ijkl}R^{ijkl} + b_2 R_{ijkl}R^{klij} + b_3 R_{ij}R^{ij}\\ &+ b_4 R_{ij}R^{ji} + b_5 R^2 + b_6(\varepsilon_{ijkl}R^{ijkl})^2 + cF_{ij}F^{ij}\,,\end{aligned} \tag{4.41b}$$

dok članovi tipa R i $\overset{*}{T}{}^2$ nisu dozvoljeni. Razmotrimo sada neke posebne, interesantne slučajeve Vajl–invarijantnih teorija.

3.1 Vajlova teorija gravitacije i elektrodinamike

U vreme kad je Vajl predložio svoju teoriju, jedine poznate interakcije u prirodi bile su gravitaciona i elektromagnetna. Interesantno je videti kako je izgledao Vajlov pokušaj ujedinjenja ovih teorija.

U prostoru V_4 elektrodinamika se može uvesti preko dejstva

$$I_V = \int d^4x\, b\left(-aR + \alpha G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right), \qquad G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,,$$

pri čemu elektromagnetno polje nije deo geometrije.

Vajl je pošao od čisto geometrijskog dejstva u prostoru W_4,

$$I_W = \int d^4xb\,(-R^2 + \beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu\,, \tag{4.42}$$

koje izgleda najbolja moguća analogija od I_V. Variranjem I_W dobija se

$$\delta I_W = \int d^4x\left[-2bR\delta R - \delta bR^2 + \beta\delta(bF^2)\right] = 0\,.$$

Na ovom mestu je Vajl narušio W_g simetriju uvodeći u teoriju uslov $R = \lambda$. Naravno, ovaj uslov se narušava pri proizvoljnoj W_g transformaciji, tako da je $\delta R \neq 0$. Posle toga se prethodna jednačina može napisati u obliku

$$\delta\int d^4xb\left(-R + \frac{\beta}{2\lambda}F^2 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0\,,$$

gde λ ima ulogu kosmološke konstante. Koristeći koneksiju (4.30) Vajlova krivina se može izraziti pomoću V_4 krivine i polja φ_μ:

$$R(W_4) = R(V_4) - \tfrac{3}{2}\varphi_\mu\varphi^\mu + 3D_\mu\varphi^\mu\,.$$

Pošto je $bD_\mu\varphi^\mu = \partial_\mu(b\varphi^\mu)$, ovaj član postaje površinski član u dejstvu pa se može zanemariti, tako da Vajlova teorija dobija sledeći efektivni oblik:

$$I'_W = \int d^4xb\left[-R(V_4) + \tfrac{1}{2}\beta\bar{F}^2 - \lambda\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\bar{\varphi}_\mu\bar{\varphi}^\mu\right)\right], \tag{4.43}$$

gde je $\bar{\varphi}_\mu = \varphi_\mu/\sqrt{\lambda}$ bezdimenziono polje. Prva dva člana tačno odgovaraju dejstvu I_V, dok je zadnji član mala korekcija jer je kosmološka konstanta λ mala. Tako Vajlova teorija po obliku veoma liči na klasičnu elektrodinamiku u prostoru V_4 (Adler, Bazin i Schiffer, 1965).

Šta onda ne valja u Vajlovoj teoriji? Mada efektivno dejstvo I'_W izgleda dobar kandidat za opis slobodnog elektromagnetnog polja, posmatranje *interakcije* sa drugim poljima odmah dovodi do problema. Tako je, naprimer, interakcija polja φ sa Dirakovim poljima ψ i $\bar{\psi}$ ista, jer oba polja imaju istu težinu $w = -\frac{3}{2}$, dok je razvoj *kvantne teorije* pokazao da polja ψ i $\bar{\psi}$ imaju *suprotne* električne naboje. Sličan komentar vredi i za interakciju sa kompleksnim skalarnim poljem. Ova osobina elektromagnetne interakcije se korektno opisuje uvodjenjem minimalne interakcije

$$\partial_\mu \to (\partial_\mu + ieA_\mu)\,,$$

što sugeriše identifikaciju φ_μ sa $-iA_\mu$.

Tako se pri razmatranju elektromagnetne interakcije umesto lokalne promene dužine uvodi lokalna promena faze polja materije.

Prelazeći na "kompleksni" kovarijantni izvod Vajl je zasnovao današnje shvatanje lokalno invarijantnih teorija unutrašnjih simetrija.

Mada je prvobitna Vajlova ideja odbačena u elektrodinamici, ona je našla svoje prirodno mesto u gravitaciji. Kada je eksperimentalno otkriveno da se u nekim procesima elementarnih čestica na visokim energijama masa može praktično zanemariti, ponovo je oživeo interes za izučavanje teorija invarijantnih u odnosu na promenu skale (na niskim energijama, naravno, ova simetrija je narušena). Ako želimo da u ovu sliku uključimo gravitaciju, onda je prirodno razmatrati teoriju invarijantnu u odnosu na lokalnu promenu skale. U ovom kontekstu Vajlova teorija se odnosi na jednu novu gravitacionu interakciju, čiji su efekti najveći na visokim energijama.

3.2 Skalarno polje i poboljšan TEI

U Rimanovom prostoru simetrija u odnosu na lokalno reskaliranje W_g implicira konformnu simetrija $\widetilde{C}$. Zato se konformne osobine skalarne teorije mogu utvrditi ispitivanjem njenog ponašanja u odnosu na transformacije

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = 2\lambda(x) g_{\mu\nu}(x)\,, \qquad \delta\varphi(x) = -\lambda(x)\varphi(x)\,. \tag{4.44}$$

Varijacije δ i δ_0 su iste zbog $\delta x = 0$.

1. Uobičajena skalarna φ^4 teorija u V_4,

$$I_a = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left(\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + f\varphi^4\right)\,, \tag{4.45}$$

nije invarijantna u odnosu na ove transformacije, pri čemu neinvarijantnost potiče od kinetičkog člana:

$$\delta I_a = \tfrac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\varphi^2\Box\lambda\,, \qquad \Box\lambda \equiv D_\mu(\partial^\mu\lambda)\,.$$

Invarijantnost teorije se može postići dodavanjem pogodnog člana dejstvu. Takav član je dat kao

$$I_b = \tfrac{1}{12} \int d^4x\sqrt{-g}\, R\,\varphi^2 \,.$$

Ovo sledi iz ponašanja skalarne krivine u odnosu na reskaliranje metrike. Zaista, iz relacije

$$g_{\mu\nu} \to s g_{\mu\nu}\,, \qquad R \to s^{-1}\left(R - 3\frac{\Box s}{s} + \frac{3}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial_\mu s \partial_\nu s}{s^2}\right)\,,$$

dobijamo

$$\delta R = -2\lambda R - 6\Box\lambda\,, \qquad \delta(R\varphi^2) = -4\lambda R\varphi^2 - 6\varphi^2\Box\lambda\,,$$

pa se odatle vidi da je dejstvo

$$I_1 \equiv I_a + I_b = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left(\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + f\varphi^4 + \tfrac{1}{12}R\varphi^2\right)\,, \qquad (4.46)$$

invarijantno uopštenje skalarne φ^4 teorije u V_4.

U ravnom prostoru M_4 konformna simetrija dejstva se elegantno izražava koristeći poboljšan TEI. Pri konstrukciji ovog tenzora osnovnu ulogu ima doprinos skalarnih polja. Sada ćemo pokazati da TEI, izračunat iz dejstva I_1, daje, posle prelaza na M_4, upravo poboljšan TEI skalarne φ^4 teorije.

Dinamički TEI skalarne teorije (4.45) dat je izrazom

$$\tau^{(a)}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_a}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\left(\tfrac{1}{2}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\varphi\partial_\rho\varphi + f\varphi^4\right)\,.$$

Ovde je, da bi se pojednostavilo pisanje, faktor $(\sqrt{-g})^{-1}$ uključen u definiciju TEI. Doprinos dodatnog člana $R\varphi^2$ iz I_1 pri variranju po $g^{\mu\nu}$ ima oblik

$$\delta\int d^4x\sqrt{-g}R\varphi^2 = \int d^4x\sqrt{-g}G^{\mu\nu}\varphi^2\delta g_{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\varphi^2\,,$$

gde je $G_{\mu\nu}$ Ajnštajnov tenzor, $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Koristeći relaciju

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\rho(\sqrt{-g}w^\rho)\,, \qquad w^\rho \equiv g^{\mu\nu}\delta\Gamma^r_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\tau_{\mu\tau}\,,$$

i vršeći parcijalne integracije, dobija se

$$\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\varphi^2 = -\int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\varphi^2\,.$$

Tako TEI, koji sledi iz dejstva I_1, ima oblik

$$\begin{aligned}
\theta^{(1)}_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{6} G_{\mu\nu}\varphi^2 + \theta^{(a)}_{\mu\nu} \,, \\
\theta^{(a)}_{\mu\nu} &\equiv \tau^{(a)}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{6}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\varphi^2 \,.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Posle prelaza na M_4 preostaje samo član $\theta^{(a)}_{\mu\nu}$ koji predstavlja poboljšan TEI teorije (4.45).

2. Invarijantno dejstvo I_1 se može posmatrati kao jednostavna teorija koja opisuje dinamiku skalarnog i gravitacionog polja. Variranje po φ i $g_{\mu\nu}$ dovodi do jednačina kretanja:

$$\begin{aligned}
-\Box\varphi + \tfrac{1}{6}R\varphi + 4f\varphi^3 &= 0 \,, \\
\tfrac{1}{6}G_{\mu\nu}\varphi^2 + \theta^{(a)}_{\mu\nu} &= 0 \,.
\end{aligned}$$

Ove jednačine imaju jednu neobičnu osobinu. Naime, trag druge jednačine daje relaciju

$$\varphi\big(-\Box\varphi + \tfrac{1}{6}R\varphi + 4f\varphi^3\big) = 0 \,.$$

koja znači ili $\varphi = 0$, ili da je prva jednačina posledica druge.

Rešenje $\varphi = 0$ nije interesantno, jer tada gravitaciona jednačina postaje trivijalna. Ako bi se u teoriji mogao osigurati klasičan uslov $\varphi = v \neq 0$, onda bi se gravitaciona jednačina svela na Ajnštajnov oblik. Time bi se rešio problem klasičnog limita teorije, koji predstavlja jedan od najvažnijih problema pri konstrukciji realistične Vajlove teorije. Eksplicitno narušenje Vajlove simetrije nametanjem uslova $\varphi = v$ nije zadovoljavajuće jer, izmedju ostalog, kvari kvantne osobine teorije. Sa klasičnog stanovišta može se postaviti pitanje da li je opravdano poći od Vajlove simetrije, da bismo je u jednom trenutku prosto "zabranili". Postoji jedan drugi mehanizam, spontano narušenje simetrije, u kome se uslov $\varphi = v$ dobija dinamički — rešavanjem klasičnih jednačina kretanja. Sa ovog aspekta je posebno interesantna analogna teorija sa kompleksnim skalarnim poljem (Domokos, 1976).

Prethodni problem zavisnosti jednačina kretanja nije specifičnost posmatranog modela, već je suštinski povezan sa invarijantošću dejstva u odnosu na Vajlovo reskaliranje. Pri transformacijama (4.44) promena dejstva $I = I[\varphi, g_{\mu\nu}]$ ima oblik

$$\frac{\delta I}{\delta\lambda} = \frac{\delta I}{\delta g_{\mu\nu}}\, 2g_{\mu\nu} - \frac{\delta I}{\delta\varphi}\varphi \,. \tag{4.48a}$$

Ako dejstvo I opisuje kompletnu teoriju, onda iz ove jednačine sledi da W_g invarijantnost implicira da je trag jednačine kretanja za $g_{\mu\nu}$ proporcionalan jednačini kretanja za φ. S druge strane ako se dejstvo I odnosi samo na polje materije, $I = I_M$, onda prethodna jednačina postaje

$$\frac{\delta I_M}{\delta\lambda} = \sqrt{-g}\tau^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - \frac{\delta I_M}{\delta\varphi}\varphi\,. \tag{4.48b}$$

Koristeći invarijantnost dejstva i jednačinu kretanja za φ dobija se da je trag TEI jednak nuli. Tako ponovo otkrivamo vezu traga TEI sa Vajlovom simetrijom.

3. Mehanizam za dobijanje poboljšanog TEI je interesantan sa gledišta razumevanja njegove uloge u gravitaciji. Pokušaćemo da nadjemo odgovor na pitanje:

da li poboljšan TEI može biti izvor gravitacionog polja?

Posmatrajmo kombinaciju Ajnštajnovog dejstva i uopštene masene φ^4 teorije (Coleman, 1971):

$$\begin{aligned} I_2 &= \int d^4x\sqrt{-g}\,\left[-aR + \left(\mathcal{L}_S + \tfrac{1}{12}R\varphi^2\right)\right] \\ \mathcal{L}_S &\equiv \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \tfrac{1}{2}m^2\varphi^2 + f\varphi^4 + \tfrac{1}{12}R\varphi^2\,, \end{aligned} \tag{4.49}$$

Ova teorija *nema* Vajlovu simetriju zbog prisustva članova aR i $m^2\varphi^2$. Jednačine kretanja za φ i $g_{\mu\nu}$ su

$$\begin{aligned} &-(\Box + m^2)\varphi + \tfrac{1}{6}R\varphi + 4f\varphi^3 = 0\,, \\ &\left(-2a + \tfrac{1}{6}\varphi^2\right)G_{\mu\nu} = -\theta^{(m)}_{\mu\nu}\,, \end{aligned}$$

gde je $\theta^{(m)}_{\mu\nu}$ poboljšan TEI masene skalarne teorije,

$$\theta^{(m)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_S - \tfrac{1}{6}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right)\varphi^2\,.$$

Bez člana $R\varphi^2$ u dejstvu jednačina kretanja za φ zadovoljava princip ekvivalencije: lokalno, u pogodnom referentnom sistemu, ona se može svesti na oblik koji ima ista teorija u odsustvu gravitacionog polja:

$$-(\Box + m^2)\varphi + 4f\varphi^3 = 0\,.$$

No, tada se, u drugoj jednačini, kao izvor gravitacionog polja pojavljuje Belinfanteov TEI.

Sa članom $R\varphi^2$ u dejstvu izvor gravitacije postaje poboljšan TEI, ali se čini da jednačina kretanja za φ narušava princip ekvivalencije, jer član $R\varphi$ u njoj izgleda kao gravitacioni efekat koji se ne može eliminisati nikakvim izborom referentnog sistema. Pokazaćemo da to nije sasvim tačno. Trag druge jednačine kretanja,

$$\left(-2a + \tfrac{1}{6}\varphi^2\right)(-R) = -\left(2m^2\varphi^2 - 4f\varphi^4 + \varphi\Box\varphi\right),$$

kombinovan sa prvom daje relaciju $-2aR = m^2\varphi^2$, koja omogućava da se iz prve jednačine eliminiše član $R\varphi$, posle čega se dobija

$$-(\Box + m^2)\varphi + 4\left(f - \frac{m^2}{48a}\right)\varphi^3 = 0\,.$$

Ova jednačina je praktično ekvivalentna sa polaznom jednačinom za φ, a član koji je prividno narušavao princip ekvivalencije je eliminisan. Tačnije, jedini trag koji je posle svega ostao je promena konstante interakcije uz φ^3, tj. promena interakcije skalarnog polja sa samim sobom na jako malim rastojanjima ($1/a$ je gravitaciona konstanta interakcije). Sa gledišta klasične teorije ova promena je irelevantna.

I tako, u gravitacionoj teoriji (4.49) *efektivno* važi princip ekvivalencije. Ovo razmatranje pokazuje kako se teorija gravitacije sa skalarnim poljem može konzistentno izmeniti tako da izvor gravitacije postane poboljšan TEI.

3.3 Goldstonov bozon kao kompenzator

Skalarno polje se često pojavljuje u kontekstu spontanog narušenja simetrije. Pokazaćemo sada, analogno razmatranju u glavi II, kako se delovi dejstva, koji nisu invarijantni u odnosu na lokalno Vajlovo reskaliranje, mogu uopštiti i postati invarijantni, uz pomoć uvodjenja jednog dodatnog skalarnog polja — kompenzatora (Bergshoeff, 1983). Ovo polje ima veoma jednostavan zakon transformacije pa se može, koristeći simetriju uopštene teorije, lako izbaciti iz teorije zadavanjem algebarskog gradijentnog uslova. U tom smislu ono je trivijalno. Ima više razloga za njegovo uvodjenje:

a) često je postojanje šire simetrije pogodnije u postupku kvantizacije;
b) nekada su pravila rada sa širom simetrijom bolje poznata (slučaj supergravitacije);
c) skalarno polje se može upotrebiti da se nelinearno realizovane simetrije realizuju linearno.

Razmotrićemo, najpre, maseni član za skalarno polje u V_4,

$$-\tfrac{1}{2}m^2\sqrt{-g}\,\varphi^2\,,$$

koji nije invarijantan u odnosu na Vajlovo reskaliranja jer je $\delta\sqrt{-g} = 4\lambda$, $\delta\varphi^2 = -2\lambda$. Uvedimo u teoriju novo skalarno polje $\phi(x)$ težine $w = -1$ koje ćemo, imajući u vidu spontano narušenje simetrije, parametrizovati u obliku

$$\phi(x) = ve^{\sigma(x)/v}\,, \tag{4.50a}$$

gde je $(\phi)_0 = v$ veličina koja karakteriše spontano narušenje simetrije, a $\sigma(x)$ je Goldstonov bozon. Zakon transformacije za σ je nehomogen:

$$\delta\sigma = -v\lambda\,. \tag{4.50b}$$

Sada nije teško uočiti da izraz

$$-\tfrac{1}{2}m^2\sqrt{-g}\,\varphi^2 e^{2\sigma/v}\,,$$

ima simetriju reskaliranja, zbog čega se polje σ naziva kompenzator. Razvijajući u red po σ dobija se maseni član za φ, kao i interakcioni članovi.

Invarijantno dejstvo za Goldstonovo polje σ se može dobiti iz izraza (4.46) zamenom $\varphi \to \phi[\sigma]$, uz $f = 0$. Razvoj u red po σ daje

$$I_\sigma = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma + \tfrac{1}{12}v^2 R(1 + 2\sigma/v + 2\sigma^2/v^2 + \cdots)\right].$$

Polje σ je bezmaseno, osim ako se W_g simetrija ne naruši eksplicitno. Bilo je pokušaja da se maseni član za σ realizuje dodavanjem dejstvu I_σ izraza

$$-\tfrac{1}{16}\mu^2 v^2\sqrt{-g}\,e^{4\sigma/v}\,,$$

koji je W_g–invarijantan. Zaista, razvoj u red po σ sadrži kvadratičan član koji izgleda kao maseni član. Medjutim, ovaj izraz nije prihvatljiv, jer ne iščezava na beskonačnosti gde $\sigma \to 0$. Da bi se generisala masa za σ, potrebno je dodati izraz koji eksplicitno narušava W_g simetriju, kao što je

$$-\tfrac{1}{16}\mu^2 v^2\sqrt{-g}\,\left(e^{2\sigma/v} - 1\right)^2\,.$$

Sledeći primer je dejstvo za masivno Dirakovo polje u V_4. Lako se proverava da je kinetički član W_g–invarijantan. Maseni član nije invarijantan, ali se uvodjenjem kompenzatora može pretvoriti u invarijantan:

$$-m\sqrt{-g}\,\bar\psi\psi e^{\sigma/v}\,.$$

Interesantno je da se na sličan način može uopštiti i Ajnštajnova teorija gravitacije. Uz pomoć polja σ uvodi se modifikovani metrički tenzor

$$\bar g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}e^{2\sigma/v}\,,$$

koji je po konstrukciji W_g–invarijantan. Uopštena Ajnštajnova teorija se definiše zamenom $g_{\mu\nu} \to \bar g_{\mu\nu}$:

$$\bar I_A = I_A[\bar g] = -a\int d^4x\sqrt{-\bar g}\,R\,(\bar g)\,.$$

Vraćanjem na originalne varijable dobija se

$$\bar{I}_A = -a \int d^4x\sqrt{-g}\, e^{\sigma/v}\, [R(g) - 6\Box]\, e^{\sigma/v} .$$

Dejstvo je W_g–invarijantno, jer promena od σ kompenzuje promenu od $g_{\mu\nu}$. Lokalna simetrija dozvoljava izbor gradijentnog uslova $\sigma = 0$, posle čega se ponovo dobija originalna Ajnštajnova teorija.

Postupak se može uopštiti na proizvoljnu teoriju. Neka je dat skup klasičnih polja Φ_a, koja imaju W_g transformacije oblika $\Phi_a \to \Phi_a e^{d_a\lambda}$, i čija je dinamika odredjena dejstvom $I[\Phi_a]$. Tada je lokalno invarijantno uopštenje teorije oblika

$$\bar{I} = I[\bar{\Phi}_a] , \qquad \bar{\Phi}_a \equiv \Phi_a e^{d_a\sigma/v} , \tag{4.51}$$

gde su $\bar{\Phi}_a$ nova, W_g–invarijantna polja uvedena uz pomoć kompenzatora. Simetrija teorije dozvoljava da se izborom uslova $\sigma = 0$ ponovo vratimo na početno dejstvo. Naravno, moguće je izabrati i neki drugi uslov.

Osnovna ideja uvodjenja kompenzatora lako se može primeniti i na druge simetrije. Posmatrajmo masivno vektorsko polje A_μ u M_4, zadato lagranžijanom

$$\mathcal{L}_V = -\tfrac{1}{4}G^2(A) + \tfrac{1}{2}m^2A^2 , \tag{4.52a}$$

gde je $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Zbog prisustva masenog člana ovaj lagranžijan nije invarijantan u odnosu na lokalne $U(1)$ transformacije $\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda$. Uvešćemo skalarno polje $B(x)$, čiji je zakon transformacije nehomogen,

$$\delta B = -m\Lambda .$$

Sada se može definisati novo polje

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{m}\partial_\mu B ,$$

koje je invarijantno u odnosu na posmatrane transformacije. Invarijantno uopštenje početne teorije ima oblik

$$\bar{\mathcal{L}}_V = \mathcal{L}_V(\bar{A}) = -\tfrac{1}{4}G^2(A) + \tfrac{1}{2}m^2A^2 - m(\partial\cdot A)B + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 .$$

Izborom gradijentnog uslova $B(x) = 1$ vraćamo se na početnu formulaciju. Alternativno, lokalna simetrija se može narušiti dodavanjem lagranžijanu $\bar{\mathcal{L}}_V$ neinvarijantnog izraza

$$\mathcal{L}_{GF} = -\tfrac{1}{2}(\partial\cdot A - B)^2 ,$$

tako da efektivna teorija postaje

$$\bar{\mathcal{L}}_V + \mathcal{L}_{GF} = \tfrac{1}{2}A_\mu(\Box + m^2)A^\mu - \tfrac{1}{2}B(\Box + m^2)B . \tag{4.52b}$$

Ova formulacija teorije je veoma pogodna pri razmatranju kvantizacije.

3.4 Opšte napomene

Sada ćemo se osvrnuti na nekoliko tipičnih primera teorija Vajlovog tipa.

1. Skalarna φ^4 teorija se može učiniti lokalno invarijantnom u Rimanovom prostoru V_4 uz pomoć člana $R\varphi^2$ sa tačno odredjenim koeficijentom. Šira klasa teorija se dobija uvodjenjem Vajlovog vektora i prelaskom u W_4:

$$I_3 = \int d^4xb\tfrac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial^*_\mu\varphi\partial^*_\nu\varphi + \omega\varphi^2R - \tfrac{1}{2}F^2 + f\varphi^4\right),$$

(ω je parametar) gde je uveden i kinetički član za Vajlovo polje (Omote, Kasuya, 1977). U okviru Hamiltonove analize razmatrani su uslovi fiksiranja lokalne simetrije i veza sa OTR.

2. Konformni tenzor C_{ijkl} ima jednostavan zakon transformacije u odnosu na lokalne $W(1,3)$ transformacije. Postojali su pokušaji da se, polazeći od dejstva (u prostoru V_4)

$$I_4 = \int d^4x\sqrt{-g}\,C_{ijkl}C^{ijkl},$$

dobije OTR kao fenomenološka teorija, tako što će se član tipa R indukovati posle narušenja lokalne $W(1,3)$ simetrije putem radijacionih popravki (Adler, 1982; Zee, 1983).

3. U Rimanovom prostoru V_4 postoje samo tri invarijante kvadratične po krivini: $R_{ijkl}R^{ijkl}, R_{ij}R^{ij}$ i R^2. Koristeći Gaus–Boneovu teoremu

$$\int d^4x\sqrt{-g}\,(R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2) = \text{const.},$$

vidi se da su samo dve od njih nezavisne. Izaberimo da to budu R^2 i

$$C_{ijkl}C^{ijkl} = R_{ijkl}R^{ijkl} - 2R_{ij}R^{ij} + \tfrac{1}{3}R^2 = 2(R_{ij}R^{ij} - \tfrac{1}{3}R^2).$$

U odnosu na lokalne $W(1,3)$ transformacije veličina C^2 daje invarijantan doprinos dejstvu, dok R^2 ne daje. No, uvodeći skalarno polje član R^2 se može popraviti i bez prelaza na W_4:

$$I_5 = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left(R - \frac{\Box\varphi}{\varphi}\right)^2,$$

slično kao u slučaju I_1. Najopštije dejstvo koje je najviše kvadratično po krivini i ima lokalnu $W(1,3)$ simetriju u V_4 ima oblik (Antoniadis i Tsamis, 1984; Antoniadis, Iliopoulos i Tomaras, 1985)

$$I_5' = \alpha I_4 + \beta I_5 + \gamma I_1 .$$

4. Predjimo sada na Vajl–Kartanov prostor Y_4. Vajlovo dejstvo (4.42) se može direktno uopštiti na Y_4 (Charap i Tait, 1974),

$$I_6 = \int d^4xb\,(\alpha R^2 + \beta F^2)\,,$$

a isto vredi i za I_3 (Kasuya, 1975; Hayashi i Kugo, 1979; Nieh, 1982).

5. Kao što je moguće izabrati $W(1,3)$–invarijantno dejstvo u V_4 bez uvodjenja Vajlovog vektora, moguće je to uraditi i u U_4. Predložen je model u kome gravitacioni deo dejstva ima oblik

$$I_7 = \int d^4xb\,(\varphi^2 R)\,,$$

dok je materija opisana bezmasenim Dirakovim poljem (Obukhov, 1982). Lokalna invarijantnost izraza $I_7 + I_D$ ne zavisi od prisustva Vajlovog polja.

Struktura opšte U_4 teorije sa gledišta simetrije kompleksnog reskaliranja metrike (tetrada) nameće odredjena ograničenja na oblik dejstva (Fukui, Hayashi i Shirafuji, 1985).

6. Interesantna je analiza dejstva

$$\int d^4x\sqrt{-g}\,W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} + I_1\,, \qquad W_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\lambda\mu\nu}\,,$$

sa gledišta uspostavljanja veze izmedju Vajlove teorije i efektivne Rimanove strukture realnog prostor–vremena, koja se vidi u klasičnim eksperimentima (Hochberg i Plunien, 1991).

7. Pomenućemo još jednu varijantu izgradnje lokalne $W(1,3)$ teorije. U teoriji sa lokalnom konformnom simetrijom konstruiše se, najpre, kovarijantni izvod $\overset{c}{\nabla}_\mu\phi$ preko gradijentnih polja $A^{ij}{}_\mu$, B_μ i $C^i{}_\mu$, a zatim se na uobičajeni način mogu naći sve krivine. Posmatrajmo dejstvo

$$I_8 = \int d^4xb\,E^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{ijkl}R^{ij}{}_{\mu\nu}(M)R^{kl}{}_{\lambda\rho}(M)\,,$$

gde je $E^{\mu\nu\lambda\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}/b$. Ako nametnimo "standardni" uslov $R^i{}_{\mu\nu}(P) = 0$, kojim se uspostavlja veza $A^{ij}{}_\mu$ i $b^i{}_\mu$, i iskoristimo jednačinu kretanja za $C^i{}_\mu$, tada

$$C_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{4}\big(\widehat{R}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{6}g_{\mu\nu}\widehat{R}\big)\,, \qquad \widehat{R}_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}(M)\,|_{B=C=0}\,.$$

Posle eliminacije polja $A^{ij}{}_\mu$ i $C^i{}_\mu$, pomoću prethodnih uslova, dejstvo dobija efektivni oblik

$$I_8' = \int d^4xb\,\widehat{C}^{\mu\nu\lambda\rho}\widehat{C}_{\mu\nu\lambda\rho}\,.$$

Tako je lokalna $C(1,3)$ teorija sa 15 gradijentnih polja svedena na $W(1,3)$ teoriju u V_4 sa 4 gradijentna polja (De Wit, 1981; Kaku, 1982; Nepomechie, 1984).

8. Član $\varphi^2 T^2$ u dejstvu je, sa gledišta simetrije, isto tako dobar kao i $\varphi^2 R$, ali nije korišćen u okviru Y_4 teorije. Pitanje fenomenološke vrednosti ovakvog člana je razmatrano u okviru opštije (L_4, g) geometrije (Šijački, 1982; Ne'eman i Šijački, 1988).

9. U fizici se srećemo sa dve veoma različite skale, kvantnom i kosmološkom, čiji odnos definiše tzv. velike brojeve. Pokušavajući da nadje vezu izmedju njih, Dirak je razmatrao mogućnost vremenske zavisnosti faktora proporcionalnosti izmedju kvantnih i gravitacionih jedinica (Dirac, 1973). Ideja se može prirodno razmatrati u okviru Vajlove teorije, gde su fizički zakoni isti za posmatrače koji koriste instrumente sa različitim skalama (Canuto, Adams, Hsieh i Tsiang, 1976).

10. Na kraju još nekoliko napomena. Osnovno pitanje pri razmatranju svake teorije Vajlovog tipa je kako se u takvoj teoriji dobija *klasičan limit*, u kome nema lokalne invarijantnosti u odnosu na promenu skale. Lokalna simetrija se može eksplicitno narušiti, ali u tom slučaju nije jasno zašto smo uopšte polazili od Vajlove simetrije. Metod koji mnogo više zadovoljava i klasične i kvantne zahteve konzistentnosti je spontano narušenje simetrije. Uključivanje materije je ovde od suštinske važnosti. Osnovna uloga skalarnog polja je da obezbedi spontano narušenje lokalne $W(1,3)$ simetrije, kako bi se dobila realistična efektivna teorija gravitacije. Ovo je potpuno različito od one uloge koju skalarno polje ima u skalarno–tenzorskoj teoriji gravitcije (Brans i Dicke, 1961; Smalley, 1986; Kim, 1986).

U lokalnoj $W(1,3)$ teoriji pitanje veličine kosmološke konstante se može razmatrati kao dinamičko pitanje (Antoniadis i Tsamis, 1984). Prisustvo članova tipa R^2 u dejstvu poboljšava osobine renormalizabilnosti teorije, ali istovremeno stvara probleme sa unitarnošću. Ovi problemi, kao i pitanje stabilnosti osnovnog stanja, spadaju u teške probleme, čije razrešenje je nužno za fenomenološko zasnivanje Vajlove teorije.

ZADACI

1. Izvesti zakone transformacije kompenzujućih polja dilataciono–invarijantne teorije. Da li je nužno da ova teorija sadrži i polja $h_k{}^\mu$?
2. Polazeći od pravila transformacije polja φ i kovarijantnog izvoda $\overset{*}{\nabla}_k\varphi$ u odnosu na lokalne $W(1,3)$ transformacije, pokazati da $\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M(\varphi, \overset{*}{\nabla}_k\varphi)$ zadovoljava uslov
$$\delta_0\mathcal{L}'_M + \xi\cdot\partial\mathcal{L}'_M + 4\rho\mathcal{L}'_M = 0\,.$$
Odavde izvesti uslov invarijantnosti za $\widetilde{\mathcal{L}}_M = b\mathcal{L}'_M$.

3. Napisati jednačine kretanja materije u lokalno invarijantnoj $W(1,3)$ teoriji u slučajevima:
   a) skalarne φ^4 teorije,
   b) slobodnog Dirakovog polja, i
   c) slobodnog elektromagnetnog polja.
4. Proveriti da li se jednačine kretanja materije u lokalno invarijantnoj $W(1,3)$ teoriji mogu napisati u Vajl–kovarijantnom obliku:
$$\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \phi} - \overset{*}{\nabla}_\mu \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}_M}{\partial \overset{*}{\nabla}_\mu \phi} = 0\,.$$
5. Naći zakone transformacije jačina polja i odrediti njihove težine u lokalnoj $W(1,3)$ teoriji.
6. Izvesti Bjankijeve identitete u teoriji sa lokalnom $W(1,3)$ simetrijom.
7. Eksplicitnim računom dokazati jednakost kovarijantnih i dinamičkih struja materije, a zatim izvesti diferencijalni identitet $\overset{*}{\nabla}_\mu \delta^\mu = \tau^\mu{}_\mu$.
8. Proveriti važenje identiteta $\overset{*}{\nabla}_\mu \delta^\mu = \tau^\mu{}_\mu$ u slučajevima $(a), (b)$ i (c) iz zadatka 3.
9. U prostoru V_4 je zadata W_g–invarijantna teorija skalarnog polja. Pokazati da je ova teorija, posle prelaza na M_4, invarijantna u odnosu na globalne SKT.
10. Neka je $g^r_{\mu\nu}$ reskalirana metrika Rimanovog prostora V_4, $g^r_{\mu\nu} = s g_{\mu\nu}$.
    a) Izraziti $R^\rho{}_{\mu\lambda\nu}(g^r)$ preko $R^\rho{}_{\mu\lambda\nu}(g)$.
    b) Dokazati jednačinu
$$R_{\mu\nu}(g^r) = R_{\mu\nu} - D_\mu s_\nu - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\lambda s^\lambda - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} s_\lambda s^\lambda + \tfrac{1}{2} s_\mu s_\nu\,,$$
    gde je $s_\mu = \partial_\mu s$, $s^\mu = g^{\mu\nu} s_\nu$, a D_μ je kovarijantni izvod u V_4.
    c) Odatle izvesti odgovarajuću relaciju za R.
11. a) Data je konformna transformacija koordinata u M_4, sa konformnim faktorom s. Pokazati da se iz uslova $R_{\mu\nu}(s\eta) = 0$ dobija konformna Kilingova jednačina u M_4.
    b) Pokazati da beskonačno male konformne transformacije u M_4 zadovoljavaju uslov $R_{\mu\nu}(s\eta) = 0$.
12. Pokazati da je dejstvo koje opisuje interakciju elektromagnetnog i kompleksnog skalarnog polja u Rimanovom prostoru V_4,
$$\begin{aligned} I = \int d^4x \sqrt{-g}\big[& \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^* (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi \\ & + \tfrac{1}{12} R - \lambda(\varphi^*\varphi)^2 - \tfrac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda}\big]\,, \end{aligned}$$
    invarijantno u odnosu na Vajlovo reskaliranje metrike.
13. Neka je $\bar{R}$ krivina Vajlovog prostora W_4 sa koneksijom (4.30), a R odgovarajuća Rimanova krivina. Dokazati identitete:
$$\begin{aligned} \overline{R}_{(\mu\nu)\lambda\rho} &= -g_{\mu\nu} D_{[\lambda} \varphi_{\rho]}\,, \\ \overline{R} &= R + 3 D_\mu \varphi^\mu - \tfrac{3}{2} \varphi_\mu \varphi^\mu\,, \end{aligned}$$
    gde je D_μ Rimanov kovarijantni izvod.
14. Naći zakon transformacije Vajlovog tenzora C_{ijkl} u odnosu na
    a) Vajlovo reskaliranje metrike,
    b) lokalne $W(1,3)$ transformacije.

GLAVA V

HAMILTONOVA DINAMIKA

Klasična dinamika se obično smatra jednim stupnjem u razvoju našeg shvatanja fizičkih pojava u prirodi, koje je danas zasnovano na kvantnoj teoriji. I pored mnogih uspeha kvantne teorije, pri razmatranju nekih fizičkih sistema nailazi se na odredjene probleme. Svi dosadašnji pokušaji izgradnje kvantne teorije gravitacije nisu bili uspešni. Da bi se rešile teškoće na koje nailazimo u kvantnoj teoriji korisno je vratiti se razmatranju osnovnih principa klasične dinamike. Poznavanje klasične Hamiltonove strukture predstavlja važan korak ne samo u razumevanju klasične dinamike već i u izgradnji kvantne teorije.

Teorije osnovnih fizičkih interakcija, kao što su elektroslaba teorija ili gravitacija, teorije su sa lokalnom simetrijom. U takvim teorijama broj dinamičkih varijabli u dejstvu veći je nego što je fizički neophodno. Postojanje ovih nefizičkih varijabli i omogućava realizaciju lokalne simetrije, koja definiše nefizičke promene dinamičkih varijabli. Takvi dinamički sistemi se nazivaju singularni, a njihova analiza zahteva uopštenje uobičajenih metoda. U Hamiltonovom prilazu ovakvi sistemi se karakterišu prisustvom veza izmedju koordinata i impulsa.

Sistematsko izučavanje Hamiltonove dinamike sistema sa vezama započeo je Dirak pre više od četrdeset godina. Pokazalo se da Hamiltonova formulacija klasične teorije sa vezama daje jasnu sliku fizičkih stepeni slobode, objašnjava poreklo lokalne simetrije teorije, i omogućava duboko razumevanje odgovarajuće dinamičke strukture. Klasična struktura sistema sa vezama imala je uticaja ne samo na razvoj metoda kanonske kvantizacije, već i na zasnivanje tzv. kovarijantne kvantizacije preko funkcionalnih integrala. U prvom delu ove glave analizirane su osnovne ideje Dirakovog metoda (Dirac, 1964; Hanson, Regge i Teitelboim, 1976; Sundermeyer, 1982; Henneaux i Teitelboim, 1992), i izložen sistematski način nalaženja generatora lokalne simetrije na osnovu poznate Hamiltonove strukture (Castellani, 1982).

Lokalna Poenkareova teorija predstavlja prirodno uopštenje principa lokalne simetrije na prostorno–vremenske transformacije. Hamiltonova analiza opšte U_4 teorije gravitacije data je u drugom delu ove glave. Ona dovodi do jednostavnog oblika gravitacionog hamiltonijana koji predstavlja uopštenje kanonske ADM forme hamiltonijana iz OTR (Arnowitt, Deser i Misner, 1962; Nikolić, 1984), i omogućava sagledavanje veze dinamičkog i geometrijskog smisla odredjenih veličina. Posebno je analiziran važan slučaj Ajnštajn–Kartanove teorije bez prisustva materije (Nikolić, 1995). Rezultati su predstavljeni u obliku koji omogućava jasno razumevanje fizičkog sadržaja teorije. Ova analiza predstavlja osnovu za prelaz na Aštekarovu formulaciju OTR, unutar koje su postignuti ohrabrujući rezultati u pravcu kanonske kvantizacije gravitacije (dodatak E).

Analiza uticaja asimptotskih uslova na oblik generatora lokalne simetrije omogućava razumevanje složenog problema zakona održanja u gravitaciji, što će biti predmet izlaganja u narednoj glavi.

1. HAMILTONOVA DINAMIKA SISTEMA SA VEZAMA

1.1 Uvod u Dirakovu teoriju

Primarne veze. Da bi izlaganje Hamiltonove dinamike bilo što jednostavnije, počećemo razmatranjem klasičnog sistema sa *konačnim* brojem stepeni slobode, koji je opisan koordinatama q_i $(i = 1, 2, ..., N)$ i dejstvom

$$I = \int dt\, L(q, \dot{q}) \,. \tag{5.1}$$

Radi prelaska na Hamiltonov formalizam definisaćemo, na uobičajeni način, impulse:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv f_i(q, \dot{q}) \qquad (i = 1, 2, ..., N) \,. \tag{5.2}$$

Pri razmatranju jednostavnih dinamičkih teorija ove relacije su takve da se iz njih *sve* brzine mogu izraziti preko impulsa, posle čega se hamiltonijan može jednostavno definisati kao funkcija koordinata i impulsa. U tom slučaju relacije (5.2) definišu impulse kao *nezavisne* funkcije brzina. Mnoge interesantne teorije, kao što su teorije sa unutrašnjom lokalnom simetrijom ili teorija gravitacije, nisu ovako jednostavne. Zato ćemo u daljem izlaganju dopustiti da impulsi nisu nezavisne funkcije brzina, tj. da medju njima postoje *veze*:

$$\phi_m(q, p) = 0 \qquad (m = 1, 2, ..., P) \,. \tag{5.3a}$$

Varijable (q, p) definišu fazni prostor $\Gamma(q, p)$ u kome se posmatra Hamiltonova dinamika. Relacije (5.3a) se nazivaju *primarne veze*, i one odredjuju potprostor Γ_1 od Γ u kome se realizuje kretanje dinamičkog sistema.

Za dalja razmatranja korisno je uvesti pojmove *slabe i jake jednakosti*. Neka je $F(q,p)$ funkcija definisana u nekoj okolini $\mathcal{O}_1$ koja sadrži potprostor Γ_1, i neka je u toj okolini diferencijabilna. Ako je restrikcija funkcije $F(q,p)$ sa Γ na Γ_1 jednaka nuli, kažemo da je funkcija F slabo jednaka nuli. Slabu jednakost ćemo označavati simbolom $\approx$:

$$F(q,p) \approx 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F(q,p)\Big|_{\Gamma_1} = 0\,.$$

Ako funkcija F i svi njeni prvi izvodi iščezavaju na Γ_1, onda kažemo da je F jako jednaka nuli:

$$F(q,p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F\,,\,\partial F/\partial q\,,\,\partial F/\partial p\,\Big|_{\Gamma_1} = 0\,.$$

Za jaku jednakost nećemo koristiti neki poseban simbol, već običan znak jednakosti.

Koristeći ove konvencije, relacije (5.3a), koje definišu Γ_1, pišu se kao slabe jednakosti:

$$\phi_m(q,p) \approx 0 \qquad (m = 1,2,...,P)\,. \tag{5.3b}$$

Ova jednakost nije jaka, jer postoje izvodi od ϕ_m na Γ_1 koji ne iščezavaju. To se najlakše vidi ako se veze reše po P impulsa i napišu u obliku $\phi_m \equiv p_m - g_m(q_i, p_a)$, gde je $a = P+1,\ldots,N$. Zaista, tada je $\partial\phi_m/\partial p_n = \delta^n_m$, što nije nula pri $n = m$.

Interesantno je pitanje odnosa slabe i jake jednakosti: ako je $F \approx 0$, šta se može reći o izvodima od F na Γ_1 ? Variranje veličine F na Γ_1 daje relaciju

$$\delta F\Big|_{\Gamma_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0\,.$$

Pri razmatranju ove jednačine treba uzeti u obzir da veličine q i p nisu nezavisne već zadovoljavaju veze (5.3), dok njihove varijacije zadovoljavaju uslove

$$\frac{\partial\phi_m}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\phi_m}{\partial p_i}\delta p_i \approx 0\,.$$

Koristeći Lagranžov metod neodredjenih množitelja prethodni varijacioni problem dovodi do jednačina

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial q_i} \approx 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_i} - \lambda^m\frac{\partial\phi_m}{\partial p_i} \approx 0\,,$$

gde su λ^m neodredjeni množitelji. Broj ovih jednačina je $2N$, i one, zajedno sa vezama (5.3), odredjuju uslove koje $\partial F/\partial q$, $\partial F/\partial p$ i λ^m zadovoljavaju na Γ_1. Iz njih slede relacije

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\big(F - \lambda^m\phi_m\big) \approx 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial p_i}\big(F - \lambda^m\phi_m\big) \approx 0\,,$$

iz kojih se dobija

$$F - \lambda^m \phi_m \approx \mathcal{O}\,,$$

gde je $\mathcal{O}$ veličina čiji su izvodi slabo jednaki nuli: to može biti nula, konstanta, kao i kvadrat ili viši stepen neke veze. U daljem izlaganju posmatraćemo teorije u kojima je $\mathcal{O} = 0$, t.j. u kojima je ispunjen sledeći uslov:

Ako je F dinamička varijabla koja je slabo jednaka nuli, $F \approx 0$, onda je F jako jednaka nekoj linearnoj kombinaciji veza, $F = \lambda^m \phi_m$.

Hamiltonijan i jednačine kretanja. Posle uvodjenja ovih definicija, vratimo se daljoj izgradnji Hamiltonove dinamike. Razmotrimo sada veličinu

$$H_c = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})\,. \tag{5.4}$$

Njenim variranjem se dobija

$$\delta H_c = \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \approx \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\,, \tag{5.5}$$

uz korišćenje definicije impulsa (5.2). Tako vidimo da se H_c može dovesti na oblik u kome ne zavisi od brzina već samo od q i p. Izražen tako on postaje *kanonski hamiltonijan*.

Relacija (5.5) je slaba jednakost i važi za one varijacije veličina q i p koje su u skladu sa vezama. Variranje uz uslov, kao što smo videli, standardno se razmatra uz pomoć množitelja. Uvedimo zato *totalni hamiltonijan*

$$H_T = H_c + u^m \phi_m\,, \tag{5.6}$$

gde su u^m neodredjeni množitelji. Variranjem ovog izraza po (u, q, p) dobijaju se veze (5.3) i jednačine

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} &= \dot{q}_i\,, \\ \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} \approx -\dot{p}_i\,, \end{aligned} \tag{5.7}$$

gde je zadnja jednakost dobijena koristeći Lagranžove jednačine i definiciju impulsa. Tako dobijamo Hamiltonove jednačine kretanja koje, zbog postojanja veza, sadrže nepoznate množitelje u^m.

Uvodeći *Puasonove zagrade* (PZ),

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\,, \tag{5.8}$$

jednačina kretanja proizvoljne dinamičke veličine $g(q,p)$,

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i}\dot{p}_i\,,$$

može se, uz pomoć Hamiltonovih jednačina (5.7), dovesti na koncizan oblik:

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u^m\{g, \phi_m\} \approx \{g, H_T\}\,. \tag{5.9}$$

Zadnji korak u ovoj relaciji zahteva izvesno objašnjenje. Pošto H_T sadrži proizvoljne množitelje u koji nisu funkcije od q i p, Puasonova zagrada $\{g, H_T\}$ nije odredjena u smislu definicije (5.8). Koristeći formalne osobine PZ u odnosu na zbir i proizvod funkcija, možemo pisati

$$\begin{aligned}\{g, H_T\} &= \{g, H_c\} + \{g, u^\mu\phi_m\} \\ &= \{g, H_c\} + u^m\{g, \phi_m\} + \{g, u^m\}\phi_m\,.\end{aligned}$$

Veličina $\{g, u^m\}$ nije definisana, ali se zadnji član može izbaciti korišćenjem slabe jednakosti, posle čega sledi (5.9). Imajući u vidu da se ovaj član uvek odbacuje, znak slabe jednakosti u (5.9) zamenićemo zbog jednostavnosti znakom obične jednakosti.

Jednačine (5.9) opisuju kretanje sistema u potprostoru Γ_1 dimenzije $2N - P$. Ovo kretanje se opisuje sa $2N$ koordinata (q,p) medju kojima postoji P veza, zbog čega se u jednačinama pojavljuje P množitelja. Eksplicitna eliminacija nekih koordinata je moguća, ali ona često dovodi do narušenja lokalnosti i/ili eksplicitne kovarijantnosti teorije.

Uslovi konzistentnosti. Konzistentnost teorije zahteva da primarne veze budu očuvane u toku dinamičkog razvoja sistema. Iz jednačine kretanja (5.9) sledi

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_c\} + u^n\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0\,. \tag{5.10}$$

Ako su jednačine kretanja teorije neprotivrečne, prethodni uslov se svodi na jedan od sledeća tri slučaja:

a) dobija se identitet 0=0, tj. uslov je automatski zadovoljen posle korišćenja primarnih veza;

b) jednačine ne sadrže množitelje u^m i daju nove, tzv. *sekundarne veze*:

$$\chi_n(q,p) \approx 0\,.$$

c) najzad, jednačine (5.10) mogu predstavljati uslove za odredjivanje nepoznatih množitelja u^m.

Ako se u teoriji pojave sekundarne veze, i one moraju zadovoljavati uslov konzistentnosti tipa (5.10). Postupak se nastavlja dalje, sve dok se svi uslovi konzistentnosti ne svedu na identitete. Na kraju se dobija izvestan broj sekundarnih veza, koje se u mnogo čemu tretiraju kao i primarne veze. Označićemo sve veze u teoriji sa

$$\varphi_s \equiv (\phi_m, \chi_n) \approx 0 \qquad (s = 1, \dots, P, P+1, \dots, P+S)\,, \tag{5.11}$$

gde je P broj primarnih, a S ukupan broj sekundarnih veza. Ove veze definišu fizički potprostor Γ_2 faznog prostora Γ, pri čemu je $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$. Pojmovi slabe i jake jednakosti sada se definišu u odnosu na Γ_2.

Uslovi konzistentnosti veza φ_s daju relacije

$$\dot{\varphi}_s = \{\varphi_s, H_c\} + u^m\{\varphi_s, \phi_m\} \approx 0 \qquad (s = 1, ..., P+S)\,, \tag{5.12}$$

od kojih su neke identički zadovoljene, a druge predstavljaju netrivijalne uslove na u^m. Ako sa $V_a^m(q,p)$ $(a = 1, 2, ..., N_1)$ označimo sva rešenja homogene jednačine, a sa $U^m(q,p)$ partikularno rešenje nehomogene jednačine, onda opšte rešenje za u^m ima oblik

$$u^m = U^m + v^a V_a^m\ ,$$

gde su $v_a = v_a(t)$ proizvoljni koeficijenti. Posle toga totalni hamiltonijan postaje

$$H_T = H' + v^a \phi_a \qquad (a = 1, 2, ..., N_1) \tag{5.13}$$

gde su

$$H' = H_c + U^m \phi_m\ , \qquad \phi_a = V_a^m \phi_m\ .$$

Tako vidimo da i posle zadovoljavanja svih uslova konzistentnosti u teoriji ostaju *proizvoljne funkcije vremena*. Zato vrednosti dinamičkih varijabli u nekom vremenskom trenutku nisu jednoznačno odredjene iz datih početnih uslova.

Veličine prve i druge klase. Za dinamičku varijablu $R(q,p)$ kažemo da je veličina prve klase ako ima nultu PZ sa svim vezama u teoriji:

$$\{R, \varphi_s\} \approx 0\,, \tag{5.14}$$

pri čemu je dovoljno da važi slaba jednakost. U suprotnom slučaju veličina R je druge klase. Dok podela veza na primarne i sekundarne nema većeg značaja, dotle njihova podela na veze prve i druge klase ima duboke dinamičke posledice.

Svaka veličina koja je slabo jednaka nuli jako je jednaka linearnoj kombinaciji veza. Iz toga se vidi da veličina R, koja je prve klase (PK), zadovoljava jaku jednakost

$$\{R, \varphi_s\} = R_s{}^r \varphi_r\,.$$

Odavde sledi da je PZ dve veličine PK takodje veličina PK, što se dokazuje pomoću Jakobijevog identiteta:

$$\begin{aligned}\{\{R,S\},\varphi_s\} &= \{\{R,\varphi_s\},S\} - \{\{S,\varphi_s\},R\} \\ &= \{R_s{}^r\varphi_r, S\} - \{S_s{}^r\varphi_r, R\} \\ &= R_s{}^r\{\varphi_r,S\} + \{R_s{}^r,S\}\varphi_r - S_s{}^r\{\varphi_r,R\} - \{S_s{}^r,R\}\varphi_r \approx 0\ .\end{aligned}$$

Iz definicije veličina H' i ϕ_a, koje odredjuju totalni hamiltonijan H_T, lako se pokazuje da su to veličine PK. Broj nezavisnih proizvoljnih funkcija vremena $v^a(t)$, koje se pojavljuju u jednačinama kretanja, jednak je broju primarnih veza PK ϕ_a.

Prisustvo proizvoljnih množitelja u jednačinama kretanja i njihovim rešenjima znači da varijable (q,p) nisu jednoznačno odredjene na osnovu datih početnih uslova $(q(0),p(0))$, pa zato one i nemaju uvek direktan fizički značaj. Fizičke informacije o sistemu se dobijaju iz funkcija $A(q,p)$ koje ne zavise od proizvoljnih množitelja, i one se nazivaju *opservable*. Fizičko stanje sistema u trenutku t odredjuje se kompletnim skupom opservabli datog sistema u tom trenutku.

Da bismo razumeli ovu situaciju, posmatrajmo neku dinamičku varijablu $g(t)$ u trenutku $t=0$, i njenu promenu u toku malog intervala vremena δt. Početna vrednost $g(0)$ je odredjena vrednostima $(q(0),p(0))$. Vrednost varijable $g(t)$ u trenutku δt dobija se iz jednačina kretanja:

$$\begin{aligned}g(\delta t) &= g(0) + \dot g\delta t = g(0) + \{g,H_T\}\delta t \\ &= g(0) + \delta t\big[\{g,H'\} + v^a\{g,\phi_a\}\big]\ .\end{aligned}$$

Različitim $v^a(t)$ odgovaraju različite vrednosti $g(\delta t)$, pri čemu je razlika oblika

$$\Delta g(\delta t) = \varepsilon^a\{g,\phi_a\}\,, \tag{5.15}$$

gde je $\varepsilon^a = \delta t(v_2^a - v_1^a)$. Ove promene su nefizičke, jer $g_1(\delta t)$ i $g_2(\delta t) = g_1(\delta t) + \Delta g(\delta t)$ odredjuju isto fizičko stanje. Tako dolazimo do zaključka da *primarne veze PK* generišu nefizičke transformacije dinamičkih varijabli, koje ne menjaju fizičko stanje sistema.

Primena dve tranformacije tipa (5.15) sa parametrima ε_1^a i ε_2^a daje rezultate koji zavise od redosleda transformacija. Njihova razlika iznosi

$$\begin{aligned}\Delta^2 g(\delta t) &\equiv \varepsilon_1^a\varepsilon_2^b\big[\{\{g,\phi_b\},\phi_a\} - \{\{g,\phi_a\},\phi_b\}\big] \\ &= \varepsilon_1^a\varepsilon_2^b\{g,\{\phi_a,\phi_b\}\}\,,\end{aligned}$$

gde je zadnja jednakost dobijena korišćenjem Jakobijevog identiteta. Tako dolazimo do zaključka da je i veličina $\{\phi_a,\phi_b\}$ generator nefizičkih transformacija. Pošto su ϕ_a veze PK, njihova PZ je jako jednaka linearnoj kombinaciji veza PK. U ovoj linearnoj kombinaciji mogu se pojaviti i sekundarne veze PK. Tako zaključujemo da *i sekundarne veze PK* mogu biti generatori nefizičkih transformacija.

Da li se sekundarne veze PK mogu pojaviti u H_T? Ponekad se dešava da pojedine dinamičke varijable $q_a = A^a$ imaju ulogu proizvoljnih množitelja. One se pojavljuju *linearno* u kanonskom hamiltonijanu u obliku $A^a\chi_a$, a istovremeno postoje i primarne veze PK oblika $p_a \approx 0$. Uslovi konzistentnosti ovih veza daju $\chi_a \approx 0$, tj. χ_a su sekundarne veze. I one su PK, jer su varijable A^a proizvoljne funkcije vremena. Zaista, postojanje primarnih veza PK $p_a \approx 0$ implicira postojanje člana $v^a p_a$ u totalnom hamiltonijanu, iz čega sledi da su jednačine kretanja za A^a oblika $\dot{A}^a \approx v^a$, pa su A^a (kao i v^a) proizvoljne funkcije vremena. U ovom slučaju H_T sadrži i sekundarne veze PK. Takva situacija se pojavljuje u elektrodinamici, kao i u teoriji gravitacije.

U praktičnim primenama obično se broj proizvoljnih množitelja može odrediti iz simetrije dejstva, pa se tako lako odredjuje i broj veza PK u H_T.

Ovo razmatranje sugeriše mogućnost uopštenja teorija uvodjenjem *proširenog hamiltonijana*

$$H_E = H' + v^a\phi_a + \lambda^b\chi_b\,, \tag{5.16}$$

u kome se pored primarnih veza PK ϕ_a nalaze i one sekundarne veze PK χ_b koje su generatori nefizičkih transformacija, a $\lambda^b(t)$ su nove proizvoljne funkcije. Dirak je pretpostavljao da *sve* sekundarne veze PK generišu nefizičke transformacije, ali to nije uspeo da dokaže. Jednačine kretanja koje slede iz H_E nisu ekvivalentne sa Lagranžovim jednačinama, ali je razlika nefizička.

Primer 1. Posmatrajmo lagranžijan

$$L = \tfrac{1}{2}(\dot{q}_1)^2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}\beta(q_1-q_2)^2\,.$$

Iz definicije impulsa $p_1 = \dot{q}_1 + q_2, p_2 = (1-\alpha)q_1$, sledi da postoji jedna primarna veza,

$$\phi = p_2 + (\alpha - 1)q_1 \approx 0\,,$$

posle čega se lako konstruišu kanonski i totalni hamiltonijan:

$$\begin{aligned} H_c &= \tfrac{1}{2}(p_1-q_2)^2 - \tfrac{1}{2}\beta(q_1-q_2)^2\,,\\ H_T &= H_c + u\phi\,. \end{aligned}$$

Uslov konzistentnosti veze ϕ dovodi do relacije

$$\chi \equiv \dot{\phi} = \{\phi, H_T\} = \alpha(p_1-q_2) - \beta(q_1-q_2) \approx 0\,,$$

čiji smisao zavisi od vrednosti konstanti α i β.

(a) $\alpha = 0$, $\beta = 0$. U ovom slučaju uslov konzistentnosti primarne veze $\phi = p_2 - q_1$ je automatski zadovoljen, ova veza je PK, a množitelj u ostaje proizvoljan.

Za dalju analizu korisno je imati opšti izraz za $\dot{\chi}$:

$$\dot{\chi} = \{\chi, H_T\} = -\beta[(p_1 - q_2) - \alpha(q_1 - q_2)] + (\beta - \alpha^2)u \approx 0\,.$$

(b) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Uslov konzistentnosti primarne veze $\phi = p_2 - q_1$ daje sekundarnu vezu $\chi = -\beta(q_1 - q_2) \approx 0$. Uslov konzistentnosti sekundarne veze $\dot{\chi} \approx 0$ odredjuje množitelj u: $u = p_1 - q_2$. Obe veze ϕ i χ su druge klase.

(c) $\alpha \neq 0$. Iz opšteg uslova konzistentnosti za χ se vidi da dalja analiza bitno zavisi od vrednosti $\beta - \alpha^2$.

Ako je ($c1$) $\beta = \alpha^2$, dobija se $\dot{\chi} = -(\beta/\alpha)\chi$, pa novih veza nema. Pošto je $\{\phi, \chi\} = 0$, veze ϕ i χ su PK, a u ostaje proizvoljan množitelj.

Ako je, pak, ($c2$) $\beta \neq \alpha^2$, tada uslov konzistentnosti za χ dovodi do odredjivanja množitelja u: $u \approx (\beta/\alpha)(q_1 - q_2)$, uz korišćenje veze χ. Veze ϕ i χ su druge klase.

Dirakove zagrade. Posle razjašnjenja fizičkog značaja veza prve klase, preći ćemo na razmatranje veza druge klase. Počećemo prostim primerom dve veze druge klase:

$$q_1 \approx 0\,, \qquad p_1 \approx 0\,.$$

Ove jednačine sugerišu da je stepen slobode (q_1, p_1) trivijalan, i da se može kompletno eliminisati iz teorije. Pošto su veze slabe jednakosti, one se ne smeju koristiti pre izračunavanja PZ. Ovaj problem se može jednostavno rešiti uvodjenjem nove definicije PZ u kojoj je stepen slobode (q_1, p_1) eliminisan:

$$\{f, g\}^* = \sum_{i \neq 1} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)\,.$$

Posle toga se veze $q_1 \approx 0, p_1 \approx 0$ mogu tretirati kao jake jednakosti. Rezultujuća teorija je definisani samo preko varijabli (q_i, p_i), $i \neq 1$.

Prethodna ideja se može uopštiti. Prisustvo veza druge klase označava da u teoriji postoje dinamički stepeni slobode koji nemaju fizičkog značaja. Da bi se ovi stepeni slobode mogli eliminisati, potrebno je izmeniti PZ tako da se one odnose samo na fizički značajne stepene slobode.

Posle izdvajanja svih veza prve klase ϕ_a, preostale veze θ_s su druge klase. Matrica

$$\Delta_{rs} = \{\theta_r, \theta_s\} \qquad (r, s = 1, 2, ..., N_2)$$

je nesingularna. Zaista, ako bi Δ_{rs} bila singularna, tj. $\det(\Delta_{rs}) = 0$, tada bi jednačina $\lambda^s\{\theta_r, \theta_s\} = 0$ imala netrivijalno rešenje za λ^s, a to bi značilo da medju vezama θ_s postoji linearna kombinacija koja je veza prve klase, što je, po pretpostavci, nemoguće.

Broj veza druge klase N_2 mora biti *paran*, jer je matrica Δ_{rs} antisimetrična. Ovo sledi iz osobine da svaka antisimetrična matrica sa neparnim brojem vrsta i kolona ima determinantu koja je jednaka nuli, što nije slučaj sa Δ_{rs}.

Pošto je Δ nesingularna matrica, ona ima inverznu matricu Δ^{-1}. Nova PZ se sada definiše relacijom

$$\{f,g\}^* = \{f,g\} - \{f,\theta_r\}\Delta^{-1}_{rs}\{\theta_s,g\}\,, \tag{5.17}$$

i naziva se *Dirakova zagrada*. Lako se proverava da Dirakova zagrada ima uobičajene osobine PZ: antisimetrična je po f i g, linearna po f i g, zadovoljava pravilo za proizvod i Jakobijev identitet.

Dirakova zagrada bilo koje veze druge klase sa proizvoljnom varijablom daje nulu po konstrukciji:

$$\{\theta_m,g\}^* = \{\theta_m,g\} - \{\theta_m,\theta_r\}\Delta^{-1}_{rs}\{\theta_s,g\} = 0\,,$$

jer je $\{\theta_m,\theta_r\}\Delta^{-1}_{rs} = \delta_{ms}$. To znači da se, posle konstrukcije Dirakovih zagrada, veze druge klase $\theta_m \approx 0$ mogu posmatrati kao jake jednakosti. Jednačine kretanja (5.9) se mogu napisati preko Dirakovih zagrada:

$$\dot{g} \approx \{g,H_T\}^*\,. \tag{5.18}$$

Ovo sledi iz činjenice da je $\{\theta_m,H_T\} \approx 0$, jer je H_T prve klase.

Sada se jasno vidi značaj i razlika izmedju veza prve i druge klase.

> *Veze PK generišu nefizičke transformacije, dok se veze druge klase, posle uvodjenja Dirakovih zagrada, smatraju za jake jednakosti.*

Konstrukcija Dirakovih zagrada, u teorijama koje imaju puno veza druge klase, može se uprostiti koristeći njihovu *osobinu iterativnosti*: najpre se konstruišu preliminarne Dirakove zagrade koristeći neki pogodan podskup veza druge klase; zatim se, sa sledećim podskupom veza, konstruišu nove Dirakove zagrade koristeći preliminarne zagrade umesto Puasonovih, itd. Proces se nastavlja dok se ne iskoriste sve veze druge klase.

PRIMER 2. Izračunajmo Dirakove zagrade u slučajevima (b) i ($c2$) primera 1. U prvom slučaju postoje dve veze druge klase,

$$\theta_1 = p_2 - q_1\,, \qquad \theta_2 = -\beta(q_1 - q_2)\,,$$

čija je PZ oblika $\{\theta_1,\theta_2\} = -\beta$. Odavde se lako nalaze matrice Δ i Δ^{-1}, a zatim i Dirakove zagrade:

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + (1/\beta)\big[\{A,\theta_1\}\{\theta_2,B\} - \{A,\theta_2\}\{\theta_1,B\}\big]\,.$$

Drugi slučaj karakterišu veze

$$\theta_1 = p_2 + (\alpha-1)q_1\,, \qquad \theta_2 = \alpha(p_1 - q_2) - \beta(q_1 - q_2)\,,$$

koje imaju PZ oblika $\{\theta_1, \theta_2\} = \alpha^2 - \beta$, iz čega se lako dobijaju Dirakove zagrade.

Gradijentni uslovi. Nezavisnost opservabli od proizvoljnih množitelja omogućava da se pri izračunavanju ovih veličina proizvoljni množitelji fiksiraju na pogodno izabran način, tako da račun postane jednostavniji i fizički direktniji. Proizvoljni množitelji se obično biraju tako što se zahteva da dinamičke varijable zadovoljavaju tzv. *gradijentne uslove*:

$$\Omega_a(q,p) \approx 0 \qquad (a = 1, 2, ..., N_1)\,. \tag{5.19a}$$

Broj gradijentnih uslova jednak je broju mogućih nefizičkih transformacija.

U svim standardnim situacijama broj nefizičkih transformacija je jednak *ukupnom broju veza PK*. To je slučaj sa elektrodinamikom, kao i sa teorijom gravitacije. Mi ćemo se ovde ograničiti na teorije ovog tipa, dok će o nekim posebnim slučajevima biti reči u narednom poglavlju.

Da bi Ω_a bili dobri gradijentni uslovi, oni treba da zadovoljavaju dodatni zahtev:

$$\det\{\Omega_a, \phi_b\} \neq 0\,, \qquad \phi_b = \text{veze PK}\,. \tag{5.19b}$$

U slučaju kada se sve veze PK nalaze u H_T (ili kad radimo sa proširenim hamiltonijanom), ovaj zahtev osigurava da se iz uslova konzistentnosti

$$\dot{\Omega}_a = \{\Omega_a, H_T\} \approx \{\Omega_a, H_c\} + v^b\{\Omega_a, \phi_b\} \approx 0\,,$$

mogu odrediti svi množitelji v^b. Uslovi (5.19*b*) su potrebni, ali ne i dovoljni, za dobro fiksiranje lokalne simetrije. Dobar gradijentni uslov mora imati *jedinstveno* rešenje za dinamičke varijable i biti *dostižan* iz svake tačke faznog prostora transformacijom lokalne simetrije. U nekim slučajevima je poznato da takvi uslovi i ne postoje globalno, već samo lokalno (vidi npr. Sundermeyer, 1982).

Veze prve i druge klase i gradijentni uslovi definišu fazni potprostor Γ^* od Γ dimenzije

$$N^* = 2N - (2N_1 + N_2)\,,\,.$$

u kome se ostvaruje dinamika fizički značajnih stepeni slobode. Pošto je broj veza druge klase N_2 paran, to je i dimenzija N^* parna.

1.2 Generatori lokalne simetrije

Nefizičke transformacije dinamičkih varijabli se često nazivaju lokalne transformacije simetrije. Reč "lokalna" označava činjenicu da su parametri transformacije proizvoljne funkcije vremena, dok "simetrija" znači da ove transformacije preslikavaju skup jednačina kretanja na samog sebe. U narednom izlaganju opisaćemo algoritam za nalaženje generatora svih lokalnih transformacija simetrije date Hamiltonove teorije (Castellani, 1982). Time će biti dat i odgovor na staro Dirakovo pitanje da li sve sekundarne veze PK generišu lokalne simetrije.

Posmatrajmo teoriju zadatu totalnim hamiltonijanom (5.13), za koju su odredjene sve veze $\varphi_s \approx 0$. Neka je data trajektorija $(q(t), p(t))$ koja polazi iz neke tačke $T_0 \in \Gamma_2$ i zadovoljava jednačine kretanja za neke zadate funkcije $v^a(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}\,, \\ -\dot{p}_i &= \frac{\partial H'}{\partial q_i} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}\,, \\ \varphi_s(q,p) &= 0\,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Takve trajektorije zvaćemo dinamičkim trajektorijama. Posmatrajmo novu, "blisku" trajektoriju $(q(t) + \delta_0 q(t), p(t) + \delta_0 p(t))$, koja polazi iz iste tačke T_0, i zadovoljava jednačine kretanja sa novom funkcijom $v^a(t) + \delta_0 v^a(t)$. Razvijajući ove jednačine kretanja u red po malim veličinama $\delta_0 q, \delta_0 p, \delta_0 v^a$ i koristeći (5.20) dobija se

$$\begin{aligned} \delta_0 \dot{q}_i &= \left(\delta_0 q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \delta_0 p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \left(\frac{\partial H'}{\partial p_i} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \right) + \delta_0 v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}\,, \\ -\delta_0 \dot{p}_i &= \left(\delta_0 q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \delta_0 p_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \left(\frac{\partial H'}{\partial q_i} + v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i} \right) + \delta_0 v^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}\,, \\ & \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_i} \delta_0 q_i + \frac{\partial \varphi_s}{\partial p_j} \delta_0 p_j = 0\,. \end{aligned}$$

Ove jednačine predstavljaju potreban i dovoljan uslov da varirana trajektorija bude dinamička.

Pretpostavimo sada da su varijacije kanonskih varijabli odredjene parametrom $\varepsilon(t)$ i imaju oblik

$$\begin{aligned} \delta_0 q_i(t) &= \varepsilon(t)\{q_i, G\} = \varepsilon(t) \frac{\partial G}{\partial p_i}\,, \\ \delta_0 p_i(t) &= \varepsilon(t)\{p_i, G\} = -\varepsilon(t) \frac{\partial G}{\partial q_i}\,, \end{aligned} \tag{5.21}$$

gde je $G(q,p)$ generator ovih transformacija. Koristeći ove izraze kao i relacije

$$\begin{aligned} \delta_0 \dot{q}_i &= \dot{\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial p_i} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial G}{\partial p_i}, H_T \right\}\,, \\ \delta_0 \dot{p}_i &= -\dot{\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \varepsilon \left\{ \frac{\partial G}{\partial q_i}, H_T \right\}\,, \end{aligned}$$

uslov da varirana trajektorija bude dinamička postaje

$$\begin{aligned}
&\dot\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i} + \varepsilon\big[\{\{H', G\}, q_i\} + v^a\{\{\phi_a, G\}, q_i\}\big] = \frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\delta_0 v^a\,,\\
&\dot\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i} - \varepsilon\big[\{\{H', G\}, p_i\} + v^a\{\{\phi_a, G\}, p_i\}\big] = \frac{\partial\phi_a}{\partial q_i}\delta_0 v^a\,,\\
&\varepsilon\{\varphi_s, G\} = 0\,.
\end{aligned}$$

Ovi uslovi moraju biti ispunjeni za svaku dinamičku trajektoriju $(q(t), p(t))$ u proizvoljnom trenutku t, tj. za svaku tačku (q, p) potprostora Γ_2 definisanog vezama $\varphi_s \approx 0$, kao i za svako $v^a(t)$. Prethodni uslovi se mogu prepisati u obliku

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial p_i}\big[\dot\varepsilon G + \varepsilon\{G, H_T\} - \phi_a\delta_0 v^a\big] \approx 0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial q_i}\big[\dot\varepsilon G + \varepsilon\{G, H_T\} - \phi_a\delta_0 v^a\big] \approx 0\,,\\
&\varepsilon\{\varphi_s, G\} \approx 0\,.
\end{aligned}$$

Ove jednačine treba da imaju rešenja po $\delta_0 v^a$ za svako v^a. Iz prve dve jednačine sledi da izraz u uglastim zagradama zadovoljava relaciju

$$\{F, \dot\varepsilon G + \varepsilon\{G, H_T\} - \phi_a\delta_0 v^a\} \approx 0\,,$$

za svaku dinamičku varijablu $F(q, p)$. Takav izraz je kao generator simetrije ekvivalentan nuli, odakle se dobija

$$\dot\varepsilon G + \varepsilon\{G, H_T\} - \phi_a\delta_0 v^a = \mathcal{O}\,,$$

gde je $\mathcal{O}$ nula, neka konstanta ili kvadrat (ili viši stepen) veze. Uslov da ove jednačine imaju rešenje po δv^a za svako $\varepsilon, \dot\varepsilon$ i v^a je

$$G = \lambda^a\phi_a\,, \qquad \{G, H_T\} = \eta^a\phi_a\,,$$

gde su λ^a, η^a neke funkcije od q i p, a jednakost medju generatorima podrazumeva jednakost do na $\mathcal{O}$. Drugim rečima, potreban i dovoljan uslov da G bude generator lokalne simetrije ima oblik

$$G = V_{PPK}\,, \qquad \{G, H_T\} = V_{PPK}\,, \tag{5.22}$$

gde je V_{PPK} primarna veza prve klase (PPK). Ako je, dakle, lokalna transformacija simetrije oblika (5.21), generator mora biti primarna veza PK, a njegova PZ sa H_T je, takodje, primarna veza PK.

Pretpostavka da je lokalna transformacija simetrije oblika (5.21), gde nema zavisnosti od izvoda parametra $\varepsilon(t)$, previše je restriktivna za mnoge fizičke primene. Fizički je najinteresantniji slučaj kad je generator lokalne simetrije oblika

$$G = \varepsilon(t)G_0 + \dot{\varepsilon}(t)G_1 \,. \tag{5.23a}$$

Prethodna diskusija se sada može ponoviti sa

$$\delta_0 q_i(t) = \{q_i, G\}\,, \qquad \delta_0 p_i(t) = \{p_i, G\}\,,$$

i ona dovodi do sledećih relacija:

$$\begin{aligned}
&\big[\ddot{\varepsilon}G_1 + \dot{\varepsilon}\big(G_0 + \{G_1, H_T\}\big) + \varepsilon\{G_0, H_T\}\big] - \phi_a \delta_0 v^a = \mathcal{O}\,, \\
&\varepsilon\{\varphi_s, G_0\} + \dot{\varepsilon}\{\varphi_s, G_1\} \approx 0\,.
\end{aligned}$$

Uslov rešivosti po $\delta_0 v^a$ za svako $\varepsilon, \dot{\varepsilon}$ i v^a je oblika

$$\begin{aligned}
G_1 &= V_{PPK}\,, \\
G_0 + \{G_1, H_T\} &= V_{PPK}\,, \\
\{G_0, H_T\} &= V_{PPK}\,.
\end{aligned} \tag{5.23b}$$

Primer 2 (nastavak). Nadjimo lokalne simetrije u slučajevima (a) i ($c1$) primera 1. U prvom slučaju postoji jedna primarna veza PK, $\phi = p_2 - q_1$, dok sekundarnih veza nema. Iz uslova (5.22) sledi da je lokalni generator dat izrazom $G = \varepsilon\phi$, dok su odgovarajuće transformacije simetrije oblika

$$\delta_0 p_1 = \varepsilon\,, \qquad \delta_0 q_2 = \varepsilon\,, \qquad \delta_0(\text{ostalo}) = 0\,.$$

U drugom slučaju ϕ je primarna, a χ sekundarna veza PK. Polazeći od $G_1 = \phi$ u (5.23b), iz druge jednačine se dobija $G_0 + \chi = a\phi$, dok treći uslov daje $a = \beta/\alpha$, tako da je lokalni generator oblika

$$G = \varepsilon\,[-\chi + (\beta/\alpha)\phi] + \dot{\varepsilon}\phi\,.$$

Odavde se lako dobijaju odgovarajuće transformacije dinamičkih varijabli. Direktno se može proveriti da ove transformacije ne menjaju oblik jednačina kretanja.

U opštem slučaju generator lokalne simetrije je oblika

$$G = \varepsilon^{(k)}(t)G_k + \varepsilon^{(k-1)}(t)G_{k-1} + \cdots + \varepsilon G_0\,, \tag{5.24a}$$

gde je $\varepsilon^{(n)} = d^n\varepsilon/dt^n$, a uslovi rešivosti po $\delta_0 v^a$ postaju

$$\begin{aligned}
G_k &= V_{PPK}\,, \\
G_{k-1} + \{G_k, H_T\} &= V_{PPK}\,, \\
\cdots \quad &\quad \cdots \\
\{G_0, H_T\} &= V_{PPK}\,.
\end{aligned} \tag{5.24b}$$

Dakle, G_k mora biti primarna veza prve klase, a svi ostali G_n $(n < k)$ su veze prve klase.

Iz uslova (5.24b) se vidi i postupak za konstrukciju generatora. Polazi se od proizvoljne primarne veze PK G_k, izračunava se njena PZ sa H_T i definiše G_{k-1}, itd. Postupak se završava kad dobijemo vezu G_0 čija je PZ sa H_T primarna veza PK. Mi smo pretpostavili da je broj koraka konačan, što je ekvivalentno sa pretpostavkom da je broj generacija sekundarnih veza konačan.

Uslovi (5.24b) odredjuju G_n samo do na primarne veze PK. Zato u svakom koraku konstrukcije niza $\{G_n\}$ treba pokušati sa dodavanjem pogodnih primarnih veza PK, kako bi se postupak što ranije završio. Na taj način se dobija *minimalni niz* $\{G_n\}$. Postupak se završava i kad se u nekom koraku dobije $\{G_n, H_T\} = \chi^n$ $(n \geq 2)$, jer je ova veza kao generator ekvivalentna sa nulom. U tom slučaju veza χ se ne pojavljuje u lokalnom generatoru G.

Dirakova pretpostavka da sve veze prve klase generišu simetriju je zamenjena sledećim stavom:

> *Sve veze PK, osim onih koje se pojavljuju u uslovima konzistentnosti u obliku* χ^n $(n \geq 2)$, *kao i onih koje slede iz* $\{\chi, H_T\} \approx 0$, *delovi su lokalnog generatora simetrije* $G = \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^{(n)} G_n$.

1.3 Elektrodinamika

Teorija polja se može shvatiti kao mehanički sistem u kome su dinamičke varijable definisane u svakoj tački $\boldsymbol{x}$ trodimenzionog prostora, $(q_i, p_i) \to (q_{ix}, p_{ix}) \equiv (q_i(\boldsymbol{x}), p_i(\boldsymbol{x}))$, tj. gde svaki indeks uzima i kontinuiranu vrednost, $i \equiv (i, \boldsymbol{x})$. Tada formalno uopštenje prethodne analize na slučaj teorije polja postaje direktno: suma prelazi u integral (i sumu), parcijalni izvod u funkcionalni izvod, δ^i_k postaje $\delta^i_k \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, itd.

Posmatrajmo važan slučaj elektrodinamike, čija analiza ne samo da predstavlja lepu ilustraciju opšte teorije, već u mnogo čemu ima sličnosti i sa teorijom gravitacionog polja. Dinamika slobodnog elektromagnetnog polja $A^\mu(x)$ opisana je lagranžijanom

$$L = -\tfrac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \tag{5.25}$$

Variranjem lagranžijana po brzinama $\dot{A}^\mu$ dobijaju se impulsi

$$\pi_\mu(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^\mu(x)} = -F_{0\mu}(x) \,,$$

gde je $x \equiv (t, \boldsymbol{x})$. Pošto je polje $F_{\mu\nu}$ antisimetrična veličina lagranžijan ne zavisi od brzine $\dot{A}^0$, pa je odgovarajući impuls nula. Tako se dobija primarna veza

$$\varphi_1 \equiv \pi_0 \approx 0\,.$$

(Broj ovih veza je, ustvari, $1\times\infty^3$, tj. po jedna veza u svakoj tački $\boldsymbol{x}$ trodimenzionog prostora, ali ćemo zbog jednostavnosti govoriti o jednoj vezi.) Preostala tri impulsa su jednaka komponentama električnog polja, $-F_{0\alpha}$. Kanonski hamiltonijan ima oblik

$$H_c = \int d^3x(\pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}) = \int d^3x\big(\tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\pi_\alpha\pi^\alpha - A^0\partial^\alpha\pi_\alpha\big)\,,$$

gde je zadnji član dobijen u tom obliku posle parcijalne integracije.† Ovaj hamiltonijan ne zavisi od brzīnā, jer sadrži samo prostorne parcijalne izvode koordinata i impulsa. Pošto postoji samo jedna primarna veza, totalni hamiltonijan ima oblik

$$H_T = H_c + \int d^3x u(x)\pi_0(x)\,. \tag{5.26}$$

Uz pomoć osnovnih PZ

$$\{A^\mu(x), \pi_\nu(x')\} = \delta^\mu_\nu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,, \qquad t=t'\,,$$

uslov konzistentnosti primarne veze, $\dot{\pi}_0(x) = \{\pi_0(x), H_T\}\approx 0$, dovodi do pojave sekundarne veze:

$$\varphi_2 \equiv \partial^\alpha\pi_\alpha \approx 0\,.$$

Dalje ispitivanje uslova konzistentnosti pokazuje da je $\dot{\varphi}_2 = 0$, tj. nema nikakvih novih uslova. Veze φ_1 i φ_2 su PK, jer je $\{\pi_0, \partial^\alpha\pi_\alpha\} = 0$.

Varijabla A^0 se pojavljuje u H_c u linearnom obliku. Njena jednačina kretanja je oblika

$$\dot{A}^0 = \{A^0, H_T\} = u\,,$$

iz čega se vidi smisao proizvoljnog množitelja u. Odatle sledi da je i varijabla A^0 proizvoljna funkcija vremena. Uočavamo da se sekundarna veza PK već nalazi u H_c u obliku $A^0\varphi_2$, iz čega se vidi da A^0 ima ulogu drugog proizvoljnog množitelja. Tako se ovde, kao i u teoriji gravitacije, realizuje zanimljiva situacija da su sve veze PK prisutne u totalnom hamitonijanu. Prelaz na prošireni hamiltonijan,

$$H_E = H_T + \lambda\,\partial_\alpha\pi^\alpha\,,$$

ekvivalentan je zameni $A^0 \to A^0 - \lambda$ u H_T.

† Pretpostavlja se da je asimptotika dinamičkih varijabli takva da površinski član, koji se dobija pri parcijalnoj integraciji, iščezava. Mogućnost pojave površinskih članova je bitna karakteristika teorije polja.

Potražimo sada generator lokalnih simetrija u obliku (5.24). Polazeći od $G_1 = \pi_0$ dobija se

$$G = \int d^3x(\dot{\varepsilon}\pi_0 - \varepsilon\partial^\alpha\pi_\alpha)\,, \tag{5.27}$$

pa su transformacije lokalne simetrije oblika

$$\delta_0 A^\mu = \partial^\mu\varepsilon\,, \qquad \delta_0\pi_\mu = 0\,,$$

Rezultat je jednak onome što znamo iz Lagranžove analize.

Dosadašnje izlaganje se karakteriše punim uvažavanjem lokalne simetrije teorije. Jedan od standarnih načina fiksiranja ove simetrije je izbor tzv. radijacionog gradijentnog uslova:

$$\Omega_1 \equiv A^0 \approx 0\,, \qquad \Omega_2 \equiv \partial_\alpha A^\alpha \approx 0\,.$$

Broj uslova je jednak broju veza PK, a matrica $\{\Omega_a, \varphi_b\}$ je nesingularna, što se vidi iz eksplicitnog računa.

Gradijentni uslovi se mogu koristiti kao jake jednakosti posle konstrukcije odgovarajućih Dirakovih zagrada. Konstruišimo, najpre, preliminarne Dirakove zagrade koje odgovaraju paru $(\Omega_1, \varphi_1) = (A^0, \pi_0)$. Na osnovu relacija $\{A^0(t,\boldsymbol{x}), \pi_0(t,\boldsymbol{u})\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})$ sledi

$$\Delta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \Delta^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\,,$$

gde je $\delta \equiv \delta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$. Odavde se dobija

$$\begin{aligned}\{M(x), N(y)\}^* = \{M(x), N(y)\} &+ \int d^3u\{M(x), A^0(u)\}\{\pi_0(u), N(y)\} \\ &- \int d^3u\{M(x), \pi_0(u)\}\{A^0(u), N(y)\}\,.\end{aligned}$$

Za sve druge varijable, osim za π_0 i A^0, Dirakove zagrade se svode na obične PZ. S druge strane, znamo da Dirakova zagrada veličina π_0 ili A^0 sa bilo kojom varijablom daje nulu. Stoga se π_0 i A^0 mogu prosto eliminisati iz teorije koristeći gornje uslove kao jake jednačine, dok se za preostale varijable koriste obične PZ. Uzimanje u obzir drugog para (φ_2, Ω_2) daje konačne Dirakove zagrade na skupu transverzalnih varijabli $(A^\alpha_T, \pi^T_\alpha)$:

$$\{A^\alpha_T(x), \pi^T_\beta(x')\} = \delta^\alpha_\beta\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') - \partial^\alpha\partial_\beta\mathcal{D}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,,$$

gde je $\mathcal{D}(\boldsymbol{x}) = (4\pi \mid \boldsymbol{x} \mid)^{-1}$ rešenje jednačine $\partial_\alpha\partial^\alpha\mathcal{D}(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})$.

Dimenzija faznog prostora $\Gamma(A^\mu, \pi_\nu)$ je osam (dva puta više od broja Lagranžovih varijabli); posle fiksiranja dva gradijentna uslova dolazimo do faznog prostora Γ^* dimenzije $N^* = 8 - 2\cdot 2 = 4$, u kome žive transverzalne varijable $(A_T^\alpha, \pi_\beta^T)$.

2. GRAVITACIONI HAMILTONIJAN

2.1 Kovarijantnost i Hamiltonova dinamika

Dinamika elementarnih čestica se opisuje dejstvom koje poseduje globalnu Poenkareovu simetriju, dok je U_4 teorija gravitacije zasnovana na lokalizaciji ove simetrije. Postojanje lokalnih prostorno–vremenskih simetrija implicira neke opšte karakteristike Hamiltonove dinamike, čije poznavanje olakšava analizu teorije.

Ako posmatramo dinamiku gravitacionog sistema, vidimo da su Lagranžove jednačine kretanja *kovarijantne,* tj. ne menjaju oblik pri lokalnim Poenkareovim transformacijama. S druge strane, jednačine kretanja napisane u Hamiltonovom obliku

$$\dot{g} \approx \{g, H_T\}\,,$$

sadrže vreme t nekog posebnog referentnog sistema, pa nisu *eksplicitno* kovarijantne. Interesantno je razjasniti kako se u *Hamiltonovoj* analizi vidi *kovarijantnost* teorije. Kovarijantnost zahteva formulaciju u kojoj se prostorno–vremenske varijable odnose na proizvoljan neinercijalni referentni sistem. Ovakva formulacija je nekad automatski ostvarena pogodnim izborom dejstva. Ako to nije slučaj, onda se početno dejstvo mora pogodno reformulisati.

Kao ilustraciju problema kovarijantnosti dinamike posmatrajmo prost slučaj teorije zadane lagranžijanom $L(q, dq/dt)$, u kojoj je vremenska varijabla definisana u odnosu na neki referentni sistem. Ako uvedemo novo vreme τ kao monotonu funkciju od t, dejstvo se može prepisati u obliku

$$I = \int dt L(q, dq/dt) = \int d\tau L_\tau\,, \qquad L_\tau \equiv \frac{dq^0}{d\tau} L\big(q, \frac{dq/d\tau}{dq^0/d\tau}\big)\,,$$

gde je $q^0 \equiv t$, a $dq^0/d\tau \neq 0$ zbog monotonosti funkcije $\tau(t)$. Novi lagranžijan L_τ se može posmatrati kao funkcija dve koordinate (q^0, q) i vremena τ. Uočavamo da je L_τ homogena funkcija brzina $(dq^0/d\tau, dq/d\tau)$ stepena jedan. Uvodeći odgovarajuće impulse

$$p_0 = \frac{\partial L_\tau}{\partial(\partial q^0/\partial\tau)}\,, \qquad p = \frac{\partial L_\tau}{\partial(\partial q/\partial\tau)}\,,$$

dobija se, uz pomoć Ojlerove teoreme o homogenim funkcijama ili direktnim računom, da je kanonski hamiltonijan jednak nuli:

$$H_c \equiv p_0 \frac{dq^0}{d\tau} + p\frac{dq}{d\tau} - L_\tau = 0.$$

U ovom slučaju postoji bar *jedna* primarna veza. Zaista, p_0 i p su homogene funkcije brzina stepena nula pa mogu zavisiti samo od količnika $(dq/d\tau)/(dq^0/d\tau)$, odakle sledi postojanje jedne primarne veze ϕ. Totalni hamiltonijan je oblika

$$H_T = v\phi\,,$$

gde je v proizvoljan množitelj, a jednačine kretanja su

$$\frac{dg}{d\tau} = v\{g,\phi\}\,.$$

Ove jednačine sadrže *proizvoljnu vremensku skalu* τ. Uvodjenjem nove vremenske varijable τ', oblik jednačina se ne menja:

$$\frac{dg}{d\tau'} = v'\{g,\phi\}\,,$$

gde je $v' = v d\tau/d\tau'$ nova proizvoljna funkcija vremena τ'.

Primer 3. Dinamika slobodne nerelativističke čestice odredjena je lagranžijanom $L = \frac{1}{2}(dq/dt)^2$. Prelazom na proizvoljno vreme τ, dobija se

$$L_\tau = \tfrac{1}{2}(\dot q^2/\dot q^0)\,,$$

gde tačka označava izvod po τ. Iz definicije impulsa, $p = \dot q/\dot q^0$, $p_0 = -\frac{1}{2}(\dot q/\dot q^0)^2$, dobija se primarna veza

$$\phi = p_0 + \tfrac{1}{2}p^2 \approx 0\,,$$

dok je $H_T = v(\tau)\phi$. Uslov konzistentnosti veze ϕ je automatski zadovoljen, i ona je prve klase. Jednačine kretanja su oblika

$$\dot q^0 = v\{q^0,\phi\} = v\,, \qquad \dot q = v\{q,\phi\} = vp\,, \qquad \dot p_0 = \dot p = 0\,.$$

Ove jednačine su kovarijantne u odnosu na izbor vremenske varijable, tj. ne menjaju oblik pri transformacijama $\delta_0 q^0 = \varepsilon$, $\delta_0 q = \varepsilon p$, $\delta_0 p^0 = \delta_0 p = 0$.

Na vreme t se možemo vratiti zadavanjem gradijentnog uslova $\Omega \equiv q^0 - \tau \approx 0$. U tom slučaju jednačine kretanja dobijaju standardan oblik: $v = 1$, $\dot q = p$.

Tako vidimo da se proizvoljnost vremenske skale u Hamiltonovoj teoriji ogleda u postojanju jedne veze *prve klase*, i činjenici da je $H_T = v\phi \approx 0$. Opisani postupak predstavlja opšti metod kojim se svaka teorija, proglašenjem vremenskog parametra t za novu dinamičku varijablu q^0, može dovesti na oblik u kome je vremenska skala proizvoljna. Kovarijantno dejstvo od samog početka sadrži varijablu q^0, pa se automatski dobija $H_T \approx 0$.

U teoriji gravitacije postoji proizvoljnost u izboru ne samo vremenske, već i tri prostorne koordinate. Odgovarajuća Hamiltonova teorija se karakteriše sa bar *četiri* veze prve klase. Broj ovih veza može biti i veći, što zavisi od drugih simetrija teorije.

Na sličan način se može doći do opštih karakteristika Hamiltonove formulacije gravitacije na osnovu poznavanja simetrija odgovarajućeg dejstva.

Svakom parametru lokalne simetrije dejstva odgovara jedna veza prve klase ϕ_a, a dinamička evolucija sistema se opisuje hamiltonijanom $H_T = v^a\phi_a \approx 0$.

Postojanje lokalne simetrije, kao i činjenica da je $H_T \approx 0$, izazivaju izvesne nedoumice u pogledu fizičkog shvatanja gravitacione dinamike. Ove nedoumice se grupišu u dva osnovna pitanja, koja se odnose na definiciju energije gravitacionog polja, i na shvatanje prirode vremena. Ostavljajući pitanje energije za kasnije razmatranje, pomenimo u čemu je *problem prirode vremena*. Vraćajući se na razmatrani primer, uočavamo da je za fizičku interpretaciju dinamičkog parametra evolucije τ potrebno fiksirati lokalnu simetriju teorije. Prirodni gradijentni uslov je oblika

$$\Omega_1 \equiv q^0 - \tau \approx 0\,.$$

On zadovoljava zahtev $\{\phi, \Omega_1\} \neq 0$, i znači da smo od svih mogućih vremena τ izabrali ono koje je jednako q^0 $(= t)$. Interesantna situacija nastaje pri razmatranju gradijentnog uslova

$$\Omega_2 \equiv q^0 \approx 0\,.$$

Formalno, i ovaj uslov ima neophodnu osobinu $\{\Omega_2, \phi\} \neq 0$. S druge strane, on fizički znači da je $t = 0$, tj. da vreme t "ne teče". Ako je konačna, lokalno invarijantna teorija dobijena polazeći od teorije u kojoj ulogu vremena ima t, onda izbor gradijentnog uslova Ω_2 nije dobar, jer narušava zahtev monotonosti prelaza $t \to \tau$. S druge strane, ako je teorija definisana sa L_τ data apriori, bez ikakve veze sa nekom "polaznom" teorijom, dodatni kriterijumi izbora dobrog gradijentnog uslova postaju manje jasni. U gravitaciji se problem izbora vremena može povezati sa asimptotskom strukturom prostor–vremena. Ne ulazeći u dalje razmatranje ovog problema, mi ćemo se u ovom izlaganju zadovoljiti razmatranjem onih situacija u kojima postoji uobičajena interpretacija vremena.

Sada ćemo preći na detaljnije upoznavanje sa oblikom gravitacionog hamiltonijana (Nikolić, 1984).

2.2 Primarne veze

Opšta U_4 teorija gravitacije je definisana lagranžijanom (3.15), koji ćemo zapisati u obliku

$$\widetilde{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}_G\big(R^{ij}{}_{kl}, T^i{}_{kl}\big) + b\mathcal{L}_M\big(\Psi, D_k\Psi\big)\,,$$

gde je Ψ oznaka za polje materije, a $\mathcal{L}_G$ je dat relacijom (3.50). Osnovne dinamičke varijable su $(b^k{}_\mu, A^{ij}{}_\mu, \Psi)$, a odgovarajući impulsi $(\pi_k{}^\mu, \pi_{ij}{}^\mu, \pi)$ se dobijaju iz $\widetilde{\mathcal{L}}$:

$$\pi_k{}^\mu = \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial b^k{}_{\mu,0}}\,, \qquad \pi_{ij}{}^\mu = \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial A^{ij}{}_{\mu,0}}\,, \qquad \pi = \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\Psi_{,0}}\,.$$

Pošto su krivina i torzija definisane preko antisimetričnih izvoda od $b^k{}_\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ one ne sadrže brzine veličina $b^k{}_0$ i $A^{ij}{}_0$, iz čega se lako dobijaju tzv. *sigurne* primarne veze:

$$\phi_k{}^0 \equiv \pi_k{}^0 \approx 0\,, \qquad \phi_{ij}{}^0 \equiv \pi_{ij}{}^0 \approx 0\,. \tag{5.28}$$

Ove veze postoje uvek, nezavisno od vrednosti parametara u lagranžijanu. Sigurne primarne veze imaju suštinski značaj za strukturu teorije. Pored njih, u teoriji se mogu pojaviti i druge primarne veze, što zavisi od konkretnog oblika lagranžijana.

Kanonski hamiltonijan ima standardni oblik:

$$H_c \equiv \int d^3x\mathcal{H}_c\,, \qquad \mathcal{H}_c = \mathcal{H}_M + \mathcal{H}_G\,, \tag{5.29}$$

gde je

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_M &= \pi\Psi_{,0} - \widetilde{\mathcal{L}}_M\,,\\ \mathcal{H}_G &= \pi_k{}^\alpha b^k{}_{\alpha,0} + \tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\alpha A^{ij}{}_{\alpha,0} - \widetilde{\mathcal{L}}_G\,.\end{aligned}$$

Totalni hamiltonijan je definisan izrazom

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + u^k{}_0\phi_k{}^0 + \tfrac{1}{2}u^{ij}{}_0\phi_{ij}{}^0 + (u\cdot\phi)\,, \tag{5.30}$$

gde je ϕ simbolična oznaka za sve *dodatne* primarne veze, ako ih ima.

Nalaženje uslova konzistentnosti sigurnih primarnih veza,

$$\dot\phi_k{}^0 = \{\pi_k{}^0, H_T\} \approx 0\,, \qquad \dot\phi_{ij}{}^0 = \{\pi_{ij}{}^0, H_T\} \approx 0\,, \tag{5.31}$$

znatno se pojednostavljuje ako prethodno ispitamo zavisnost hamiltonijana od $b^k{}_0$ i $A^{ij}{}_0$. Razmatranje ovog problema dovešće nas do zaključka da je $\mathcal{H}_c$ linearan po $b^k{}_0$ i $A^{ij}{}_0$,

$$\mathcal{H}_c = b^k{}_0\mathcal{H}_k - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\mathcal{H}_{ij} + \partial_\alpha D^\alpha\,, \tag{5.32}$$

gde je $\partial_\alpha D^\alpha$ neka trodivergencija, pa će uslovi (5.31) rezultirati u *sekundarnim* vezama:

$$\mathcal{H}_k \approx 0\,, \qquad \mathcal{H}_{ij} \approx 0\,. \tag{5.33}$$

Relacija (5.32) će biti osnovni rezultat izlaganja u ovom odeljku.

2.3 3+1 razlaganje

Nalaženje zavisnosti hamiltonijana od $b^k{}_0$ može se olakšati koristeći tzv. 3+1 razlaganje tetrada, čime se eksplicitno nalazi zavisnost inverzne tetrade $h_k{}^\mu$ od $b^k{}_0$.

Uočimo, najpre, da iz uslova ortogonalnosti

$$b^k{}_\mu h_k{}^\nu = \delta^\nu_\mu\,, \qquad b^k{}_\mu h_l{}^\mu = \delta^k_l\,,$$

slede relacije

$$\begin{aligned}
&{}^3h_a{}^\alpha b^a{}_\beta \equiv (h_a{}^\alpha - h_a{}^0 h_0{}^\alpha/h_0{}^0)b^a{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta\,,\\
&h_b \equiv h_b{}^0/h_0{}^0 = -{}^3h_b{}^\alpha b^0{}_\alpha\,,\\
&h_0 \equiv 1/h_0{}^0 = b^0{}_0 + h_a b^a{}_0\,,\\
&h^\alpha \equiv h_0{}^\alpha/h_0{}^0 = -{}^3h_a{}^\alpha b^a{}_0\,.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Veličina ${}^3h_a{}^\alpha$ je inverzna trijadi $b^a{}_\beta$ pa je, stoga, nezavisna od $b^k{}_0$. Odatle sledi da je 12 veličina $({}^3h_a{}^\alpha, h_b)$ nezavisno od $b^k{}_0$, dok su 4 veličine (h_0, h^α) linearne po $b^k{}_0$. Razlaganjem $h_k{}^\mu$ na ovih 16 veličina dobija se tražena zavisnost $h_k{}^\mu$ od $b^k{}_0$.

Dobijeni rezultati se mogu dovesti na jedan novi oblik, u kome će se jasno videti njihov *geometrijski smisao*.

Veličina h_b je povezana sa normalom na hiperpovrš $\Sigma_0 : x^0 = \text{const.}$. Veza sledi iz činjenice da je vektor $\boldsymbol{l} = (l_k) = (1, h_b)$ normalan na tri bazisna vektora $\boldsymbol{e}_\alpha$ koji leže u Σ_0, $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha = b^0{}_\alpha + h_a b^a{}_\alpha = 0$, i definicije normale:

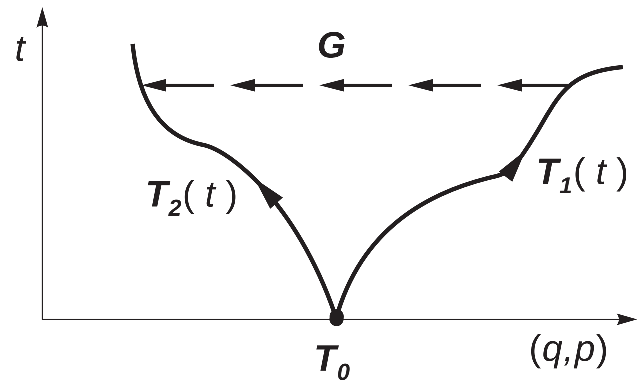
$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{l}}{\sqrt{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}}} = \frac{\boldsymbol{l}h_0{}^0}{\sqrt{g^{00}}}\,. \tag{5.35}$$

Četiri vektora $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_\alpha\}$ čine tzv. ADM bazis. Uvedimo projektore na normalu $\boldsymbol{n}$ i na hiperpovrš Σ_0:

$$(P_\perp)^l_k = n_k n^l\,, \qquad (P_\parallel)^l_k = \delta^l_k - n_k n^l\,.$$

Uz njihovu pomoć svaki vektor se može lako projektovati na $\boldsymbol{n}$ ili Σ_0. Specijalno, projekcija tetradnog vektora $\boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{e}_k$ na Σ_0 data je izrazom

$$(P_\parallel)^l_k\,\boldsymbol{h}_l = (P_\parallel)^l_k\,h_l{}^\mu \boldsymbol{e}_\mu \equiv h_{\bar k}{}^\mu \boldsymbol{e}_\mu\,,$$



Slika 5.1 ADM dekompozicija vremenskog vektora pomeranja

gde, po konvenciji, crta iznad nekog indeksa ‘k’ ne označava drugi indeks ‘$\bar{k}$’, već činjenicu da kontrakcija sa n_k daje nulu. Veličina $h_{\bar{k}}{}^{\mu}$ je potpuno odredjena sa ${}^3h_a{}^{\alpha}$. Zaista, lako se vidi da je

$$h_{\bar{k}}{}^{\mu} = (P_{\|})^l_k\, h_l{}^{\mu} = (P_{\|})^l_k\, {}^3h_l{}^{\mu}\,,$$

gde je ${}^3h_l{}^{\mu} \equiv h_l{}^{\mu} - h_l{}^0 h_0{}^{\mu}/h_0{}^0$ formalno uopštenje izraza ${}^3h_a{}^{\alpha}$, čija je vrednost nula kad je bar jedan indeks jednak nuli. Veličine n_k i $h_{\bar{k}}{}^{\mu}$ ne zavise od $b^k{}_0$.

Razlaganjem vektora $\boldsymbol{e}_0$ u ADM bazisu dobija se

$$\boldsymbol{e}_0 = N\boldsymbol{n} + N^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}\,. \tag{5.36a}$$

Množenjem ove jednačine sa dx^0 vidimo da, geometrijski, koeficijent N odredjuje projekciju vektora vremenskog pomeranja $dx^0\boldsymbol{e}_0$ na normalu, a N^{α} pokazuje za koliko ovaj vektor odstupa od pravca normale (slika 5.1). Veličine N i N^{α} date su izrazima

$$\begin{aligned} N &= \boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{n} = n_k b^k{}_0 = 1/\sqrt{g^{00}}\,,\\ N^{\alpha} &= \boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_{\beta}\,{}^3g^{\beta\alpha} = h_{\bar{k}}{}^{\alpha} b^k{}_0 = -g^{0\alpha}/g^{00}\,, \end{aligned} \tag{5.36b}$$

gde je ${}^3g^{\beta\alpha}$ veličina inverzna od $g_{\alpha\beta}$, odakle se vidi njihova linearnost po $b^k{}_0$.

Tako smo došli do 16 varijabli $(n_k, h_{\bar{k}}{}^{\mu}, N, N^{\alpha})$ koje imaju jasan geometrijski smisao, čija je zavisnost od $b^k{}_0$ jednostavna, i koje se uvek mogu koristiti umesto $h_k{}^{\mu}$.

Za dalje razmatranje korisno je definisati sledeće 3+1 razlaganje vektora:

$$V_k = V_{\bar{k}} + V_{\perp} n_k\,, \tag{5.37}$$

gde je $V_{\bar{k}} \equiv (V_{\|})_k = (P_{\|})_k^l V_l$ a $V_\perp = V^k n_k$. Analogno se definiše razlaganje proizvoljnog tenzora. Koristeći činjenicu da su N i N^α linearne funkcije od $b^k{}_0$, kanonski hamiltonijan (5.32) se lako može dovesti na ekvivalentan oblik:

$$\mathcal{H}_c = N\mathcal{H}_\perp + N^\alpha \mathcal{H}_\alpha - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\mathcal{H}_{ij} + \partial_\alpha D^\alpha \,, \tag{5.38a}$$

gde je

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_k = n_k\mathcal{H}_\perp + h_{\bar{k}}{}^\alpha \mathcal{H}_\alpha \,, \\ &\mathcal{H}_\perp = n^k\mathcal{H}_k \,, \qquad \mathcal{H}_\alpha = b^k{}_\alpha \mathcal{H}_k \,. \end{aligned} \tag{5.38b}$$

2.4 Konstrukcija hamiltonijana

Hamiltonijan materije. Predjimo sada na dokaz relacije (5.38) za hamiltonijan materije. Lagranžijan materije zavisi od vremenskog izvoda polja $\Psi_{,0}$ samo preko kovarijantnog izvoda $D_k\Psi$. Pogodno je izvršiti razlaganje $D_k\Psi$ na ortogonalnu i paralelnu komponentu,

$$D_k\Psi = n_k D_\perp\Psi + D_{\bar{k}}\Psi \equiv n_k h_\perp{}^\mu \nabla_\mu\Psi + h_{\bar{k}}{}^\alpha \nabla_\alpha\Psi \,, \tag{5.39}$$

jer $D_{\bar{k}}\Psi$ ne zavisi ni od brzina, niti od nefizičkih varijabli $(b^k{}_0, A^{ij}{}_0)$, što sledi iz $h_{\bar{k}}{}^0 = 0$. Zamena ovog izraza u lagranžijan materije dovodi do relacije

$$\mathcal{L}_M = \overline{\mathcal{L}}_M(\Psi, D_{\bar{k}}\Psi; D_\perp\Psi, n^k),$$

gde je kompletna zavisnost od brzina i nefizičkih varijabli sadržana u članu $D_\perp\Psi$. Koristeći faktorizaciju determinante

$$b = \det(b^k{}_\mu) = NJ \,, \tag{5.40}$$

gde J ne zavisi od $b^k{}_0$, izraz za impuls postaje

$$\pi \equiv \frac{\partial(b\mathcal{L}_M)}{\partial\Psi_{,0}} = J\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_M}{\partial D_\perp\Psi} \,.$$

Koristeći, dalje, relaciju

$$\nabla_0\Psi \equiv ND_\perp\Psi + N^\alpha\nabla_\alpha\Psi = \Psi_{,0} + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\Sigma_{ij}\Psi$$

za nalaženje brzine $\Psi_{,0}$, kanonski hamiltonijan za materiju dobija oblik (5.38), gde je

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_\alpha^M = \pi\nabla_\alpha\Psi \,, \qquad \mathcal{H}_{ij}^M = \pi\Sigma_{ij}\Psi \,, \\ &\mathcal{H}_\perp^M = \pi D_\perp\Psi - J\overline{\mathcal{L}}_M = J\left(\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_M}{\partial D_\perp\Psi}D_\perp\Psi - \overline{\mathcal{L}}_M\right) \,, \end{aligned} \tag{5.41}$$

a $D^\alpha_M = 0$.

Izrazi za $\mathcal{H}^M_\alpha$ i $\mathcal{H}^M_{ij}$ ne zavise od konkretnog oblika početnog lagranžijana $\mathcal{L}_M$ već samo od transformacionih osobīnā pōljā. Ovi izrazi, takodje, ne zavise od nefizičkih varijabli, jer od njih ne zavisi $\nabla_\alpha\Psi$, i nazivaju se *kinematički* delovi hamiltonijana.

Član $\mathcal{H}^M_\perp$ je *dinamički*, jer zavisi od izbora $\mathcal{L}_M$. On predstavlja Ležandrovu transformaciju funkcije $\mathcal{L}_M$ u odnosu na "brzinu" $D_\perp\Psi$. Posle eliminacije izraza $D_\perp\Psi$, uz pomoć relacije kojom se definiše impuls π, dinamički hamiltonijan se može napisati u obliku

$$\mathcal{H}^M_\perp = \mathcal{H}^M_\perp(\Psi, D_{\bar k}\Psi; \pi/J, n^k)\,,$$

iz čega sledi da $\mathcal{H}^M_\perp$ ne zavisi od nefizičkih varijabli.

Ako je lagranžijan materije singularan, tada nastaju dodatne primarne veze, koje, isto tako, ne zavise od nefizičkih varijabli.

Primer 4. Razmotrimo slučaj kad je polje materije spina $\frac{1}{2}$. Ovaj slučaj je važan, jer se veruje da je veliki deo mase u Vasioni (kvarkovi i leptoni) opisan Dirakovim poljem, čiji je lagranžijan $\widetilde{\mathcal{L}}_D = \frac{1}{2}b\big[i\bar\psi\gamma^k\overleftrightarrow{D}_k\psi - 2m\bar\psi\psi\big]$. Ako kao osnovne dinamičke varijable uzmemo ψ i $\bar\psi$, a njihove impulse označimo sa $\bar\pi$ i π, zaključićemo da u teoriji postoje dodatne primarne veze:

$$\phi \equiv \pi + \tfrac{1}{2}iJ\gamma^\perp\psi \approx 0\,, \qquad \bar\phi \equiv \bar\pi - \tfrac{1}{2}iJ\bar\psi\gamma^\perp \approx 0\,.$$

Ove veze su druge klase, jer

$$\{\phi(\boldsymbol{x}), \bar\phi(\boldsymbol{x}')\} = iJ\gamma^\perp\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,, \qquad \det\gamma^\perp = 1\,.$$

Sledeći opšti postupak dobija se da je kanonski hamiltonijan oblika (5.38a), gde je

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^M_{ij} = \bar\pi\Sigma_{ij}\psi - \bar\psi\Sigma_{ij}\pi\,, \qquad \mathcal{H}^M_\alpha = \bar\pi\nabla_\alpha\psi + (\nabla_\alpha\bar\psi)\pi\,,\\
&\mathcal{H}^M_\perp = -J\tfrac{1}{2}\big[i\bar\psi\gamma^k\overleftrightarrow{D}_{\bar k}\psi - 2m\bar\psi\psi\big]\,.
\end{aligned}$$

Pošto je $\widetilde{\mathcal{L}}_D$ linearan po brzinama sledi $\mathcal{H}^M_\perp = -J\mathcal{L}_D(D_\perp\psi, D_\perp\bar\psi = 0)$, iz čega se dobija zadnja jednačina.

Član $(u\cdot\phi)$ u totalnom hamiltonijanu, koji potiče od dodatnih primarnih veza, ima oblik

$$(u\cdot\phi)_M = \bar u\phi + \bar\phi u.$$

Pošto su veze $(\phi, \bar\phi)$ druge klase, njihov uslov konzistentnosti odredjuje množitelje $(\bar u, u)$, pa nema novih sekundarnih veza. Posle konstrukcije Dirakovih zagrada, veze $(\phi, \bar\phi)$ se mogu koristiti kao jake jednakosti.

Hamiltonijan gravitacije. Konstrukcija gravitacionog hamiltonijana se može ostvariti na sličan način, pri čemu ulogu $D_k\Psi$ preuzimaju

${T^i}_{km}$ i ${R^{ij}}_{km}$. U prvom koraku izvršićemo razlaganje torzije i krivine po zadnja dva indeksa na ortogonalni i paralelni deo:

$$
\begin{aligned}
{T^i}_{km} &= {T^i}_{\bar{k}\bar{m}} + n_k {T^i}_{\perp\bar{m}} + n_m {T^i}_{\bar{k}\perp}\,, \\
{R^{ij}}_{km} &= {R^{ij}}_{\bar{k}\bar{m}} + n_k {R^{ij}}_{\perp\bar{m}} + n_m {R^{ij}}_{\bar{k}\perp}\,.
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Paralelne komponente ${T^i}_{\bar{k}\bar{m}}$ i ${R^{ij}}_{\bar{k}\bar{m}}$ ne zavise od brzina niti od nefizičkih varijabli. Zamena u gravitacioni lagranžijan daje relaciju

$$
\mathcal{L}_G = \overline{\mathcal{L}}_G({T^i}_{\bar{k}\bar{m}}, {R^{ij}}_{\bar{k}\bar{m}}; {T^i}_{\perp\bar{k}}, {R^{ij}}_{\perp\bar{k}}, n^k)\,.
$$

Koristeći faktorizaciju determinante (5.40), relacije koje definišu impulse dobijaju oblik

$$
{\hat{\pi}_i}{}^{\bar{k}} = J\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_G}{\partial {T^i}_{\perp\bar{k}}}\,, \qquad {\hat{\pi}_{ij}}{}^{\bar{k}} = J\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_G}{\partial {R^{ij}}_{\perp\bar{k}}}\,,
$$

gde su ${\hat{\pi}_i}{}^{\bar{k}} \equiv {\pi_i}^\alpha {b^k}_\alpha$ i ${\hat{\pi}_{ij}}{}^{\bar{k}} \equiv {\pi_{ij}}^\alpha {b^k}_\alpha$ “paralelni” impulsi. Brzine ${b^i}_{\alpha,0}$ i ${A^{ij}}_{\alpha,0}$ se izračunavaju iz relacija

$$
\begin{aligned}
&N({T^i}_{\perp\alpha} + {A^i}_{\perp\alpha}) + N^\beta({T^i}_{\beta\alpha} + {A^i}_{\beta\alpha}) = {b^i}_{\alpha,0} - {b^i}_{0,\alpha} + \tfrac{1}{2}{A^{mn}}_0 {(\Sigma^1_{mn})^i}_j {b^j}_\alpha\,, \\
&N{R^{ij}}_{\perp\alpha} + N^\beta {R^{ij}}_{\beta\alpha} = {A^{ij}}_{\alpha,0} - {A^{ij}}_{0,\alpha} + \tfrac{1}{2}{A^{mn}}_0 {(\Sigma^2_{mn})^{ij}}_{kl} {A^{kl}}_\alpha\,,
\end{aligned}
$$

koje se dobijaju iz definicije ${T^i}_{0\alpha}$ i ${R^{ij}}_{0\alpha}$. Posle ovoga kanonski hamiltonijan dobija oblik (5.38), gde je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^G_{ij} &= 2\pi_{[i}{}^\alpha b_{j]\alpha} + 2\pi_{k[i}{}^\alpha {A^k}_{j]\alpha} + \partial_\alpha {\pi_{ij}}^\alpha\,, \\
\mathcal{H}^G_\alpha &= {\pi_i}^\beta {T^i}_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}{\pi_{ij}}^\beta {R^{ij}}_{\alpha\beta} - {b^k}_\alpha \nabla_\beta {\pi_k}^\beta\,, \\
\mathcal{H}^G_\perp &= J\left(\frac{1}{J}{\hat{\pi}_i}{}^{\bar{m}} {T^i}_{\perp\bar{m}} + \frac{1}{2J}{\hat{\pi}_{ij}}{}^{\bar{m}} {R^{ij}}_{\perp\bar{m}} - \overline{\mathcal{L}}_G\right) - n^k \nabla_\beta {\pi_k}^\beta\,, \\
D^\alpha_G &= {b^i}_0 {\pi_i}^\alpha + \tfrac{1}{2}{A^{ij}}_0 {\pi_{ij}}^\alpha\,.
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

Izraze ${T^i}_{\perp\bar{m}}$ i ${R^{ij}}_{\perp\bar{m}}$ iz dinamičkog hamiltonijana $\mathcal{H}^G_\perp$ treba eliminisati pomoću jednačina koje definišu impulse ${\hat{\pi}_i}{}^{\bar{m}}$ i ${\hat{\pi}_{ij}}{}^{\bar{m}}$.

Primer 5. Kao ilustraciju opisanog postupka konstrukcije kanonskog hamiltonijana razmotrićemo primer Ajnštajn–Kartanove teorije. Iz oblika lagranžijana $\widetilde{\mathcal{L}} = -abR$ sledi da se u ovoj teoriji pojavljuju i dodatne primarne veze:

$$
{\pi_i}^\alpha \approx 0\,, \qquad {\phi_{ij}}^\alpha \equiv {\pi_{ij}}^\alpha + 4aJn_{[i}h_{j]}{}^\alpha \approx 0\,.
$$

Pošto lagranžijan ne zavisi od $\dot{b}^i{}_\alpha$, jedini način eliminacije ove brzine iz hamiltonijana (5.29b) jeste korišćenje veze $\pi_i{}^\alpha \approx 0$. Time se, istovremeno, eliminišu svi članovi proporcionalni sa $\pi_i{}^\alpha$ (ili $\hat{\pi}_i{}^{\bar{m}}$) u (5.43). Posle toga se lako dobija

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ij} &= \nabla_\alpha \pi_{ij}{}^\alpha\,, \qquad & \mathcal{H}_\alpha &= \tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\beta R^{ij}{}_{\beta\alpha}\,, \\ \mathcal{H}_\perp &= aJR^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{n}}\,, \qquad & D^\alpha &= \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\pi_{ij}{}^\alpha\,, \end{aligned}$$

gde smo pri izračunavanju $\mathcal{H}_\perp$ koristili vezu $\phi_{ij}{}^\alpha$ i relaciju $\overline{\mathcal{L}}_G = -a(R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{n}} + 2R^{\perp\bar{n}}{}_{\perp\bar{n}})$.

Treba istaći da se ovi rezultati odnose na oblik *kanonskog* hamiltonijana, dok će prisustvo odredjenih množitelja u *totalnom* hamiltonijanu, kao što ćemo uskoro videti, uneti odredjene izmene u prethodno dobijene izraze.

2.5 Konzistentnost teorije i gradijentni uslov

1. Rezultat dosadašnjeg izlaganja je zaključak da se totalni hamiltonijan teorije može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T &= \widehat{\mathcal{H}}_T + \partial_\alpha D^\alpha\,, \\ \widehat{\mathcal{H}}_T &\equiv \widehat{\mathcal{H}}_c + u^i{}_0\pi_i{}^0 + \tfrac{1}{2}u^{ij}{}_0\pi_{ij}{}^0 + (u\cdot\phi)\,, \end{aligned} \tag{5.44a}$$

gde su $\pi_i{}^0, \pi_{ij}{}^\alpha$ i ϕ primarne veze, u su odgovarajući množitelji, trodivergencija $\partial_\alpha D^\alpha$ je napisana kao poseban član, a kanonski hamiltonijan ima oblik

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}_c &= b^k{}_0\mathcal{H}_k - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\mathcal{H}_{ij} \\ &= N\mathcal{H}_\perp + N^\alpha\mathcal{H}_\alpha - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\mathcal{H}_{ij}\,. \end{aligned} \tag{5.44b}$$

Činjenica da je $\widehat{\mathcal{H}}_c$ linearan po nefizičkim varijablama omogućava da se lako nadju uslovi konzistentnosti sigurnih primarnih veza (5.28):

$$\mathcal{H}_\perp \approx 0\,, \qquad \mathcal{H}_\alpha \approx 0\,, \qquad \mathcal{H}_{ij} \approx 0\,. \tag{5.45}$$

Poenkareova teorija gravitacije je invarijantna u odnosu na desetoparametarsku grupu lokalnih Poenkareovih transformacija. Iz opštih razmatranja izloženih na početku ovog odeljka sledi da mora postojati *deset* odgovarajućih veza *prve klase* u hamiltonijanu. Nije teško pogoditi da su to *četiri* veze $(\mathcal{H}_\perp, \mathcal{H}_\alpha)$ koje se odnose na simetriju teorije u odnosu na lokalne translacije, i *šest* veza $\mathcal{H}_{ij}$ koje su odgovorne za simetriju u odnosu na lokalne Lorencove rotacije. Eksplicitan dokaz ostavljamo za naredni odeljak, koji je posvećen pitanju simetrije teorije. Na osnovu te činjenice može se videti da su uslovi konzistentnosti sekundarnih veza (5.45) *automatski zadovoljeni*, jer je PZ sekundarne veze (prve klase) sa hamiltonijanom data kao linearna kombinacija deset veza prve klase.

2. Posmatrano geometrijski lokalna Poenkareova simetrija označava slobodu u izboru četiri koordinate x^μ i orijentaciji Lorencove baze $\boldsymbol{h}_k$. Mada je simetrična formulacija teorije veoma značajna za analizu njene opšte strukture, praktični računi se znatno uprošćavaju ako fiksiramo izbor koordinatnog sistema. Ovo se postiže izborom gradijentnih uslova, čiji je broj jednak broju veza prve klase.

Ako je broj gradijentnih uslova manji od broja veza prve klase, onda se radi o delimičnom fiksiranju simetrije. Takav slučaj nastaje ako se lokalna Lorencova baza izabere tako da vremenski pravac leži duž normale $\boldsymbol{n}$ na hiperpovrš Σ_0:

$$\boldsymbol{h}_0 = \boldsymbol{n}\,. \tag{5.46a}$$

Ovaj izbor definiše *vremenski gradijentni uslov*, kojim se narušava lokalna Lorencova simetrija: dok su medjusobne rotacije vektora $\boldsymbol{h}_a$ i dalje dozvoljene (prostorne rotacije), promena orijentacije vektora $\boldsymbol{h}_0$ (bust transformacija) je zabranjena.

U sistemu (5.46a) normala $\boldsymbol{n}$ ima komponente

$$n_k = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}_k = (1,0,0,0)\,,$$

pa je projekcija vektora $\boldsymbol{V} = (V_k)$ na $\boldsymbol{n}$ jednaka $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} = V_0$. Iz relacije $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}_a = h_a{}^0\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_0$ sledi da se vremenski gradijentni uslov može izraziti zahtevom

$$h_a{}^0 = 0\,, \tag{5.46b}$$

dok iz $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha = b^0{}_\alpha\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}_0$ sledi ekvivalentna relacija:

$$b^0{}_\alpha = 0\,. \tag{5.46c}$$

Pošto vremenski gradijentni uslov fiksira bust simetriju, njegov efekat u hamiltonijanu se ogleda u fiksiranju proizvoljnog množitelja $A^{0c}{}_0$ koji stoji uz vezu $\mathcal{H}_{0c}$. To se lako postiže iz zahteva konzistentnosti na (5.46c),

$$\dot{b}^0{}_\alpha = \{b^0{}_\alpha, H_T\} = \int d^3x'\{b^0{}_\alpha, N'\mathcal{H}'_\perp + N'^\alpha\mathcal{H}'_\alpha\} + A^{0c}{}_0 b_{c\alpha} \approx 0\,,$$

u kome je iskorišćena relacija $\{b^0{}_\alpha, \mathcal{H}_{0c}\} = b_{c\alpha}\delta$.

Posle izbora vremenskog gradijentnog uslova veze $\mathcal{H}_{0c} \approx 0$ i $b^0{}_\alpha \approx 0$ možemo koristiti kao veze druge klase. Konstrukcija preliminarnih Dirakovih zagrada u ovom slučaju je veoma jednostavna. Iz definicije

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + \int \big[\{A, b^0{}_\alpha\}h^{c\alpha}\{\mathcal{H}_{0c}, B\} - \{A, \mathcal{H}_{0c}\}h^{c\alpha}\{b^0{}_\alpha, B\}\big]\,,$$

sledi da se za sve varijable osim za $(b^0{}_\alpha, \pi_0{}^\beta)$, Dirakova zagrada svodi na Puasonovu, dok se $(b^0{}_\alpha, \pi_0{}^\beta)$ mogu eliminisati iz teorije korišćenjem veza $b^0{}_\alpha \approx 0$ i $\mathcal{H}_{0c} \approx 0$.

Opisani postupak predstavlja standardni metod nametanja gradijentnog uslova na kraju izgradnje Hamiltonove formulacije teorije. Često se gradijentni uslov koristi direktno u dejstvu, čime se od samog početka redukuju dinamički stepeni slobode. Takav postupak zahteva posebnu analizu, jer korišćenje veza u početnom dejstvu nije u principu dozvoljeno.

2.6 Ajnštajn-Kartanova teorija

Ajnštajn–Kartanova teorija (3.51) predstavlja neposredno uopštenje OTR. Razmotrićemo neke specifičnosti Hamiltonove analize ove teorije u slučaju kad je polje materije odsutno (Nikolić, 1995). Tada se AK teorija svodi na OTR, a dejstvo ima oblik $I_{HP} = -a\int d^4x\, bR$, koji ćemo, sledeći terminologiju iz OTR, zvati Hilbert–Palatinijevim oblikom.

Koristeći relaciju

$$bR = -\tfrac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}_{mnkl} b^k{}_\lambda b^l{}_\rho R^{mn}{}_{\mu\nu}\,,$$

gde je $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}_{mnkl} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{mnkl}$, dejstvo teorije se može zapisati u obliku

$$I_{HP} = \tfrac{1}{2}a\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}_{mnkl} b^k{}_\lambda b^l{}_\rho \big(\partial_\mu A^{mn}{}_\nu + A^m{}_{s\mu}A^{sn}{}_\nu\big)\,, \tag{5.47}$$

gde je $a = (2\kappa)^{-1} = (16\pi G)^{-1}$.

Hamiltonijan i veze. Osim sigurnih primarnih veza, $\pi_i{}^0 \approx 0$ i $\pi_{ij}{}^0 \approx 0$, u ovom slučaju postoje i dodatne primarne veze,

$$\pi_i{}^\alpha \approx 0\,, \qquad \phi_{ij}{}^\alpha \equiv \pi_{ij}{}^\alpha - a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn} b^m{}_\beta b^n{}_\gamma \approx 0\,, \tag{5.48}$$

koje su saglasne sa rezultatom dobijenim u primeru 5.

Pošto je lagranžijan linearan po brzinama $\dot{A}$, kanonski hamiltonijan je dat relacijom $\mathcal{H}_c = -\mathcal{L}(\dot{A} = 0)$. Eksplicitnim računom se dobija

$$\mathcal{H}_c = b^i{}_0\mathcal{H}_i - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\mathcal{H}_{ij} + \partial_\alpha D^\alpha\,, \tag{5.49}$$

gde je

$$\mathcal{H}_i = -\tfrac{1}{2}a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^j{}_\alpha R^{mn}{}_{\beta\gamma}\,, \qquad \mathcal{H}_{ij} = -a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^m{}_\alpha T^n{}_{\beta\gamma}\,,$$
$$D^\alpha = \tfrac{1}{2}a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^m{}_\beta b^n{}_\gamma A^{ij}{}_0\,.$$

Nije teško videti, koristeći $\phi_{ij}{}^\alpha$, da su veličine $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_{ij}$ i D^α ekvivalentne sa odgovarajućim izrazima iz primera 5. Oblik koji ovde koristimo je pogodniji za direktno poredjenje sa Lagranžovim formalizmom, jer su posle eliminacije svih impulsa veze u teoriji date kao funkcije polja.

Totalni hamiltonijan ima oblik

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + u^i{}_0\pi_i{}^0 + \tfrac{1}{2}u^{ij}{}_0\pi_{ij}{}^0 + u^i{}_\alpha\pi_i{}^\alpha + \tfrac{1}{2}u^{ij}{}_\alpha\phi_{ij}{}^\alpha\,.$$

Uslovi konzistentnosti sigurnih primarnih veza daju deset novih veza:

$$\mathcal{H}_i \approx 0\,, \qquad \mathcal{H}_{ij} \approx 0\,. \tag{5.50a}$$

Uslovi konzistentnosti veza $\pi_i{}^\alpha$ imaju oblik

$$\chi_i{}^\alpha \equiv \tfrac{1}{2}a\varepsilon^{\alpha 0\beta\gamma}_{ijmn}\,(b^j{}_0R^{mn}{}_{\beta\gamma} - 2b^j{}_\beta\underline{R}^{mn}{}_{0\gamma}) \approx 0\,, \tag{5.50b}$$

gde crta ispod $R^{mn}{}_{0\gamma}$ označava da je izraz $\dot{A}^{mn}{}_\gamma$ zamenjen sa $u^{mn}{}_\gamma$ (jednačina kretanja za $A^{mn}{}_\gamma$ ima oblik $\dot{A}^{mn}{}_\gamma = u^{mn}{}_\gamma$). Ove relacije predstavljaju uslove za odredjivanje množitelja $u^{mn}{}_\gamma$. Broj od 12 uslova $\chi_i{}^\alpha \approx 0$ je nedovoljan za potpuno odredjivanje $u^{mn}{}_\alpha$, ali će se dodatni uslovi ovog tipa naći kasnije. Najzad, zahtev konzistentnosti veza $\phi_{ij}{}^\alpha$ dovodi do relacija

$$\chi_{ij}{}^\alpha \equiv -a\varepsilon^{\alpha 0\beta\gamma}_{ijmn}\,(b^m{}_0T^n{}_{\beta\gamma} - 2b^m{}_\beta\underline{T}^n{}_{0\gamma}) \approx 0\,, \tag{5.50c}$$

gde crta ispod $T^n{}_{0\gamma}$ označava da umesto $\dot{b}^n{}_\gamma$ stoji $u^n{}_\gamma$ ($\dot{b}^n{}_\gamma = u^n{}_\gamma$ na osnovu jednačina kretanja). Medju 18 relacija $\chi_{ij}{}^\alpha \approx 0$ ima 12 uslova za odredjivanje množitelja $u^m{}_\gamma$ i 6 veza. Ukupan broj sekundarnih veza iznosi 10+6=16. U daljem izlaganju izostavićemo pisanje crte ispod $R^{mn}{}_{0\gamma}$ i $T^n{}_{0\gamma}$ zbog jednostavnosti.

Prethodni uslovi konzistentnosti se mogu zapisati u obliku

$$\begin{aligned} &(-\mathcal{H}_i, \chi_i{}^\alpha): &\quad \chi_i{}^\mu &\equiv \tfrac{1}{2}a\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}_{ijmn}\,b^j{}_\nu R^{mn}{}_{\rho\sigma} \approx 0\,,\\ &(\mathcal{H}_{ij}, \chi_{ij}{}^\alpha): &\quad \chi_{ij}{}^\mu &\equiv -a\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}_{ijmn}\,b^m{}_\nu T^n{}_{\rho\sigma} \approx 0\,. \end{aligned}$$

Iz prvog uslova se dobijaju relacije

$$h_k{}^\mu R^k{}_i - \tfrac{1}{2}h_i{}^\mu R \approx 0\,, \tag{5.51a}$$

koje prepoznajemo kao Ajnštajnove jednačine za gravitaciono polje bez prisustva materije. One se lako mogu dovesti na prostiji oblik $R_{ij} = 0$. Od ukupno 16 ovih jednačina njih 4 su veze ($\mathcal{H}_i \approx 0$), dok preostalih 12 služi za odredjivanje množitelja $u^{ij}{}_\alpha$ ($\chi_i{}^\alpha \approx 0$). Iz drugog uslova se dobija da torzija iščezava,

$$T^k{}_{\mu\nu} \approx 0\,, \tag{5.51b}$$

što je posledica odsustva materije. Medju ove 24 jednačine ima 12 veza ($T^k{}_{\alpha\beta} \approx 0$) i 12 uslova na množitelje $u^k{}_\alpha$ ($T^k{}_{0\alpha} \approx 0$).

Uslovi konzistentnosti sekundarnih veza ne daju nove veze. Zaista, uslov konzistentnosti za $\mathcal{H}_i$ je automatski ispunjen,

$$\dot{\mathcal{H}}_i = \nabla_\alpha \chi_i{}^\alpha + A^m{}_{i0}\mathcal{H}_m \approx 0\,, \tag{5.52a}$$

dok uslov konzistentnosti veze $\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}T^k{}_{\alpha\beta} \approx 0$,

$$\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}(b^m{}_0 R^i{}_{m\alpha\beta} - 2b^m{}_\alpha R^i{}_{m0\beta}) \approx 0\,, \tag{5.52b}$$

daje dodatne jednačine za odredjivanje množitelja $u^{ij}{}_\alpha$.

Medju primarnim vezama ima 10 veza prve klase $(\pi_i{}^0, \pi_{ij}{}^0)$, i 30 druge klase $(\pi_i{}^\alpha, \phi_{ij}{}^\alpha)$; od ukupno 16 sekundarnih veza, njih 10 je prve klase $(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_{ij})$, a preostalih 6 su druge klase. Prema tome, ukupan broj veza prve i druge klase iznosi $N_1 = 20$, $N_2 = 36$, redom. Uzimajući u obzir da svakoj vezi prve klase odgovara jedan gradijentni uslov, kao i da je broj nezavisnih komponenti polja jednak $N = 40$, ukupan broj fizičkih stepeni slobode u teoriji iznosi

$$N^* = 2N - (2N_1 + N_2) = 80 - 76 = 4\,.$$

Rezultat opisuje 4 gravitaciona stepena slobode u faznom prostoru, čemu odgovaraju 2 stepena slobode u konfiguracionom prostoru.

Odredjeni množitelji. Postojanje 20 veza prve klase povezano je sa činjenicom da su varijable $(b^i{}_0, A^{ij}{}_0)$ i množitelji $(u^i{}_0, u^{ij}{}_0)$ proizvoljne funkcije vremena; postojanje 30 primarnih veza druge klase ogleda se u činjenici da množitelji $(u^i{}_\alpha, u^{ij}{}_\alpha)$ postaju odredjene funkcije preostalih dinamičkih varijabli. Iz relacije $T^i{}_{0\alpha} \approx 0$ i definicije veličine $R^{ij}{}_{0\alpha}$ sledi

$$\begin{aligned} u^k{}_\alpha &= \nabla_\alpha b^k{}_0 - A^k{}_{m0} b^m{}_\alpha\,,\\ u^{ij}{}_\alpha &\equiv R^{ij}{}_{0\alpha} + \nabla_\alpha A^{ij}{}_0\,, \end{aligned}$$

posle čega se odredjivanje $u^{ij}{}_\alpha$ svodi na eliminaciju veličina $R^{ij}{}_{0\alpha}$ iz odgovarajućih relacija.

Doprinos odredjenih množitelja totalnom hamiltonijanu odredjuje se polazeći od relacija

$$\begin{aligned} &u^i{}_\alpha \pi_i{}^\alpha = \partial_\alpha(b^i{}_0\pi_i{}^0) - b^i{}_0\nabla_\alpha\pi_i{}^\alpha - A^{ij}{}_0\pi_{[i}{}^\alpha b_{j]\alpha}\,,\\ &\tfrac{1}{2}u^{ij}{}_\alpha\phi_{ij}{}^\alpha = \partial_\alpha(\tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\phi_{ij}{}^\alpha) - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\nabla_\alpha\phi_{ij}{}^\alpha + \tfrac{1}{2}R^{ij}{}_{0\alpha}\phi_{ij}{}^\alpha\,. \end{aligned}$$

Koristeći dekompoziciju

$$R^{ij}{}_{0\alpha}\phi_{ij}{}^\alpha = R^{ij}{}_{0\alpha}\pi_{ij}{}^\alpha + 4aJR^{\perp\bar{n}}{}_{0\bar{n}} = b^i{}_0(R^{mn}{}_{i\alpha}\pi_{mn}{}^\alpha + 4aJR^{\perp\bar{n}}{}_{i\bar{n}})\,,$$

totalni hamiltonian dobija oblik

$$\mathcal{H}_T \equiv b^i{}_0\overline{\mathcal{H}}_i - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\overline{\mathcal{H}}_{ij} + \partial_\alpha \overline{D}^\alpha + u^i{}_0\pi_i{}^0 + \tfrac{1}{2}u^{ij}{}_0\pi_{ij}{}^0 \,, \tag{5.53}$$

gde komponente $\overline{\mathcal{H}}_i$, $\overline{\mathcal{H}}_{ij}$ i $\overline{D}^\alpha$ uključuju doprinose odredjenih množitelja:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{H}}_{ij} &= \mathcal{H}_{ij} + 2\pi_{[i}{}^\alpha b_{j]\alpha} + \nabla_\alpha \phi_{ij}{}^\alpha = 2\pi_{[i}{}^\alpha b_{j]\alpha} + \nabla_\alpha \pi_{ij}{}^\alpha \,, \\
\overline{\mathcal{H}}_i &= \mathcal{H}_i + 2aJR^{\perp\bar{n}}{}_{i\bar{n}} + \tfrac{1}{2}R^{mn}{}_{i\beta}\pi_{mn}{}^\beta - \nabla_\alpha \pi_i{}^\alpha \\
&= \tfrac{1}{2}R^{mn}{}_{i\beta}\pi_{mn}{}^\beta - n_i J\overline{\mathcal{L}} - \nabla_\alpha \pi_i{}^\alpha \,, \\
\overline{D}^\alpha &= D^\alpha + b^i{}_0\pi_i{}^\alpha + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\phi_{ij}{}^\alpha = b^i{}_0\pi_i{}^\alpha + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\pi_{ij}{}^\alpha \,.
\end{aligned}$$

Pri izračunavanju $\overline{\mathcal{H}}_i$ koristili smo da je $\mathcal{H}_i = aJ(n_i R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{n}} - 2h_{\bar{i}}{}^\alpha R^{\perp\bar{n}}{}_{\alpha\bar{n}})$, iz čega sledi

$$\mathcal{H}_i + 2aJR^{\perp\bar{n}}{}_{i\bar{n}} = aJn_i(R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{n}} + 2R^{\perp\bar{n}}{}_{\perp\bar{n}}) \equiv -n_i J\overline{\mathcal{L}} \,.$$

Interesantno je zapaziti da se izrazi za $\overline{\mathcal{H}}_{ij}$ i $\overline{D}^\alpha$ u potpunosti podudaraju sa oblikom (5.43), što je posledica uračunavanja doprinosa odredjenih množitelja. S druge strane, iz oblika $\overline{\mathcal{H}}_i$ sledi

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{H}}_\alpha &= \tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\beta R^{ij}{}_{\alpha\beta} - b^k{}_\alpha \nabla_\beta \pi_k{}^\beta \,, \\
\overline{\mathcal{H}}_\perp &= \tfrac{1}{2}\hat{\pi}_{ij}{}^{\bar{m}} R^{ij}{}_{\perp\bar{m}} - J\overline{\mathcal{L}} - n^k \nabla_\beta \pi_k{}^\beta \,,
\end{aligned}$$

pa se, u poredjenju sa (5.43), uočava odsustvo članova πT. Podsetimo se instrukcije da u dobijenim izrazima množitelje $u^i{}_\alpha$ i $u^{ij}{}_\alpha$ treba eliminisati koristeći uslove koji ih odredjuju. Imajući ovo na umu zaključujemo da je član $\pi_i{}^\beta T^i{}_{0\beta} = \pi_i{}^\beta(NT^i{}_{\perp\beta} + N^\alpha T^i{}_{\alpha\beta})$ odsutan iz hamiltonijana, pošto jednačina $T^i{}_{0\beta} = 0$ upravo služi za odredjivanje množitelja. Množitelji $R^{mn}{}_{\perp\bar{r}} = (R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\perp\bar{r}}, R^{\perp\bar{n}}{}_{\perp\bar{r}})$ su odredjeni relacijama $R^{\bar{n}}{}_{\bar{r}} \equiv R^{\perp\bar{n}}{}_{\perp\bar{r}} + R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{r}} = 0$ i $R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\perp\bar{r}} = R_{\perp\bar{r}}{}^{\bar{m}\bar{n}}$ dok je izraz $R^{\perp\bar{n}}{}_{\perp\bar{n}}$ u $\overline{\mathcal{L}}$ jednak $-R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{r}}$, pa se konačno dobija

$$\overline{\mathcal{H}}_\perp = \tfrac{1}{2}\hat{\pi}_{\bar{m}\bar{n}}{}^{\bar{r}} R_{\perp\bar{r}}{}^{\bar{m}\bar{n}} - \hat{\pi}_{\perp\bar{n}}{}^{\bar{r}} R^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{r}} - aJR^{\bar{m}\bar{n}}{}_{\bar{m}\bar{n}} - n^k \nabla_\beta \pi_k{}^\beta \,.$$

Komentari. Različit oblik hamiltonijana (5.49), od onog dobijenog u primeru 5, posledica je činjenice da je svaki kanonski hamiltonijan definisan samo do na primarne veze. Kakve posledice ima različit izbor *kanonskog* hamiltonijana na strukturu veza i *totalnog* hamiltonijana? Ako kanonski hamiltonijan iz primera 5 označimo sa $\mathcal{H}_c'$, njegova veza sa izrazom (5.49) je oblika

$$\mathcal{H}_c' = \mathcal{H}_c + t^{ij}{}_\alpha \phi_{ij}{}^\alpha \,,$$

gde su t poznati koeficijenti. Odavde sledi da se totalni hamiltonijan $\mathcal{H}'_T$ dobija iz $\mathcal{H}_T$ zamenom

$$u^{ij}{}_\alpha \to u'^{ij}{}_\alpha = u^{ij}{}_\alpha - t^{ij}{}_\alpha \,.$$

Dalje ispitivanje uslova konzistentnosti dovodi do istog oblika sekundarnih veza i jednačina za odredjivanje množitelja $u^i{}_\alpha$ i $u'^{ij}{}_\alpha$. Prema tome, konačan totalni hamiltonijan $\mathcal{H}'_T$, u kome su množitelji odredjeni, ima isti oblik kao i $\mathcal{H}_T$.

Pošto je AK teorija bez materije ekvivalentna Ajnštajnovoj teoriji, prirodno je očekivati da se u Hamiltonovom formalizmu može eliminisati 36 varijabli $(A^{ij}{}_\alpha, \pi_{ij}{}^\alpha)$, posle čega bi teorija bila definisana preko tetrada i njihovih impulsa $(b^i{}_\mu, \pi_i{}^\mu)$. Analiza ove mogućnosti se uprošćava ako usvojimo vremenski gradijentni uslov, $b^0{}_\alpha \approx 0$, što se efektivno svodi na:

a) prelaz $\perp \to 0$ i $\bar{k} \to a$,

b) eliminaciju para $(b^0{}_\alpha, \pi_0{}^\beta)$ uz pomoć veza, i

c) korišćenje Puasonovih zagrada za preostale varijable.

Nametanjem ovog uslova, veza $\mathcal{H}_{a0}$ postaje efektivno druge klase, što, zajedno sa 36 veza druge klase, daje ukupno 36+6 jednačina koje se mogu iskoristiti za eliminaciju 42 varijable. Korišćenjem 6+18 jednačina $b^0{}_\alpha = 0$, $\pi_0{}^\alpha = 0$, $T^a{}_{\alpha\beta} = 0$ i $\pi_{ab}{}^\alpha = 0$, lako se mogu eliminisati polja $b^0{}_\alpha, A^{ab}{}_\alpha$ i njihovi impulsi:

$$\begin{aligned} b^0{}_\alpha &= 0\,, & \pi_0{}^\alpha &= 0\,, \\ A^{ab}{}_\alpha &= \Delta^{ab}{}_\alpha\,, & \pi_{ab}{}^\alpha &= 0\,. \end{aligned}$$

Struktura preostalih 18 jednačina $\pi_a{}^\alpha = 0$ i $\phi_{a0}{}^\alpha = 0$ je takva da se iz njih *ne mogu* eliminisati varijable $(A^{a0}{}_\alpha, \pi_{a0}{}^\alpha)$, kao što smo želeli.

Postavljeni cilj se može ostvariti uvodjenjem odredjene kanonske transformacije varijabli. Oblik ove kanonska transformacija se najjednostavnije odredjuje prelazeći na novo dejstvo

$$I'_{HP} = a \int d^4x \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}_{mnkl} \left[-\partial_\mu (b^k{}_\lambda b^l{}_\rho) A^{mn}{}_\nu + b^k{}_\lambda b^l{}_\rho A^m{}_{s\mu} A^{sn}{}_\nu \right] \,,$$

koje se od starog razlikuje za četvorodivergenciju. Dodavanje četvorodivergencije menja definicije impulsa, i ekvivalentno je kanonskoj transformaciji varijabli polazne teorije. Eliminacija izvoda od A iz dejstva daje mogućnost da se ove veličine izraze preko drugih uz pomoć veza, čime se ostvaruje postavljeni zadatak. Ovaj postupak je iskorišćen u Dodatku E za analizu tetradne formulacije teorije i uvodjenje Aštekarovih (kompleksnih) varijabli.

U dosadašnjem razmatranju član $\partial_\alpha D^\alpha$ u totalnom hamiltonijanu je nastao kao uzgredni rezultat analize teorije. On osigurava da hamiltonijan ne zavisi od izvoda impulsa. Oblik ovog člana se menja ako se lagranžijan promeni za četvorodivergenciju. Njegovo prisustvo "kvari" iskaz da je H_T jednak linearnoj kombinaciji veza prve klase. Kakav je njegov značaj? Pretpostavimo da tetradna polja imaju asimptotiku na prostornoj beskonačnosti koja odgovara Švarcšildovom rešenju. Tada se u formalizmu zasnovanom na dejstvu I'_{HP} dobija rezultat $\int d^3x\mathcal{H}_T \approx \int d^3xD^\alpha{}_{,\alpha} = M$, koji sugeriše veoma interesantnu interpretaciju. Ako hamiltonijan H_T posmatramo kao generator evolucije sistema koji na dinamičke varijable deluje preko Puasonovih zagrada, onda se izraz $\int d^3x\partial_\alpha D^\alpha$, posle pretvaranja u površinski integral, može zanemariti, jer je kao generator ekvivalentan nuli; hamiltonijan postaje efektivno jednak linearnoj kombinaciji veza prve klase, u skladu sa opštim razmatranjima. S druge strane, prisustvo člana $\partial_\alpha D^\alpha$ u $\mathcal{H}_T$ omogućava interpretaciju hamiltonijana kao energije sistema.

Ovaj rezultat je na izvestan način dobijen slučajno, jer do sada nismo sistematski vodili računa o površinskim članovima. U glavi VI ćemo videti da postoje principi koji odredjuju površinske članove i omogućavaju interpretaciju hamiltonijana kao energije sistema.

ZADACI

1. Naći Dirakove zagrade za slobodnu elektrodinamiku ako važi gradijentni uslov $\Omega_1 = A^3 \approx 0$ (za kompletno fiksiranje lokalne simetrije mora se naći još jedan uslov).
2. Teorija Abelovog antisimetričnog polja je odredjena dejstvom
$$I = \tfrac{1}{8}\int d^4x\left(-\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} + A_\mu A^\mu\right),$$
gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
a) Pokazati da u teoriji postoje sledeće veze
$$\begin{aligned} &\text{prve klase :} && \phi^{\alpha 0} \equiv \pi^{\alpha 0}\,, \qquad \widetilde{\chi}^{0\beta} \equiv -\tfrac{1}{2}{}^*F^{0\beta} + \partial_\alpha\pi^{\alpha\beta}\,, \\ &\text{druge klase :} && \phi^{\mu} \equiv \pi^{\mu} + \tfrac{1}{2}{}^*B^{0\mu}\,, \qquad \phi^{\alpha\beta} \equiv \pi^{\alpha\beta}\,, \\ & && \widetilde{\chi}^{0} \equiv \partial_\alpha\pi^{\alpha} + \tfrac{1}{4}A^0\,. \end{aligned}$$
b) Naći lokalne simetrije teorije.
c) Kako izgledaju Dirakove zagrade koje odgovaraju vezama druge klase?
3. Teorija neabelovog antisimetričnog polja zadata je dejstvom
$$I = \tfrac{1}{8}\int d^4x\left(-\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}B^a_{\mu\nu}F^a_{\lambda\rho} + A^a_\mu A^{a\mu}\right),$$
gde je $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu$, a f^a_{bc} su strukturne konstante neabelove (poluproste) grupe G. Naći veze i lokalne simetrije teorije.
4. Pokazati da se u teoriji
$$L = \dot{q}_1\dot{q}_3 + \tfrac{1}{2}q_2(q_3)^2\,,$$
pojavljuju veze $p_2, q_3^2, \ldots \approx 0$. Naći generator lokalne simetrije i odgovarajuće transformacije. Ponoviti prethodnu analizu ako se za veze izaberu $p_2, q_3, \ldots \approx 0$.

5. Naći generator lokalne simetrije teorije

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_2}{q_1}\right)^2 + q_1^2 q_2\,, \qquad q_1 \neq 0\,.$$

6. Born–Infeldova elektrodinamika je definisana dejstvom

$$I = \int \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})}\,.$$

Naći hamiltonijan i veze u teoriji.

7. Relativistička slobodna čestica opisana je dejstvom

$$I = -m \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}\,.$$

a) Dokazati da je dejstvo invarijantno u odnosu na vremensku reparametrizaciju $\delta\tau = \varepsilon(\tau)$, $\delta_0 x^\mu = -\varepsilon(\tau)\dot{x}^\mu$.
b) Pokazati da u teoriji postoji veza $\phi \equiv p^2 - m^2 \approx 0$.
c) Naći oblik Hamiltonovih jednačina kretanja u slučaju gradijentnog uslova $\Omega \equiv x^0 - \tau \approx 0$, i konstruisati odgovarajuće Dirakove zagrade.

8. Dinamički sistem je zadat totalnim hamiltonijanom $H_T = \int dt\,(\mathcal{H}_0 + u^m G_m)$, gde su $G_m(q,p)$ veze PK koje zadovoljavaju uslove:

$$\{G_m, G_n\} = f_{mn}{}^r G_r\,, \qquad \{G_m, \mathcal{H}_0\} = h_m{}^n G_n\,,$$

a $f_{mn}{}^r$ i $h_m{}^n$ su funkcije od q i p. Pokazati da je dejstvo

$$I[q,p] = \int dt\,(p_a\dot{q}^a - \mathcal{H}_0 - u^m G_m)$$

invarijantno u odnosu na transformacije

$$\begin{aligned}
&\delta q^a = \varepsilon^m\{q^a, G_m\}\,, \qquad \delta p_a = \varepsilon^m\{p_a, G_m\}\,,\\
&\delta u^m = -\dot{\varepsilon}^m - \varepsilon^r u^s f_{rs}{}^m - \varepsilon^r h_r{}^m\,.
\end{aligned}$$

9. *a*) Naći veze i hamiltonijan za neabelovu gradijentnu teoriju čije je dejstvo dato u (A.11).
b) Konstruisati odgovarajuće dejstvo $I[A,\pi]$. Zatim naći dejstvo $I[A]$ koje se iz $I[A,\pi]$ dobija eliminacijom π uz pomoć jednačina kretanja.

10. Dokazati da se determinanta od $b^k{}_\mu$ može dovesti na oblik $b = NJ$, gde J ne zavisi od $b^k{}_0$.

11. Dokazati identitete:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_{i\mu} b_{j\nu} b_{k\rho} b_{l\sigma} = b\varepsilon_{ijkl}\,, \qquad b \equiv \det(b^i{}_\mu)\,,\\
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}_{ijkl}\, b^l{}_\sigma = -2b(h_i{}^\mu h_{[j}{}^\nu h_{k]}{}^\rho + h_k{}^\mu h_{[i}{}^\nu h_{j]}{}^\rho + h_j{}^\mu h_{[k}{}^\nu h_{i]}{}^\rho)\,,\\
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}_{ijkl}\, b^k{}_\rho b^l{}_\sigma = -4b h_{[i}{}^\mu h_{j]}{}^\nu\,.
\end{aligned}$$

12. Dokazati identitet

$$\varepsilon_{nijk}X_l{}^n+\varepsilon_{lnij}X_k{}^n+\varepsilon_{klni}X_j{}^n+\varepsilon_{jkln}X_i{}^n=0 \qquad (X_{in}=-X_{ni})\,.$$

Zatim izvesti relaciju $\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{mnil}b_{j\gamma}b^l{}_\beta-(i\leftrightarrow j)=\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{mjil}b_{n\gamma}b^l{}_\beta-(m\leftrightarrow n)$.

13. a) Pokazati da veza $\phi_{ij}{}^\alpha$ iz jednačine (5.48) ima isti oblik kao u primeru 5.
b) Dokazati da veličina $\mathcal{H}_i$ iz (5.49) ima oblik $\mathcal{H}_i=aJ(n_iR^{\bar m\bar n}{}_{\bar m\bar n}-2h_{\bar i}{}^\alpha R^{\perp\bar n}{}_{\alpha\bar n})$. Pokazati da je ovaj izraz, do na $\phi_{ij}{}^\alpha$, ekvivalentan sa rezultatom primera 5.
c) Dokazati da su izrazi $\mathcal{H}_{ij}$ i D^α iz (5.49) ekvivalentni sa rezultatom primera 5.
d) Koristeći vezu $\phi_{ij}{}^\alpha$ pokazati da je izraz $\pi_{im}{}^\alpha\pi^m{}_j{}^\beta R^{ij}{}_{\alpha\beta}$ proporcionalan sa $\mathcal{H}_\perp$.

14. Polazeći od relacije $[\nabla_\alpha,\nabla_\beta]b^i{}_\gamma=R^i{}_{j\alpha\beta}b^j{}_\gamma$ i uslova $T^i{}_{\alpha\beta}=\nabla_\gamma T^i{}_{\alpha\beta}=0$, dokazati da važi:

$$a)\ R^i{}_{\alpha\beta\gamma}+R^i{}_{\gamma\alpha\beta}+R^i{}_{\beta\gamma\alpha}=0\,,\qquad b)\ R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\gamma\delta\alpha\beta}\,.$$

15. Pokazati da u AK teoriji važi $\dot T^i{}_{\alpha\beta}=2\nabla_{[\alpha}u^i{}_{\beta]}+2u^{im}{}_{[\alpha}b_{m\beta]}$. Eliminacijom množitelja $u^i{}_\alpha$ i $u^{ij}{}_\alpha$ uz pomoć jednačina $T^i{}_{0\alpha}=0$ i $R^{ij}{}_{0\alpha}=u^{ij}{}_\alpha-\nabla_\alpha A^{ij}{}_0$ izvesti relaciju

$$\dot T^i{}_{\alpha\beta}+A^i{}_{m0}T^m{}_{\alpha\beta}=b^m{}_0R^i{}_{m\alpha\beta}+b^m{}_\beta R^i{}_{m0\alpha}+b^m{}_\alpha R^i{}_{m\beta0}\,,$$

iz koje sledi (5.52b). Koristeći uslove $T^i{}_{\alpha\beta}=\dot T^i{}_{\alpha\beta}=0$ dokazati da je

$$a)\ R^i{}_{0\beta\gamma}+R^i{}_{\gamma0\beta}+R^i{}_{\beta\gamma0}=0\,,\qquad b)\ R_{\alpha\beta\gamma0}=R_{\gamma0\alpha\beta}\,.$$

16. Koristeći Bjankijev identitet $\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}\nabla_\alpha R^{ij}{}_{\beta\gamma}=0$ i jednačine za eliminaciju množitelja $u^i{}_\alpha$ i $u^{ij}{}_\alpha$ kao u prethodnom zadatku, dokazati relaciju (5.52a).

17. Dokazati da u AK teoriji važi Bjankijev identitet

$$\nabla_0R^{ij}{}_{\beta\gamma}+\nabla_\gamma R^{ij}{}_{0\beta}+\nabla_\beta R^{ij}{}_{\gamma0}=0\,,$$

koristeći Hamiltonove jednačine kretanja.

GLAVA VI

SIMETRIJE I ZAKONI ODRŽANJA

Lokalne simetrije u teoriji gravitacije prirodno se mogu analizirati u okviru Hamiltonovog formalizma za sisteme sa vezama. U_4 teorija gravitacije poseduje po konstrukciji lokalnu Poenkareovu simetriju. Poznato je da su lokalne simetrije u Hamiltonovom prilazu povezane sa prisustvom proizvoljnih množitelja u H_T, tj. sa postojanjem veza prve klase. Staro pitanje o odnosu izmedju prirode veza i oblika generatora lokalne simetrije jednačina kretanja razrešio je Kastelani, koji je razvio algoritam za konstrukciju svih generatora lokalne simetrije (Castellani, 1982). Metod zahteva poznavanje hamiltonijana i algebre veza prve klase, i daje izraze za generatore koji deluju na sve varijable, fizičke i nefizičke, u faznom prostoru. Koristeći Kastelanijev metod u ovoj glavi su nadjeni generatori lokalne Poenkareove simetrije U_4 teorije gravitacije. Bitan korak u ovom postupku je nalaženje algebre veza PK. Interesantna dopuna ovih razmatranja data je u dodatku F, gde je primenjen obrnuti postupak: na osnovu poznatih generatora lokalne simetrije dobijene su informacije o algebri veza PK.

Postojanje lokalne simetrije dejstva dovodi, preko Neterine teoreme, do diferencijalnog zakona održanja struje. Održanje odgovarajućeg naboja, koji je dat kao integralna veličina, dobija se samo uz odredjene pretpostavke o asimptotskom ponašanju osnovnih dinamičkih varijabli, koje su obično ispunjene u standardnim teorijama polja u ravnom prostor–vremenu. Situacija u teoriji gravitacije, kao i u drugim opšte kovarijantnim teorijama, složenija je. Jasna i konzistentna slika o gravitacionoj energiji kao očuvanoj veličini nastala je tek kad je potpuno shvaćena uloga *graničnih uslova*.

Svaka teorija polja definisana je jednačinama kretanja i graničnim uslovima. Fizički sadržaj pojma simetrije zavisi ne samo od simetrije dejstva, već i od simetrije graničnih uslova. Izbor asimptotskih uslova za gravitacione dinamičke varijable definiše asimptotsku strukturu prostor–vremena, tj. osnovno stanje ili vakuum. Simetrija dejstva se narušava do simetrije vakuuma, koja ima ulogu fizičke simetrije i odredjuje zakone održanja. Asimptotski uslovi dovode do spontanog narušenje simetrije, pri čemu pravi fizički sadržaj poseduje gravitaciono polje definisano u odnosu na dati vakuum. Mogućnost definisanja pojma energije (i drugih, globalno održanih veličina) bitno zavisi od simetrija rešenja jednačina kretanja u asimptotskoj oblasti (asimptotske simetrije).

Polazaći od pretpostavke o globalnoj Poenkareovoj simetriji U_4 teorije u asimptotskoj oblasti, nije teško naći odgovarajuće generatore. Pošto ovi generatori deluju na dinamičke varijable preko Puasonovih zagrada, oni, u teoriji polja, moraju imati dobro definisane funkcionalne izvode. Pažljiva analiza ovog zahteva dovodi, zbog netrivijalnih asimptotskih uslova, do pojave odredjenih *površinskih članova* u korektnim izrazima za generatore. Pokazaćemo da ovi članovi predstavljaju fizičke vrednosti održanih veličina, kao što su energija, impuls i ugaoni momenat (Blagojević i Vasilić, 1988).

1. LOKALNE SIMETRIJE

Nalaženje oblika generatora lokalne simetrije omogućava razjašnjenje odnosa lokalne simetrije i algebre veza PK, kao i razumevanje uloge asimptotskih uslova na formulisanje zakona održanja u gravitaciji.

1.1 Algebra veza

Poznavanje algebre veza prve klase je neophodno, kako za ispitivanje konzistentnosti teorije, tako i za konstrukciju generatora simetrije.

U prethodnom izlaganju je pokazano da uslovi konzistentnosti sigurnih primarnih veza dovode do sekundarnih veza

$$\mathcal{H}_\perp \approx 0\,, \qquad \mathcal{H}_\alpha \approx 0\,, \qquad \mathcal{H}_{ij} \approx 0\,,$$

gde su veličine $\mathcal{H}_\perp$, $\mathcal{H}_\alpha$ i $\mathcal{H}_{ij}$ date kao sume doprinosa materije i gravitacionog polja, definisanih u jednačinama (5.41) i (5.43). Ograničavajući se na slučaj kad u teoriji nema dodatnih veza, može se pokazati da su ispunjene relacije (Nikolić, 1986; 1992)

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_{kl}\} = \tfrac{1}{2} f_{ij}{}^{mn}{}_{kl}\mathcal{H}_{mn}\delta\,,\\
&\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_{\alpha}\} = 0\,,\\
&\{\mathcal{H}_{\alpha}, \mathcal{H}'_{\beta}\} = (\mathcal{H}'_\alpha\partial_\beta + \mathcal{H}_\beta\partial_\alpha - \tfrac{1}{2}R^{ij}{}_{\alpha\beta}\mathcal{H}_{ij})\delta\,,
\end{aligned} \tag{6.1a}$$

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_{\perp}\} = 0\,,\\
&\{\mathcal{H}_{\alpha}, \mathcal{H}'_{\perp}\} = (\mathcal{H}_\perp\partial_\alpha - \tfrac{1}{2}R^{ij}{}_{\alpha\perp}\mathcal{H}_{ij})\delta\,,\\
&\{\mathcal{H}_{\perp}, \mathcal{H}'_{\perp}\} = -({}^3g^{\alpha\beta}\mathcal{H}_\alpha + {}^3g'^{\alpha\beta}\mathcal{H}'_\alpha)\partial_\beta\delta\,.
\end{aligned} \tag{6.1b}$$

Prve tri relacije predstavljaju PZ izmedju kinematičkih veza $\mathcal{H}_{ij}$ i $\mathcal{H}_\alpha$, čiji oblik ne zavisi od izbora dejstva. Njihovo izračunavanje se može znatno uprostiti ako se veze $\mathcal{H}_{ij}$ i $\mathcal{H}_\alpha$ napišu u obliku

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ij} &= \pi_A \Sigma_{ij} Q^A + \partial X_{ij}\,, \\
\mathcal{H}_\alpha &= \pi_A \partial_\alpha Q^A + \tfrac{1}{2} A^{ij}{}_\alpha \mathcal{H}_{ij} + \partial X_\alpha\,,
\end{aligned}$$

gde je $Q^A = (\Psi, b^i{}_\alpha, A^{ij}{}_\alpha)$, $\pi_A = (\pi, \pi_i{}^\alpha, \pi_{ij}{}^\alpha)$, Σ_{ij} su Lorencovi generatori u odgovarajućoj reprezentaciji, a ∂X je neka trodivergencija.

Relacije (6.1b) sadrže dinamički deo hamiltonijana $\mathcal{H}_\perp$, za koji se zna da je funkcija sledećih varijabli:

$$\xi^A = \left(\Psi, D_{\bar{k}}\Psi, T^i{}_{\bar{m}\bar{n}}, R^{ij}{}_{\bar{m}\bar{n}}; \frac{\pi}{J}, \frac{\hat{\pi}_i{}^{\bar{m}}}{J}, \frac{\hat{\pi}_{ij}{}^{\bar{m}}}{J}, n^k\right).$$

Izračunavanje ovih zagrada je dosta složeno, i ovde ga nećemo razmatrati.

Koristeći razlaganje (5.38b) za $\mathcal{H}_k$, jednačine (6.1) u lokalnom Lorencovom bazisu dobijaju oblik

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_{kl}\} = \tfrac{1}{2} f_{ij}{}^{mn}{}_{kl} \mathcal{H}_{mn} \delta\,, \\
&\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_k\} = -2\eta_{k[i}\mathcal{H}_{j]}\delta\,, \\
&\{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}'_m\} = -\big(n_{[m} R^{ij}{}_{\bar{k}]\perp} + \tfrac{1}{2} R^{ij}{}_{\bar{k}\bar{m}}\big)\mathcal{H}_{ij}\delta + 2\big(n_{[m} T^i{}_{\bar{k}]\perp} + \tfrac{1}{2} T^i{}_{\bar{k}\bar{m}}\big)\mathcal{H}_i \delta\,,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

u kome je uočljiva analogija sa komutacionim relacijama Poenkareove grupe.

Prethodna razmatranja se odnose na slučaj kad u teoriji nema dodatnih veza. Ako ih ima, analiza postaje znatno složenija. Taj slučaj se može povezati sa analizom lokalne Poenkareove simetrije, što dovodi do rezultata koji se esencijalno ne razlikuje od (6.1) (dodatak F):

a) dinamički hamiltonijan $\mathcal{H}_\perp$ prelazi u redefinisan izraz $\overline{\mathcal{H}}_\perp$, koji uključuje doprinose svih primarnih veza druge klase;

b) u algebri se mogu pojaviti članova tipa V_{PPK}.

Odavde sledi da su uslovi konzistentnosti sekundarnih veza automatski zadovoljeni.

1.2 Generatori lokalne simetrije

U slučaju lokalne Poenkareove simetrije generatori imaju oblik

$$G = \dot{\varepsilon}(t) G^{(1)} + \varepsilon(t) G^{(0)}\,,$$

gde su $G^{(0)}, G^{(1)}$ funkcije na faznom prostoru koje zadovoljavaju uslove (5.23b). Odavde je jasno da konstrukcija generatora zahteva poznavanje algebre veza. Pošto lokalna Poenkareova simetrija postoji uvek, nezavisno od konkretnog izbora dejstva, prirodno je očekivati da se osnovne karakteristike generatora mogu dobiti razmatranjem jednostavnog slučaja teorije u kojoj dodatnih veza nema. Posle toga ćemo dobijeni rezultat lako uopštiti (Blagojević, Nikolić i Vasilić, 1988).

Konstrukcija generatora. Kad nema dodatnih veza, primarne veze ${\pi_k}^0$ i ${\pi_{ij}}^0$ su prve klase. Polazeći od izraza $G^{(1)}_k = {\pi_k}^0$ i $G^{(1)}_{ij} = {\pi_{ij}}^0$, uslovi (5.23$b$) daju sledeći izraz za generator lokalne Poenkareove simetrije

$$G = \int d^3x \big[\dot\xi^k {\pi_k}^0 + \xi^k(\mathcal{H}_k + \phi_k) + \tfrac{1}{2}\dot\varepsilon^{ij}{\pi_{ij}}^0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ij}(-\mathcal{H}_{ij} + \phi_{ij})\big] , \qquad (6.3a)$$

gde su ϕ_k i ϕ_{ij} primarne veze PK, koje treba odrediti iz relacija

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{H}_k + \phi_k, H_T\} = V_{PPK} , \\ &\{-\mathcal{H}_{ij} + \phi_{ij}, H_T\} = V_{PPK} . \end{aligned}$$

Koristeći algebru veza u obliku (6.2), dobijaju se sledeći izrazi za ϕ_k i ϕ_{ij}:

$$\begin{aligned} \phi_k &= \big[{A^i}_{k0} - {b^m}_0({T^i}_{\bar m\bar k} + 2n_{[k}{T^i}_{\bar m]\perp})\big]{\pi_i}^0 \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}{b^m}_0({R^{ij}}_{\bar k\bar m} + 2n_{[m}{R^{ij}}_{\bar k]\perp}){\pi_{ij}}^0 , \\ \phi_{ij} &= 2b_{[i0}{\pi_{j]}}^0 + 2{A^s}_{[i0}{\pi_{sj]}}^0 . \end{aligned} \qquad (6.3b)$$

Time je generator lokalne Poenkareove simetrije potpuno odredjen.

Da bismo lakše proverili da li G generiše korektne transformacije simetrije, uvešćemo pogodniji skup parametara:

$$\xi^\mu = \xi^k {h_k}^\mu , \qquad \omega^{ij} = \varepsilon^{ij} - \xi^\nu {A^{ij}}_\nu .$$

Posle toga generator G prelazi u izraz

$$G = \int d^3x \big[\dot\xi^\mu\big({b^k}_\mu{\pi_k}^0 + \tfrac{1}{2}{A^{ij}}_\mu{\pi_{ij}}^0\big) + \xi^\mu\mathcal{P}_\mu + \tfrac{1}{2}\dot\omega^{ij}{\pi_{ij}}^0 + \tfrac{1}{2}\omega^{ij}S_{ij}\big] , \qquad (6.4a)$$

gde je

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu &= {b^k}_\mu\mathcal{H}_k - \tfrac{1}{2}{A^{ij}}_\mu\mathcal{H}_{ij} + {b^k}_{0,\mu}{\pi_k}^0 + \tfrac{1}{2}{A^{ij}}_{0,\mu}{\pi_{ij}}^0 , \\ S_{ij} &= -\mathcal{H}_{ij} + 2b_{[i0}{\pi_{j]}}^0 + 2{A^s}_{[i0}{\pi_{sj]}}^0 . \end{aligned} \qquad (6.4b)$$

Uočavamo da je generator vremenske translacije jednak totalnom hamiltonijanu,

$$\mathcal{P}_0 = \widehat{\mathcal{H}}_T \equiv \mathcal{H}_T - \partial_\alpha D^\alpha ,$$

jer je $\dot b^k{}_0 = \{{b^k}_0, H_T\} = {u^k}_0$, $\dot A^{ij}{}_0 = \{{A^{ij}}_0, H_T\} = {u^{ij}}_0$.

Delovanje na polja. Sada ćemo pokazati da generatori (6.4) delujući na polja $\Psi, b^k{}_\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ daju kompletne lokalne Poenkareove transformacije:

$$
\begin{aligned}
&\bar\delta\Psi = -\tfrac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\Psi + \xi^\nu\partial_\nu\Psi\,,\\
&\bar\delta b^k{}_\mu = -\omega^k{}_s b^s{}_\mu + \xi^\lambda{}_{,\mu} b^k{}_\lambda + \xi^\lambda\partial_\lambda b^k{}_\mu\,,\\
&\bar\delta A^{ij}{}_\mu = -\omega^i{}_s A^{sj}{}_\mu - \omega^j{}_s A^{is}{}_\mu + \xi^\lambda{}_{,\mu}A^{ij}{}_\lambda - \omega^{ij}{}_{,\mu} + \xi^\lambda\partial_\lambda A^{ij}{}_\mu\,,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

gde je $\bar\delta Q \equiv \{Q, G\}$. U tu svrhu izrazimo, najpre, $\mathcal{P}_\mu$ i S_{ij} u obliku

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}_0 = \widehat{\mathcal{H}}_T\,,\\
&\mathcal{P}_\alpha = \pi_i{}^\mu\partial_\alpha b^i{}_\mu + \tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\mu\partial_\alpha A^{ij}{}_\mu + \pi\partial_\alpha\Psi - \partial_\beta\big(\pi_i{}^\beta b^i{}_\alpha + \tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\beta A^{ij}{}_\alpha\big)\,,\\
&S_{ij} = -2\pi_{[i}{}^\mu b_{j]\mu} - 2\pi_{s[i}{}^\mu A^s{}_{j]\mu} - \pi\Sigma_{ij}\Psi - \partial_\alpha\pi_{ij}{}^\alpha\,.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Posle ovoga jednostavno je proveriti ω^{ij} i ξ^α transformacije u (6.5). Da bismo izveli ξ^0 transformacije, iskoristićemo činjenicu da $\mathcal{H}_T$ ne zavisi od izvoda impulsa posle korišćenja veza, tj. $\partial\mathcal{H}_T/\partial\pi_{,\alpha} \approx 0$ (ovo je tačno za lagranžijane koji su najviše kvadratični po brzinama). Posmatrajmo najpre transformaciju od $b^k{}_\mu$:

$$
\begin{aligned}
\bar\delta(\xi^0)b^k{}_\mu &= \int d^3x'\big[\dot\xi'^0\{b^k{}_\mu, b'^s{}_0\pi'_s{}^0\} + \xi'^0\{b^k{}_\mu, \mathcal{H}'_T - D'^\alpha{}_{,\alpha}\}\big]\\
&= \dot\xi^0 b^k{}_0\delta^0_\mu + \xi^0\Lambda^k{}_\mu + \xi^0{}_{,\alpha}b^k{}_0\delta^\alpha_\mu\,,
\end{aligned}
$$

gde je $\Lambda^k{}_\mu$ odredjeno relacijom $\{b^k{}_\mu, \mathcal{H}'_T\} \approx \Lambda^k{}_\mu\delta$ ($\mathcal{H}_T$ ne zavisi od izvoda impulsa, pa se na desnoj strani ne pojavljuje izvod δ funkcije). Prema tome,

$$
\bar\delta(\xi^0)b^k{}_\mu = \xi^0{}_{,\mu}b^k{}_0 + \xi^0\{b^k{}_\mu, \mathcal{H}_T\} \approx \xi^0{}_{,\mu}b^k{}_0 + \xi^0\dot b^k{}_\mu\,,
$$

što je u skladu sa (6.5).

Rezultat važi samo uz korišćenje jednačina kretanja. Jedine osobine totalnog hamiltonijana koje smo koristili u računu su sledeće:

a) $\mathcal{H}_T$ ne zavisi od izvoda impulsa ako se koriste veze, i

b) vremenska evolucija dinamičkih varijabli data je izrazom $\dot Q = \{Q, H_T\}$.

Na sličan način se mogu proveriti transformacije polja $A^{ij}{}_\mu$ i Ψ. Ostaje još da se proveri da li generator (6.4) generiše dobre transformacije impulsa, što ćemo uskoro razmotriti.

Uočimo da je dejstvo teorije invarijantno u odnosu na transformacije polja (6.5) ne samo u jednostavnom slučaju kad nema dodatnih veza, već i u opštem slučaju kad ove veze postoje, tj. za proizvoljan izbor parametara teorije. Ova činjenica nam sugeriše pretpostavku da izraz (6.4), u kome je član $\mathcal{P}_0$ *zamenjen sa opštim* $\widehat{\mathcal{H}}_T$, definiše korektan generator lokalne simetrije i u opštem slučaju.

Opšti slučaj. Posmatraćemo sada opštu teoriju u kojoj mogu postojati i dodatne veze. Pretpostavićemo da je generator lokalne Poenkareove simetrije oblika

$$G = \int d^3x \left[\dot{\xi}^\mu G^{(1)}_\mu + \xi^\mu G^{(0)}_\mu + \tfrac{1}{2}\dot{\omega}^{ij} G^{(1)}_{ij} + \tfrac{1}{2}\omega^{ij} G^{(0)}_{ij} \right] , \tag{6.7a}$$

gde je

$$\begin{aligned} &G^{(1)}_\mu = b^k{}_\mu \pi_k{}^0 + \tfrac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \pi_{ij}{}^0 , \qquad G^{(0)}_0 = \widehat{\mathcal{H}}_T , \qquad G^{(0)}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha , \\ &G^{(1)}_{ij} = \pi_{ij}{}^0 , \qquad G^{(0)}_{ij} = S_{ij} . \end{aligned} \tag{6.7b}$$

Generator vremenske translacije $G^{(0)}_0 = \widehat{\mathcal{H}}_T$ se sada razlikuje od prethodnog slučaja prisustvom članova $(u\phi)$, od kojih se deo $u_2\phi_2$, koji odgovara vezama druge klase, može uključiti u redefinisani dinamički hamiltonijan $\overline{\mathcal{H}}_\perp$.

Jasno je da ω^{ij} i ξ^α *transformacije polja* imaju isti oblik kao u (6.5). Za razmatranje ξ^0 transformacija važno je uočiti da i u opštem slučaju $\mathcal{H}_T$ ne zavisi od izvoda impulsa. Ostatak računa vodi do istog rezultata kao i ranije.

Za kompletan dokaz treba pokazati da je G dobar generator i za transformacije impulsa. Korektne transformacije impulsa se mogu naći iz definicije $\pi_A = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{Q}^A$, i poznatih transformacija polja Q^A i lagranžijana $\mathcal{L}$. Može se pokazati da G deluje dobro i na impulse. Prema tome,

izraz (6.7) je korektan generator lokalne Poenkareove simetrije za svaki izbor parametara teorije.

Ovaj rezultat omogućava razmatranje jednog od najvažnijih problema klasične teorije gravitacije — problema definisanja energije i drugih očuvanih fizičkih veličina.

2. ZAKONI ODRŽANJA

Pretpostavljajući da je simetrija U_4 teorije u asimptotoskoj oblasti globalna Poenkareova simetrija, razmotrićemo sada oblik odgovarajućih generatora. Pažljiva analiza uticaja graničnih uslova dovešće do pojave *površinskih članova* u izrazima za generatore. Poboljšani generatori omogućavaju korektno izučavanje asimptotske simetrije i odgovarajućih zakona očuvanja energije, impulsa i ugaovnog momenta, dok su fizičke vrednosti očuvanih veličina odredjene površinskim članovima (Blagojević i Vasilić, 1988).

2.1 Asimptotska struktura prostor–vremena

Asimptotska Poenkareova simetrija. Globalne Poenkareove transformacije polja se mogu dobiti iz odgovarajućih izraza za lokalne transformacije sledećom zamenom parametara:

$$\begin{aligned} &\omega^{ij}(x) \to -\omega^{ij}\,, \\ &\xi^\mu(x) \to -\omega^\mu{}_\nu x^\nu - \varepsilon^\nu \equiv -\xi^\mu\,, \end{aligned} \tag{6.8}$$

gde su ω^{ij} i ε^ν konstante, $\omega^\mu{}_\nu = \delta^\mu_i \omega^{ij}\eta_{j\nu}$. Sa indeksima veličina, koje se odnose na asimptotski prostor–vreme, postupaće se kao u slučaju M_4: oni će se dizati i spuštati uz pomoć metrike η, dok će se veza lokalnih i svetskih indeksa ostvarivati preko δ^μ_j. Gornja zamena osigurava važenje standardnih globalnih Poenkareovih transformacija:

$$\begin{aligned} &\delta_0\Psi = \tfrac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\Psi - \xi^\nu\partial_\nu\Psi\,, \\ &\delta_0 b^i{}_\mu = \omega^i{}_s b^s{}_\mu - \omega^\nu{}_\mu b^i{}_\nu - \xi^\nu\partial_\nu b^i{}_\mu\,, \\ &\delta_0 A^{ij}{}_\mu = \omega^i{}_s A^{sj}{}_\mu + \omega^j{}_s A^{is}{}_\mu - \omega^\nu{}_\mu A^{ij}{}_\nu - \xi^\nu\partial_\nu A^{ij}{}_\mu\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Generator ovih transformacija se može dobiti iz poznatog generatora lokalnih transformacija (6.7) koristeći istu zamenu, što daje

$$G = \tfrac{1}{2}\omega^{ij}M_{ij} - \varepsilon^\nu P_\nu\,, \tag{6.10a}$$

gde je

$$\begin{aligned} &P_\mu = \int d^3x\mathcal{P}_\mu, \\ &M_{\alpha\beta} = \int d^3x(x_\alpha\mathcal{P}_\beta - x_\beta\mathcal{P}_\alpha - S_{\alpha\beta}) \equiv \int d^3x\mathcal{M}_{\alpha\beta}\,, \\ &M_{0\beta} = \int d^3x(x_0\mathcal{P}_\beta - x_\beta\mathcal{P}_0 - S_{0\beta} + b^k{}_\beta\pi_k{}^0 + \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\beta\pi_{ij}{}^0) \equiv \int d^3x\mathcal{M}_{0\beta}\,. \end{aligned} \tag{6.10b}$$

Generatori simetrije deluju na osnovne varijable preko Puasonovih zagrada, pa zato moraju imati *dobro definisane funkcionalne izvode*. U slučaju parametara koji opadaju dovoljno brzo na prostornoj beskonačnosti, u generatoru G se mogu vršiti razne parcijalne integracije ne vodeći računa o površinskim članovima, pa pitanje diferencijabilnosti ne predstavlja nikakav problem. Parametri globalne Poenkareove simetrije nisu tog tipa, pa se problemu površinskih članova mora prići mnogo pažljivije. Zato ćemo pokušati da popravimo oblik generatora (6.10), tako da, i pored neiščezavanja parametara u asimptotskoj oblasti, oni imaju dobro definisane funkcionalne izvode. Prvi korak u tom smeru je precizno definisanje faznog prostora u kome generatori (6.10) deluju.

Fazni prostor. Izbor asimptotike biće jasniji ako asimptotsku strukturu prostor–vremena izrazimo preko odredjenih geometrijskih pojmova.

Mi ćemo razmatrati *izolovane* fizičke sisteme koji se karakterišu poljima materije koja brzo opadaju sa rastojanjem, tako da je njihov doprinos površinskim integralima jednak nuli. Prostor–vreme izolovanog sistema je *asimptotski ravno* ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

(a) Metrički tenzor asimptotski teži Minkovskijevoj metrici po zakonu

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}_1 \, , \qquad g_{\mu\nu,\lambda} = \mathcal{O}_2 \, , \qquad g_{\mu\nu,\lambda\rho} = \mathcal{O}_3 \, ,$$

gde $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(r^{-n})$ označava član koji opada kao r^{-n} ili brže za veliko r, tj. $r^n \mathcal{O}_n$ ostaje konačno pri $r \to \infty$, a $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$.

(b) Lorencova jačina polja zadovoljava uslov

$$R^{ij}{}_{\mu\nu} = \mathcal{O}_{2+\alpha} \qquad (\alpha > 0) \, ,$$

čime se definiše apsolutni paralelizam u asimptotskoj oblasti.

Prvi uslov je konzistentan sa asimptotskom globalnom Poenkareovom simetrijom. Drugi uslov se lako može zadovoljiti ako zahtevamo

$$(b') \qquad A^{ij}{}_{\mu} = \mathcal{O}_{1+\alpha} \, , \qquad A^{ij}{}_{\mu,\nu} = \mathcal{O}_{2+\alpha} \, , \qquad A^{ij}{}_{\mu,\nu\lambda} = \mathcal{O}_{3+\alpha} \, .$$

U AK teoriji koneksija se ponaša kao izvod metrike, pa je $A = \mathcal{O}_2$. Isti zakon važi u opštoj teoriji kad je polje A masivno, dok bezmaseno A može imati sporije opadanje. Mi ćemo, zbog jednostavnosti, razmatrati AK teoriju, tj. pretpostavićemo da je asimptotika *gravitacionog polja* oblika

$$b^k{}_{\mu} = \delta^k_{\mu} + \mathcal{O}_1 \, , \qquad A^{ij}{}_{\mu} = \mathcal{O}_2 \, . \tag{6.11a}$$

Da bi se osigurala invarijantnost ovih uslova u odnosu na globalne Poenkareove transformacije, za izvode polja zahtevamo

$$\begin{aligned} b^k{}_{\mu,\nu} &= \mathcal{O}_2 \, , \qquad & b^k{}_{\mu,\nu\lambda} &= \mathcal{O}_3 \, , \\ A^{ij}{}_{\mu,\nu} &= \mathcal{O}_3 \, , \qquad & A^{ij}{}_{\mu,\nu\lambda} &= \mathcal{O}_4 \, . \end{aligned} \tag{6.11b}$$

Ovi uslovi su *minimalni* u smislu da izvesni dodatni argumenti mogu dovesti i do bolje asimptotike, tj. do bržeg ili preciznije odredjenog opadanja polja i njihovih izvoda.

Za izraze koji iščezavaju na jednačinama kretanja može se zahtevati *proizvoljno brzo* asimptotsko opadanje, jer se time ne gubi nijedno rešenje jednačina kretanja. Za sve veze se pretpostavlja dovoljno brzo opadanje, tako da su svi zapreminski integrali, koji ulaze u generator asimptotske Poenkareove simetrije, dobro definisani.

Prema tome, asimptotsko ponašanje *impulsa* se odredjuje zahtevom

$$p - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \widehat{\mathcal{O}}\,,$$

gde $\widehat{\mathcal{O}}$ označava član koji opada dovoljno brzo, npr. kao $\mathcal{O}_5$. Koristeći oblik sigurnih i dodatnih primarnih veza u jednačinama (5.28) i (5.48), lako se može zaključiti da je asimptotika impulsa oblika

$$\begin{aligned} &\pi_k{}^0, \pi_{ij}{}^0 = \widehat{\mathcal{O}}\,, \\ &\pi_i{}^\alpha = \widehat{\mathcal{O}}\,, \\ &\pi_{ij}{}^\alpha = -4aJn_{[i}h_{j]}{}^\alpha + \widehat{\mathcal{O}}\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Sličnim argumentima se dolazi do konzistentnog odredjivanja asimptotike množitelja. Iz $\dot{b}^k{}_0 = u^k{}_0, \dot{A}^{ij}{}_0 = u^{ij}{}_0$ sledi

$$u^k{}_0 = \mathcal{O}_1\,, \qquad u^{ij}{}_0 = \mathcal{O}_2\,. \tag{6.13a}$$

I drugi množitelji su preko jednačina kretanja povezani sa brzinama, što dovodi do

$$u_{\perp\bar{m}}, u_{\bar{k}\bar{m}} = \mathcal{O}_2\,, \qquad u_{i\bar{k}\bar{m}} = \mathcal{O}_2\,. \tag{6.13b}$$

2.2 Poboljšanje Poenkareovih generatora

Generatori deluju na dinamičke varijable preko Puasonove zagrade, u čijoj definiciji se pojavljuju funkcionalni izvodi. Funkcional

$$F[\varphi,\pi] = \int d^3x f(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x), \pi(x), \partial_\nu\pi(x))$$

ima dobro definisan funkcionalni izvod ako se njegova varijacija može napisati u obliku

$$\delta F = \int d^3x\,[A(x)\delta\varphi(x) + B(x)\delta\pi(x)]\;, \tag{6.14}$$

gde *nema* članova $\delta\varphi_{,\mu}$ i $\delta\pi_{,\mu}$.

Videćemo da generatori globalnih Poenkareovih transformacija ne zadovoljavaju taj uslov. Zato ćemo morati da ih redefinišmo dodavanjem odredjenih površinskih članova.

Prostorne translacije. Pogledajmo kako ovaj postupak izgleda u slučaju generatora prostornih translacija. Variranje izraza za P_α daje

$$\begin{aligned} &\delta P_\alpha = \int d^3x \delta\mathcal{P}_\alpha\,, \\ &\delta\mathcal{P}_\alpha = \pi_i{}^\mu \delta b^i{}_{\mu,\alpha} + \tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\mu \delta A^{ij}{}_{\mu,\alpha} - \delta(\pi_i{}^\beta b^i{}_\alpha + \tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\beta A^{ij}{}_\alpha)_{,\beta} + R\,. \end{aligned}$$

Ovde smo eksplicitno prikazali one članove koji daju neželjene varijacije izvoda varijabli, dok su preostali članovi korektnog oblika označeni sa R. Koristeći sada parcijalnu integraciju i asimptotske uslove (6.12), prethodni rezultat se može dovesti na oblik

$$\delta\mathcal{P}_\alpha = \big(\tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\beta \delta A^{ij}{}_\beta\big)_{,\alpha} - \delta\big(\tfrac{1}{2}\pi_{ij}{}^\beta A^{ij}{}_\alpha\big)_{,\beta} + R + \partial\widehat{\mathcal{O}}\,,$$

gde je $\partial\widehat{\mathcal{O}}$ trodivergencija od $\widehat{\mathcal{O}}$. Uzimajući u obzir da je $\delta\pi_{ij}{}^\beta A^{ij}{}_\beta = \mathcal{O}_3$, sledi

$$\delta\mathcal{P}_\alpha = -\delta\big(\pi_{ij}{}^\beta A^{ij}{}_{[\alpha}\delta_{\beta]}{}^\gamma\big)_{,\gamma} + R + \partial\mathcal{O}_3\,.$$

Tako varijacija generatora prostorne translacije dobija oblik

$$\begin{aligned} \delta P_\alpha &= -\delta E_\alpha + R\,,\\ E_\alpha &\equiv \oint ds_\gamma \big(\pi_{ij}{}^\beta A^{ij}{}_{[\alpha}\delta_{\beta]}{}^\gamma\big)\,, \end{aligned} \tag{6.15a}$$

gde je oblast integracije granica trodimenzionog prostora. Posle ovoga se generator P_α može redefinisati

$$P_\alpha \to \widetilde{P}_\alpha \equiv P_\alpha + E_\alpha\,, \tag{6.15b}$$

tako da $\tilde{P}_\alpha$ ima *dobar funkcionalni izvod.* Može se proveriti da pretpostavke o asimptotici osiguravaju *konačnost* E_α. Pokazaćemo da E_α predstavlja vrednost impulsa kao očuvane veličine.

Vremenske translacije. Na sličan način se može popraviti oblik generatora vremenske translacije P_0. Podjimo od

$$\begin{aligned} \delta P_0 &= \int d^3x\, \delta\widehat{\mathcal{H}}_T\,,\\ \delta\widehat{\mathcal{H}}_T &= \delta\widehat{\mathcal{H}}_c + R = N\delta\overline{\mathcal{H}}_\perp + N^\alpha\delta\mathcal{H}_\alpha - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\delta\mathcal{H}_{ij} + R\,. \end{aligned}$$

Direktan račun daje

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{ij} &= (\delta\pi_{ij}{}^\alpha)_{,\alpha} + R\,,\\ \delta\mathcal{H}_\alpha &= (\pi_{ij}{}^\beta \delta A^{ij}{}_{[\beta}\delta^\gamma_{\alpha]})_{,\gamma} + R + \partial\widehat{\mathcal{O}}\,,\\ \delta\overline{\mathcal{H}}_\perp &= -2aJh_{\bar{k}}{}^\alpha h_{\bar{l}}{}^\beta \delta A^{kl}{}_{\alpha,\beta} + R + \partial\widehat{\mathcal{O}}\,, \end{aligned}$$

posle čega se dolazi do rezultata

$$\begin{aligned} \delta\widehat{\mathcal{H}}_T &= 2aNJh_a{}^\beta h_b{}^\alpha \delta A^{ab}{}_{\beta,\alpha} + R\\ &= \big[2aJh_a{}^\beta h_b{}^\alpha \delta A^{ab}{}_\beta\big]_{,\alpha} + R + \partial\mathcal{O}_3\,, \end{aligned}$$

gde smo iskoristili $\delta hA = \mathcal{O}_3$. Tako se konačno dobija

$$\begin{aligned}
&\delta P_0 = -\delta E_0 + R\,, \\
&E_0 \equiv \oint ds_\gamma(-2aJh_a{}^\alpha h_b{}^\gamma A^{ab}{}_\alpha)\,,
\end{aligned} \tag{6.16a}$$

pa korektno definisan generator P_0 ima oblik

$$\widetilde{P}_0 \equiv P_0 + E_0\,. \tag{6.16b}$$

Površinski član E_0 je konačan pri usvojenim asimptotskim uslovima i predstavlja vrednost energije sistema.

Prostorne rotacije. Da bismo našli korektan oblik generatora prostornih rotacija, posmatraćemo izraz

$$\begin{aligned}
&\delta M_{\alpha\beta} = \int d^3x \delta\mathcal{M}_{\alpha\beta}\,, \\
&\delta\mathcal{M}_{\alpha\beta} = x_\alpha\delta\mathcal{P}_\beta - x_\beta\delta\mathcal{P}_\alpha + \delta\pi_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_{,\gamma} + R\,.
\end{aligned}$$

Koristeći već dobijeni izraz za $\delta\mathcal{P}_\alpha$ lako se nalazi

$$\begin{aligned}
&\delta M_{\alpha\beta} = -\delta E_{\alpha\beta} + R\,, \\
&E_{\alpha\beta} \equiv \oint ds_\gamma\big[-\pi_{\alpha\beta}{}^\gamma + x_{[\alpha}\big(\pi_{ij}{}^\gamma A^{ij}{}_{\beta]}\big)\big]\,,
\end{aligned} \tag{6.17a}$$

što implicira da je korektna definicija generatora prostornih rotacija data kao

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta} \equiv M_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta}\,. \tag{6.17b}$$

Detaljna analiza pokazuje da usvojeni asimptotski uslovi ne garantuju konačnost izraza $E_{\alpha\beta}$, pošto integrand sadrži članove tipa $\mathcal{O}_1$. Može se pokazati da ovi problematični članovi iščezavaju ako se na potencijale $a^k{}_\mu = b^k{}_\mu - \delta^k_\mu$ nametnu *asimptotski* gradijentni uslovi $a_{[ij]} = \mathcal{O}_2$, kao i odredjeni *uslovi parnosti*. Ovi uslovi su invarijantni u odnosu na globalne Poenkareove transformacije, i ograničavaju preostalu lokalnu simetriju. Posle toga površinski integral $E_{\alpha\beta}$ je konačan, pa je i $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ dobro definisan.

Bustovi. Variranjem izraza za bust generator dobija se

$$\begin{aligned}
&\delta M_{0\beta} = \int d^3x \delta\mathcal{M}_{0\beta}\,, \\
&\delta\mathcal{M}_{0\beta} = x_0\delta\mathcal{P}_\beta - x_\beta\delta\mathcal{H}_T + \delta\pi_{0\beta}{}^\gamma{}_{,\gamma} + R\,.
\end{aligned}$$

Korišćenjem već poznatih izraza za $\delta\mathcal{P}_\beta$ i $\delta\mathcal{H}_T$ lako se dobija

$$\begin{aligned}
&\delta M_{0\beta} = -\delta E_{0\beta} + R\,, \\
&E_{0\beta} \equiv \oint ds_\gamma \big[-\pi_{0\beta}{}^\gamma + x_0\big(\pi_{ij}{}^\alpha A^{ij}{}_{[\beta}\delta_{\alpha]}{}^\gamma\big) - x_\beta\big(2aJh_a{}^\alpha h_b{}^\gamma A^{ab}{}_\alpha\big)\big]\,,
\end{aligned} \tag{6.18a}$$

tako da je korektan bust generator oblika

$$\widetilde{M}_{0\beta} \equiv M_{0\beta} + E_{0\beta}\,. \tag{6.18b}$$

Dodatni asimptotski gradijentni uslovi i uslovi parnosti garantuju konačnost površinskog člana $E_{0\beta}$.

Sva prethodna razmatranja odnose se na AK teoriju. Analogno razmatranje opšte $R + T^2 + R^2$ teorije pokazuje da se bust generator ne može redefinisati dodavanjem površinskog člana, pa stoga nije dobro definisan generator. Problem se rešava nalaženjem takvih asimptotskih uslova pri kojima je to moguće.

2.3 Asimptotska simetrija i zakoni održanja

U prethodnom razmatranju smo dobili poboljšane izraze za generatore $(\widetilde{P}_\mu, \widetilde{M}_{\mu\nu})$ u faznom prostoru sa zadatim asimptotskim osobinama. Sada ćemo proveriti da li $(\widetilde{P}_\mu, \widetilde{M}_{\mu\nu})$ zadovoljavaju Poenkareovu algebru. Da bismo razjasnili fizički smisao ovih veličina, razmatraćemo njihove zakone očuvanja i uporediti ih sa OTR.

Algebra Poenkareovih generatora. Poboljšani generatori asimptotske Poenkareove simetrije su definisani kao zapreminski integrali veza plus odredjeni površinski integrali. Da bismo našli njihovu algebru, iskoristićemo, najpre, poznatu algebru veza i izračunati Puasonove zagrade izmedju veličina $S_{ij}, \mathcal{P}_\alpha$ i $\mathcal{P}_0 \equiv \widehat{\mathcal{H}}_T$. Rezultat je

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}'_\beta\} &= -\partial_\alpha\mathcal{H}_\beta\delta + \partial_\alpha(\mathcal{H}_\beta\delta) + \partial_\beta(\mathcal{H}_\alpha\delta) \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\partial_\beta(A^{kl}{}_\alpha\mathcal{H}_{kl}\delta) + \tfrac{1}{2}\partial'_\alpha(A^{kl}{}_\beta\mathcal{H}_{kl}\delta) + V_{PPK}\,, \\
\{\mathcal{P}_\alpha, \widehat{\mathcal{H}}'_T\} &= -\partial_\alpha(b^k{}_0\overline{\mathcal{H}}_k)\delta + \partial_\alpha(b^k{}_0\overline{\mathcal{H}}_k\delta) + \tfrac{1}{2}\partial'_\alpha(A^{kl}{}_0\mathcal{H}_{kl}\delta) + V_{PPK}\,, \\
\{\mathcal{P}_\alpha, S'_{ij}\} &= \partial'_\alpha(\mathcal{H}_{ij}\delta) + V_{PPK}\,, \\
\{S_{ij}, S'_{kl}\} &= \tfrac{1}{2}f_{ij}{}^{mn}{}_{kl}\mathcal{H}_{mn}\delta + V_{PPK}\,, \\
\{S_{ij}, \widehat{\mathcal{H}}'_T\} &= V_{PPK}\,, \qquad \{\widehat{\mathcal{H}}_T, \widehat{\mathcal{H}}'_T\} = V_{PPK}\,.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

(Crta iznad $\mathcal{H}_k$ nas podseća da je dinamički hamiltonijan $\overline{\mathcal{H}}_\perp$ redefinisan tako da uključuje i doprinos primarnih veza druge klase.)

Puasonove zagrade izmedju veličina $\widetilde{P}_\mu$ i $\widetilde{M}_{\mu\nu}$ se mogu izračunati ako uzmemo u obzir da one imaju dobro definisane funkcionalne izvode (tj.

Puasonove zagrade podintegralnih veličina ne sadrže izvode δ funkcije). Postupak ćemo ilustrovati na primeru zagrade $\widetilde{P}_\gamma$ i $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$. Počećemo od formalne relacije

$$
\begin{aligned}
\{P_\gamma, M_{\alpha\beta}\} &= \int\int d^3x d^3x' \{\mathcal{P}_\gamma, -S'_{\alpha\beta} + x'_\alpha \mathcal{P}'_\beta - x'_\beta \mathcal{P}'_\alpha\} \\
&= \int\int d^3x d^3x' \big\{-\partial'_\gamma(\mathcal{H}_{\alpha\beta}\delta) \\
&\quad - \big[\partial_\gamma(x_\alpha \mathcal{H}_\beta)\delta - \eta_{\alpha\gamma}(\mathcal{H}_\beta - \tfrac{1}{2}A^{kl}{}_\beta \mathcal{H}_{kl}) - (\alpha \leftrightarrow \beta)\big] + \partial\delta\big\}\,,
\end{aligned}
$$

gde $\partial\delta$ označava veličinu koja sadrži izvod δ funkcije. Prelaz na korektno definisane generatore se realizuje ignorisanjem takvih članova:

$$
\begin{aligned}
\{\widetilde{P}_\gamma, \widetilde{M}_{\alpha\beta}\} &= \int d^3x [\eta_{\gamma\alpha}\mathcal{P}_\beta - \eta_{\gamma\beta}\mathcal{P}_\alpha + 2\partial_\gamma(x_{[\alpha}\mathcal{H}_{\beta]})] + V_{PPK} \\
&= \eta_{\gamma\alpha}\widetilde{P}_\beta - \eta_{\gamma\beta}\widetilde{P}_\alpha + V_{PPK} + S\,.
\end{aligned}
$$

Površinski član S, posmatran kao generator simetrije, deluje trivijalno na polja i impulse, pa se u tom smislu može i zanemariti.

Tako se dobija

$$
\begin{aligned}
&\{\widetilde{P}_\mu, \widetilde{P}_\nu\} = V_{PPK}\,, \\
&\{\widetilde{P}_\mu, \widetilde{M}_{\nu\lambda}\} = \eta_{\mu\nu}\widetilde{P}_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\widetilde{P}_\nu + V_{PPK}\,, \\
&\{\widetilde{M}_{\mu\nu}, \widetilde{M}_{\lambda\rho}\} = \tfrac{1}{2}f_{\mu\nu}{}^{\sigma\tau}{}_{\lambda\rho}\widetilde{M}_{\sigma\tau} + V_{PPK}\,.
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

Sve jednakosti u ovim relacijama su jednakosti do na kvadrate (ili više stepene) veza i površinske članove.

Održane veličine. Rezultat (6.20) dokazuje asimptotsku Poenkareovu invarijantnost teorije. Sada ćemo proveriti da li iz ove simetrije sledi, kao i obično, postojanje odredjenih održanih veličina.

Kastelanijev metod se, posle male modifikacije, može iskoristiti i za izučavanje globalnih simetrija. Tako se nalazi da su uslovi da veličina $G(q,\pi,t)$ bude generator globalne simetrije oblika

$$
\begin{aligned}
\{G, \widetilde{H}_T\} + \frac{\partial G}{\partial t} &= V_{PPK}\,, \\
\{G, \varphi_s\} &\approx 0\,,
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

gde je $\widetilde{H}_T$ poboljšan hamiltonijan, $\varphi_s \approx 0$ su sve veze u teoriji, a jednakost važi do na nula generatore. Pošto su generatori asimptotske simetrije konstruisani preko veza prve klase (do na površinske članove), lako se vidi da je drugi uslov zadovoljen. S druge strane, pošto je $\widetilde{H}_T = \widetilde{P}_0$, može se proveriti da je i prvi uslov ispunjen kao posledica onog dela algebre (6.20) koji sadrži $\widetilde{P}_0$.

Prvi uslov u (6.21) predstavlja zakon održanja. Zaista, on implicira slabu jednakost

$$\frac{dG}{dt} \approx S\,, \tag{6.22}$$

iz koje se vidi da je G održana veličina samo *ako nema površinskih članova* S. Sada ćemo eksplicitno proveriti važenje zakona održanja $\widetilde{P}_\mu$ i $\widetilde{M}_{\mu\nu}$.

Početićemo sa energijom. Lako se vidi da je

$$\{\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_0\} + \frac{\partial \widetilde{P}_0}{\partial t} = V_{PPK}\,,$$

pošto je $\{\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_0\} = 0$, a eksplicitna vremenska zavisnost postoji zbog prisustva neodredjenih množitelja,

$$\frac{\partial \widetilde{P}_0}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{H}_T}{\partial t} = \int d^3x \dot{v}^a \varphi_a = V_{PPK}\,.$$

Dakle

$$\frac{d\widetilde{P}_0}{dt} \approx \frac{dE_0}{dt} \approx 0\,, \tag{6.23a}$$

iz čega zaključujemo da površinski član E_0 predstavlja vrednost energije kao održane veličine.

Impuls i prostorni deo uglovnog momenta ne zavise eksplicitno od vremena, i zadovoljavaju relacije

$$\{\widetilde{P}_\alpha, \widetilde{P}_0\} \approx 0\,, \qquad \{\widetilde{M}_{\alpha\beta}, \widetilde{P}_0\} \approx 0\,,$$

pošto su $\widetilde{P}_\alpha$ i $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ konstruisani preko prostornih integrala veza prve klase (do na površinske članove), čije PZ sa totalnim hamiltonijanom daju nulu. Stoga,

$$\frac{d\widetilde{P}_\alpha}{dt} \approx \frac{dE_\alpha}{dt} \approx 0\,, \tag{6.23b}$$

$$\frac{d\widetilde{M}_{\alpha\beta}}{dt} \approx \frac{dE_{\alpha\beta}}{dt} \approx 0\,. \tag{6.23c}$$

Najzad, bust generator ima eksplicitnu zavisnost od vremena i zadovoljava relaciju

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{0\beta}}{\partial t} + \{\widetilde{M}_{0\beta}, \widetilde{P}_0\} = -\widetilde{P}_\beta + \{\widetilde{M}_{0\beta}, \widetilde{P}_0\} + V_{PPK} \approx -E_\beta\,,$$

gde zadnja jednakost sledi iz činjenice da je PZ od $\widetilde{M}_{0\beta}$ i totalnog hamiltonijana jednaka nuli, dok je $\widetilde{P}_\beta \approx E_\beta$. Dakle,

$$\frac{d\widetilde{M}_{0\beta}}{dt} \approx \frac{dE_{0\beta}}{dt} \approx -E_\beta\,, \tag{6.23d}$$

i, pošto je $E_\beta \neq 0$, bust generator nije održana veličina. On će biti održan samo u referentnom sistemu u kome je fizički sistem kao celine u miru, tj. $E_\beta = 0$. Ograničenje na takav sistem, medjutim, narušava bust invarijantnost teorije. Ovaj rezultat je posledica eksplicitne linearne zavisnosti $\widetilde{M}_{0\beta}$ od vremena i postojanja netrivijalnog površinskog člana u $\widetilde{P}_\beta$.

Poredjenje sa Lagranžovim formalizmom. Interesantno je uporediti dobijene površinske članove sa odgovarajućim Lagranžovim izrazima dobijenim u OTR. Opšta strategija biće da se svi impulsi u E^μ i $E^{\mu\nu}$ izraze preko polja i njihovih izvoda, uz pomoć veza i jednačina kretanja.

Da bismo transformisali izraz za impuls, podjimo od relacije

$$\pi_{ij}{}^\beta A^{ij}{}_{[\alpha}\delta^\gamma_{\beta]} \approx 2a(A^{0\gamma}{}_\alpha - \delta^\gamma_\alpha A^{0c}{}_c) + \mathcal{O}_3\,,$$

koja sledi iz (6.12). Koristeći jednačinu (3.46) u obliku

$$A_{ijk} = -(b_{[ij],k} - b_{(ik),j} + b_{(jk),i}) + \mathcal{O}_3\,,$$

desna strana gornje jednačine postaje odredjena funkcija tetrada i njihovih izvoda:

$$D \approx -2a\big[\eta^{\beta\gamma}\big(b_{(0\alpha),\beta} - b_{(\alpha\beta),0} - b_{(0\beta),\alpha}\big) + \delta^\gamma_\alpha b^\beta{}_{\beta 0}\big] + 4a\big(b^{[\beta}{}_0\delta^{\gamma]}_\alpha\big)_{,\beta} + \mathcal{O}_3\,.$$

Direktan račun pokazuje da se ta funkcija može izraziti preko metrike, tj. da važi

$$D = \eta_{\alpha\mu}h^{\mu 0\gamma} + \Lambda_\alpha{}^{\gamma\beta}{}_{,\beta} + \mathcal{O}_3\,,$$

gde je $\Lambda_\alpha{}^{\gamma\beta} = -\Lambda_\alpha{}^{\beta\gamma}$, zbog čega ovaj član ne daje doprinos integralu E_α, a

$$h^{\mu\nu\lambda} \equiv a[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho})]_{,\rho} \equiv H^{\mu\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}\,.$$

Tako se konačno dobija

$$E_\alpha = \eta_{\alpha\mu}\oint ds_\gamma h^{\mu 0\gamma}\,. \tag{6.24}$$

Na sličan način se izraz za energiju može dovesti na oblik

$$E_0 = \oint ds_\gamma h^{00\gamma}\,. \tag{6.25}$$

Energija i impuls se mogu napisati u kompaktnom obliku

$$E^{\mu} = \int d^3x\, \theta^{\mu 0}\,, \qquad \theta^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu\lambda}{}_{,\lambda}\,, \tag{6.26}$$

gde je $\theta^{\mu\nu}$ jednak simetričnom TEI iz OTR. Dakle,

izrazi za energiju i impuls u Ajnštajn–Kartanovoj teoriji isti su kao i u OTR.

Posebno je interesantno da se isti rezultat dobija i u opštoj $R + T^2 + R^2$ teoriji.

Za prostorni ugaoni momenat i bust račun je sličan, ali nešto komplikovaniji, i daje sledeći rezultat:

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu} &= \oint ds_{\gamma} K^{\mu\nu 0\gamma}, \\ K^{\mu\nu\lambda\rho} &\equiv x^{\mu} h^{\nu\lambda\rho} - x^{\nu} h^{\mu\lambda\rho} + H^{\lambda\mu\nu\rho}, \end{aligned} \tag{6.27}$$

gde veličina K zadovoljava relaciju

$$\partial_{\rho} K^{\mu\nu\lambda\rho} = x^{\mu}\theta^{\nu\lambda} - x^{\nu}\theta^{\mu\lambda}.$$

I ovaj se rezultat podudara sa izrazom u OTR.

Treba reći da se u opštoj $R + T^2 + R^2$ teoriji dobija isti rezultat samo ako su svi tordioni masivni. Postojanje bezmasenih tordiona ima sledeće posledice: a) prostorni ugaoni momenat $E_{\alpha\beta}$ se razlikuje od izraza u OTR, b) bust $E_{0\beta}$ nije čak ni definisan u ovom slučaju. Činjenica da je bust generator dobro definisan u Lagranžovom prilazu može se razumeti ako uočimo da se tamo ne vodi računa o postojanju funkcionalnih izvoda generatora.

ZADACI

1. Pokazati da za lagranžijane koji su kvadratični po brzinama zavisnost totalnog hamiltonijana od izvoda impulsa može poticati jedino od odredjenih množitelja, i da je
$$\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial \pi_{A,\alpha}} \approx 0\,.$$

2. Data je AK teorija sa Dirakovim poljem materije. Pokazati da se množitelji u i $\bar{u}$, koji stoje uz dodatne primarne veze materije $\bar{\phi}$ i ϕ, odredjuju relacijama
$$\begin{aligned} N\{\phi, \mathcal{H}_{\perp}\} + iJ\gamma^{\perp} u &\approx 0\,, \\ N\{\bar{\phi}, \mathcal{H}_{\perp}\} - iJ\bar{u}\gamma^{\perp} &\approx 0\,. \end{aligned}$$

tj. da su oblika $N\Lambda_\perp(b^k{}_\alpha, A^{ij}{}_\alpha, \pi_k{}^\alpha, \pi_{ij}{}^\alpha)$.
3. Naći Puasonove zagrade izmedju kinematičkih veza $\mathcal{H}_{ij}$ i $\mathcal{H}_\alpha$.
4. Dokazati relacije:

$$
\begin{aligned}
&\{n_k, \mathcal{H}'_{ij}\} = 2\eta_{k[i}n_{j]}\,\delta\,,\\
&\{h_{\bar k}{}^\alpha, \mathcal{H}'_{ij}\} = 2\eta_{k[i}h_{\bar j]}{}^\alpha\,\delta\,,\\
&\{n_k, \mathcal{H}'_\beta\} = -(\nabla_\beta\, b^s{}_\alpha)n_s h_{\bar k}{}^\alpha\,\delta\,,\\
&\{h_{\bar k}{}^\alpha, \mathcal{H}'_\beta\} = (\nabla_\beta\, b^s{}_\gamma)(n_s n_k\, {}^3g^{\alpha\gamma} - h_{\bar k}{}^\gamma h_{\bar s}{}^\alpha)\,\delta - \delta^\alpha_\beta h_{\bar k}{}^\gamma\partial_\gamma\delta\,,\\
&\{A^{ij}{}_\alpha, \mathcal{H}'_\beta\} = -R^{ij}{}_{\alpha\beta}\,\delta\,.
\end{aligned}
$$

5. Dokazati relacije:

$$
\begin{aligned}
&\{A^{ij}{}_\alpha, \mathcal{H}'_\perp\} = -R^{ij}{}_{\alpha\perp}\,\delta\,,\\
&\{n_k, \mathcal{H}'_\perp\} = (T_{\perp\bar k\perp} - h_{\bar k}{}^\alpha\partial_\alpha)\,\delta\,,\\
&\{h_{\bar k}{}^\alpha, \mathcal{H}'_\perp\} = h^{\bar m\alpha}(-h_{\bar k}{}^\beta\nabla_\beta n_m + T_{\bar m\bar k\perp} - n_k T_{\perp\bar m\perp})\,\delta + {}^3g^{\alpha\beta}n_k\partial_\beta\delta\,.
\end{aligned}
$$

6. Dokazati da algebra veza u lokalnom Lorencovom bazisu ima oblik (6.2).
7. Pokazati da generator lokalne Poenkareove simetrije (6.7) generiše dobre transformacije polja $b^k{}_\mu$, $A^{ij}{}_\mu$ i Ψ.
8. Koristeći invarijantnost lagranžijana u odnosu na lokalne Poenkareove transformacije (2.11), pokazati da je zakon tranformacije impulsa oblika

$$
\delta\pi_A = -\pi_B\frac{\partial\delta\varphi^B}{\partial\varphi^A} + \pi^\alpha_A\xi^0{}_{,\alpha} - \pi_A\xi^\nu{}_{,\nu}\,, \qquad \pi^\mu_A \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^A{}_{,\mu}}\,.
$$

9. Neka je G generator globalnih simetrija Hamiltonovih jednačina kretanja neke teorije. Pokazati da G zadovoljava uslov

$$
\{G, H_T\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0\,, \qquad \{G, \varphi_s\} \approx 0\,,
$$

gde su φ_s sve veze u teoriji.
10. Konstruisati generator lokalne simetrije teorije interagujućeg elektromagnetnog i Dirakovog polja:

$$
I = \int d^4x\big\{-\tfrac14 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar\psi[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi\big\}\,.
$$

Naći oblik površinskog člana i razjasniti smisao zakona održanja u slučaju parametra koji se na prostornoj beskonačnosti ponaša kao konstanta.
11. Asimptotski uslovi (6.11a) su invarijantni u odnosu na globalne Poenkareove transformacije. Pokazati, na osnovu toga, da izvodi polja zadovoljavaju (6.11b).
12. Na osnovu usvojene asimptotike za tetrade dokazati:

$$
\begin{aligned}
&n_0 = 1 + \mathcal{O}_1\,, && n_a = \mathcal{O}_1\,, &&\\
&N = 1 + \mathcal{O}_1\,, && N^\alpha = \mathcal{O}_1\,, && J = 1 + \mathcal{O}_1\,,\\
&\eta_{\bar a\bar b} = \eta_{ab} + \mathcal{O}_2\,, && \eta_{\bar 0\bar b} = \mathcal{O}_1\,, && \eta_{\bar 0\bar 0} = \mathcal{O}_1\,.
\end{aligned}
$$

GLAVA VII

GRAVITACIJA U RAVNOM PROSTOR–VREMENU

Postoji više mogućih pristupa razumevanju strukture gravitacije, ali se oni mogu grubo klasifikovati u dve kategorije, prema tome da li za osnovu uzimaju *geometrijsku* ili *čestičnu* strukturu teorije.

Većina relativista polazi od Ajnštajnove OTR koja je zasnovana na nekoliko opštih principa, kao što su princip ekvivalencije i princip opšte kovarijantnosti. Teorija je izražena jezikom Rimanove geometrije, u kojoj gravitaciono polje ima geometrijsku ulogu metrike prostor–vremena. Prvi pokušaji konstruisanja jedinstvene teorije polja bili su usmereni ka nalaženju odgovarajuće uloge elektromagnetnog polja. Danas znamo, zahvaljujući napretku kvantne fizike, da pored gravitacione i elektromagnetne postoje još i slabe i jake interakcije, pa program geometrijskog ujedinjenja interakcija postaje znatno složeniji.

S druge strane, sa gledišta standardne relativističke kvantne teorije polja nema apriornog razloga da se gravitaciona interakcija razmatra na bitno različitoj osnovi od drugih teorija polja. Prirodan je pokušaj da se gravitacija opiše kao neko relativističko polje u *ravnom* prostor–vremenu. Konstrukcija mora biti takva da se iz nje mogu dobiti sledeće osnovne eksperimentalne karakteristike gravitacije:

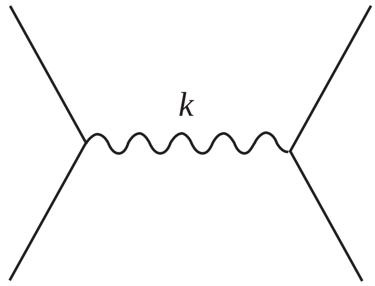
1° gravitaciona interakcija je dugog dometa, sa zakonom sile tipa r^{-2}; zatim,

2° ona je privlačna,

3° deluje na isti način na sve vrste materije (princip ekvivalencije), i

4° zadovoljava standardne klasične testove (gravitacioni crveni pomak, precesija perihela Merkura, skretanje svetlosti pri prolasku pored Sunca i vremensko zakašnjenje radio signala).

Ako gravitaciju posmatramo kao standardnu relativističku teoriju polja, onda gravitaciona sila nastaje izmenom (virtuelne) čestice koja se naziva *graviton* (sl. 7.1). Koje osobine mora imati graviton da bi reprodukovao osnovne eksperimentalne zahteve?



Slika 7.1 Gravitaciona sila nastaje izmenom gravitona

Sila dugog dometa, koja deluje po zakonu r^{-2}, u teoriji polja se opisuje izmenom čestice *mase nula*, kao što je slučaj u elektrodinamici. Može li se isključiti mogućnost veoma male, ali konačne mase? Odgovor je, kao što ćemo videti, potvrdan.

U relativističkoj teoriji polja čestična stanja se karakterišu odredjenom vrednošću mase i spina (heliciteta). Da bismo utvrdili spin gravitona, ispitaćemo različite mogućnosti i videti koje su od njih u skladu sa eksperimentalnim činjenicama koje smo naveli.

Ako je graviton *fermion*, tj. ima poluceo spin ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$,...), onda gravitaciona sila ne može nastati izmenom samo jednog gravitona. Tada bi čestica, koja emituje ili prima graviton polucelog spina, menjala svoj spin od celog na poluceo ili obratno, što nije osobina gravitacione interakcije. Izmena dva fermiona takodje nije dobra, jer se ne može dobiti zakon r^{-2}. Ako nastavimo dalje, pa uvedemo Ročestične sile, pri čemu svaka dva objekta interaguju i sa trećim koji se nalazi daleko od njih, onda se zakon r^{-2} može dobiti, ali situacija postaje dosta komplikovana (Feynman, 1962–63).

Zato ćemo se ograničiti na *bozone* spina 0, 1, 2, 3, ... Kako medju njima odabrati pogodne kandidate za prenos gravitacione interakcije? To se može uraditi, kao što ćemo videti, koristeći navedene osobine gravitacije.

1. TEORIJA SILE DUGOG DOMETA

Ispitaćemo, najpre, neke opšte osobine teorije bezmasenih čestica spina 0, 1 i 2, koje će biti korisne pri konstrukciji realistične teorije gravitacije u ravnom prostor–vremenu (Feynman, 1962–63; Kibble, 1965; Van Dam, 1974; Duff, 1975).

1.1 Skalarno polje

Dinamika slobodnog, realnog skalarnog polja mase nula zadana je lagranžijanom

$$\mathcal{L}_S = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi\,. \tag{7.1}$$

Opšti znak ovog izraza odredjen je tako da kvadrat prostornog izvoda $(\partial_\alpha\varphi)^2$ udje u $\mathcal{L}_S$ sa negativnim znakom, da bi hamiltonijan bio pozitivan. Izbor opšteg numeričkog koeficijenta je uslovan i utiče na normiranje polja φ, dok realnost polja ima za posledicu njegovu neutralnost.

Ako se lagranžijan interakcije sa drugim poljima (polja "materije") označi sa $\mathcal{L}_I$, jednačina kretanja skalarnog polja je oblika

$$K\varphi = J \equiv -\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\varphi}\,, \tag{7.2}$$

gde je $K \equiv -\Box$. Za nalaženje rešenja ove jednačine pogodno je definisati propagator (Grinovu funkciju) D jednačinom

$$K_x D(x-y) = \delta(x-y)\,.$$

Odavde se vidi da je veličina

$$\varphi(x) = \int d^4y D(x-y)J(y) \tag{7.3}$$

partikularno rešenje nehomogene jednačine (7.2). Granični uslovi koje zadovoljava $\varphi(x)$ odredjeni su graničnim uslovima koje zadovoljava $D(x-y)$. U impulsnoj reprezentaciji propagator je dat izrazom

$$D(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D(k)e^{ikx}\,, \qquad D(k) \equiv \frac{1}{k^2}\,. \tag{7.4}$$

Veličina $D(k)$ ima polove u tačkama $k_0 = \pm\omega_k$, $\omega_k \equiv \sqrt{\boldsymbol{k}^2}$, zbog čega prethodni izraz za $D(x)$ nije dobro definisan. Izborom načina obilaska ovih polova dobija se dobro definisan propagator koji zadovoljava odredjene granične uslove (tako se definiše retardovani propagator D_R, Fajnmanov propagator D_F, itd.). U klasičnoj teoriji granični uslovi za polje odgovaraju retardovanom propagatoru.

U slučaju statičnog izvora (J ne zavisi od vremena) u izrazu (7.3) se može izvršiti integracija po y_0, pa se dobija $\varphi(\boldsymbol{x}) = \int d^3y D(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})J(\boldsymbol{y})$, gde je $D(\boldsymbol{x})$ trodimenzioni propagator:

$$D(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{-\boldsymbol{k}^2}e^{-i\boldsymbol{kx}} = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\,, \qquad \nabla^2 D(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})\,.$$

Ako struja ne zavisi od polja, lagranžijan interakcije ima jednostavan oblik $\mathcal{L}_I = -J\varphi$. Tada je hamiltonijan interakcije $H_I = -\int d^3x\mathcal{L}_I$, pa energija interakcije struje J_1 sa poljem φ_2, koje potiče od struje J_2, postaje

$$E(x^0) = \int d^3x J_1(x)\varphi_2(x) = \int d^3x d^4y J_1(x)D(x-y)J_2(y)\,.$$

Za statične izvore ova energija je Kulonovog tipa.

1.2 Vektorsko polje

Realno vektorsko polje φ^μ mase nula opisuje se lagranžijanom

$$\mathcal{L}_V = -\tfrac{1}{4}(\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu)(\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu)\,, \tag{7.5}$$

koji je invarijantan u odnosu na gradijentne transformacije

$$\varphi_\mu \to \varphi'_\mu = \varphi_\mu + \partial_\mu\lambda\,.$$

Ova invarijantnost je neposredno vezana za bezmasenost polja. Da bismo ovu činjenicu razjasnili, analiziraćemo, najpre, neke osobine vektorskog polja mase μ, kao i mogućnost da se bezmasena teorija dobije u limesu $\mu^2 \to 0$.

Masivno vektorsko polje. Lagranžijan masivnog vektorskog polja,

$$\widetilde{\mathcal{L}}_V = -\tfrac{1}{4}(\partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu)(\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu) + \tfrac{1}{2}\mu^2\varphi_\mu\varphi^\mu\,, \tag{7.6}$$

daje sledeće jednačine kretanja:

$$\partial_\mu(\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu) + \mu^2\varphi^\nu = 0\,.$$

Diferenciranjem ove relacije dobija se, pri $\mu^2 \neq 0$, *dopunski uslov* $\partial_\nu\varphi^\nu = 0$, koji predstavlja uslov konzistentnosti jednačina kretanja. Njegovim korišćenjem jednačine kretanja postaju

$$(\Box + \mu^2)\varphi^\nu = 0\,,$$

odakle se vidi da je μ masa čestice koja odgovara datom polju. Dopunski uslov izbacuje iz φ^ν deo koji ima spin 0. U sistemu mirovanja, gde φ^ν ne zavisi od prostornih koordinata, važi $\partial_0\varphi^0 = 0$. Pošto je, s druge strane, $\partial_0\varphi^0 \sim \mu\varphi^0$, sledi da je u tom sistemu $\varphi^0 = 0$, kao što i treba da bude: čestica spina 1 opisuje se u svom sistemu mirovanja trovektorom φ^α.

Spinska struktura se može opisati uvodeći vektor polarizacije e_μ prostornog tipa. Posmatrajmo ravan talas

$$\varphi_\mu(x) = e_\mu e^{ik\cdot x} + e^*_\mu e^{-ik\cdot x}\,,$$

koji zadovoljava jednačine kretanja i dopunski uslov ako je

$$k^2 - \mu^2 = 0\,, \qquad k\cdot e = 0\,.$$

Iz drugog uslova sledi da vektor e^μ ima samo tri nezavisne komponente. To znači da postoje samo tri nezavisna vektora polarizacije $e^\mu_{(\lambda)}$, koje možemo izabrati da budu jedinični i medjusobno ortogonalni:

$$e^*_{(\lambda)}\cdot e_{(\lambda')} = -\delta_{\lambda\lambda'}\,.$$

Pošto je k^ν/μ jediničan vektor vremenskog tipa, relacija kompletnosti za bazu $(k^\nu/\mu, e^\nu_{(\lambda)})$ ima oblik

$$\sum_{\lambda=1}^{3} e^\mu_{(\lambda)} e^{\nu *}_{(\lambda)} + \frac{k^\mu k^\nu}{\mu^2} = \eta^{\mu\nu} \,. \tag{7.7}$$

Neka se ravan talas kreće duž z–ose, $k = (k^0, 0, 0, k^3)$. Vektori $e^\mu_{(\lambda)}$, koji se mogu izabrati tako da $e_{(1)}$ i $e_{(2)}$ budu ortogonalni na k, postaju

$$\begin{aligned} &e_{(1)} = (0,1,0,0), \qquad e_{(2)} = (0,0,1,0), \\ &e_{(3)} = (k^3/\mu, 0, 0, k^0/\mu) \,. \end{aligned}$$

Smisao pojedinih komponenti vektora polarizacije postaje jasniji ako se ispita njihovo ponašanje u odnosu na rotaciju oko z–ose, $e'^\mu = R^\mu{}_\nu e^\nu$, koja je definisana Lorencovom transformacijom

$$(R^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Takva transformacija ne menja k^μ, a za polarizaciju se dobija

$$e'_{(\pm 1)} = e^{\pm i\theta} e_{(\pm 1)}, \qquad e'_{(0)} = e_{(0)} \,, \tag{7.8}$$

gde su

$$e_{(\pm 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(1)} \pm i e_{(2)}) \,, \qquad e_{(0)} = e_{(3)} \,,$$

vektori kružne polarizacije. Veličine $e_{(+1)}, e_{(0)}, e_{(-1)}$ opisuju čestična stanja polarizacije spina $s = 1$ sa projekcijama $s_3 = +1, 0, -1$.

Ako je prisutna i interakcija sa materijom, jednačine kretanja postaju

$$\partial_\mu(\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu) + \mu^2 \varphi^\nu = J^\nu \equiv -\frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \varphi_\nu} \,. \tag{7.9a}$$

Koristeći uslov konzistentnosti, $\mu^2 \partial\cdot\varphi = \partial\cdot J$, one se mogu dovesti na oblik

$$(\Box + \mu^2)\varphi^\mu = \Big(\eta^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\mu^2}\Big) J_\nu \,. \tag{7.9b}$$

Rešenje ovih jednačina je oblika

$$\varphi^\mu(x) = \int d^4y D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \,, \tag{7.10}$$

gde je $D^{\mu\nu}$ propagator koji u impulsnom prostoru ima oblik

$$D^{\mu\nu}(k,\mu^2) = -\frac{P^{\mu\nu}}{k^2-\mu^2}\,, \qquad P^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu/\mu^2 = \sum_{\lambda=1}^{3} e^\mu_{(\lambda)} e^{\nu *}_{(\lambda)}\,. \tag{7.11}$$

Zadnji znak jednakosti sledi iz relacije kompletnosti (7.7). U sistemu mirovanja pri $k^2=\mu^2$ tenzor $P^{\mu\nu}$ predstavlja projektor na trodimenzioni prostor,

$$\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu/\mu^2 = \begin{cases} 0 & \text{pri } \mu=0 \text{ ili } \nu=0, \\ -\delta^{\alpha\beta} & \text{pri } \mu=\alpha, \nu=\beta\,, \end{cases}$$

pa stoga φ^μ u (7.10) ima samo tri nezavisne komponente.

Bezmaseno vektorsko polje. Lokalna invarijantnost lagranžijana (7.5) direktno je povezana sa bezmasenošću polja: lagranžijan (7.6) ne poseduje tu osobinu zbog masenog člana. Jednačine kretanja bezmasenog vektorskog polja u interakciji sa nekim poljem materije imaju oblik

$$K_{\mu\nu}\varphi^\nu = J_\mu, \qquad K_{\mu\nu} \equiv \Box\,\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu. \tag{7.12}$$

Konzistentnost ovih jednačina zahteva važenje zakona očuvanja $\partial\cdot J = 0$.

Zbog lokalne simetrije jednačine kretanja nemaju jednoznačno rešenje. Sloboda korišćenja gradijentnih transformacija ogleda se u singularnosti operatora $K_{\mu\nu}$: $K_{\mu\nu}\partial^\nu\lambda = 0$. Zato ne postoji odgovarajući inverzni operator — propagator, pa se jednačine (7.12) ne mogu rešiti jednoznačno.

Da bi se iz jednačina kretanja moglo naći rešenje, potrebno je nametnuti *gradijentne uslove* na polja, koji ograničavaju ili potpuno eliminišu slobodu gradijentnih transformacija. Broj ovih uslova je odredjen brojem parametara transformacije. U slučaju vektorskog polja za gradijentni uslov se može izabrati (kovarijantni) Lorencov uslov

$$\partial\cdot\varphi = 0\,, \tag{7.13}$$

koji, sada, ne sledi automatski iz jednačina kretanja. Ovaj uslov ne ograničava potpuno slobodu gradijentnih transformacija: još uvek su dozvoljene transformacije sa funkcijom $\lambda(x)$ koja zadovoljava uslov $\Box\,\lambda(x)=0$. Jednačine kretanja se znatno pojednostavljuju,

$$\Box\,\varphi^\mu = J^\mu\,, \tag{7.14}$$

i mogu biti rešene po φ^μ. U prostoru funkcija koje zadovoljavaju Lorencov uslov, operator $K_{\mu\nu}$ nije singularan ($K_{\mu\nu} = \Box\,\eta_{\mu\nu}$), pa se može definisati propagator kao inverzni operator od $K_{\mu\nu}$. Eksplicitan oblik glasi:

$$D^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} D\,. \tag{7.15}$$

Koristeći propagator sa zadanim graničnim uslovima može se naći partikularno rešenje nehomogene jednačine (7.14): $\varphi^\mu(x) = \int d^4y D^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y)$.

Pri zadavanju gradijentnog uslova mora se proveriti da li je on moguć, tj. da li postoji izbor proizvoljne funkcije $\lambda(x)$ u zakonu transformacije koji osigurava važenje izabranog uslova. Lorencov uslov je lokalno dobar. Zaista, ako φ^μ ne zadovoljava uslov (7.13), može se izvršiti transformacija sa parametrom λ odredjenim relacijom $\partial\cdot\varphi + \Box\lambda = 0$, posle čega φ'^μ zadovoljava (7.13).

Umesto nametanja gradijentnog uslova mi možemo, kao što se to često radi, modifikovati polazni lagranžijan dodavanjem člana koji narušava lokalnu simetriju. Mada oblik propagatora zavisi od izbora dodatnog člana, može se pokazati da fizičke posledice ne zavise — zato dodavanje ovakvog člana ne menja fizički sadržaj teorije. Sa dodatnim članom $-\frac{\alpha}{2}(\partial\cdot\varphi)^2$ lagranžijan (7.5) i odgovarajući propagator postaju

$$\mathcal{L}'_V = \mathcal{L}_V - \frac{\alpha}{2}(\partial\cdot\varphi)^2\,, \qquad D'_{\mu\nu} = -\frac{1}{k^2}\left[\eta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right].$$

Pri $\alpha = 1$ dobija se propagator (7.15). Često se koristi i transverzalni propagator koji je definisan graničnim uslovom $\alpha \to \infty$. Pri $\alpha \to 0$ nastaje singularan slučaj, jer dodatni član u lagranžijanu $\mathcal{L}'_V$ nestaje, pa ovaj ponovo postaje lokalno invarijantan.

Posmatrajmo sada ravan talas

$$\varphi_\mu = \epsilon_\mu e^{ik\cdot x} + \epsilon^*_\mu e^{-ik\cdot x}\,,$$

koji predstavlja rešenje jednačine (7.14) u vakuumu ($J^\mu = 0$) ako su ispunjeni uslovi

$$k^2 = 0\,, \qquad k\cdot\epsilon = 0\,. \tag{7.16}$$

Drugi uslov smanjuje broj nezavisnih komponenti vektora polarizacije ϵ_μ na tri. Posle fiksiranja Lorencovog uslova postoji još uvek sloboda gradijentnih transformacija sa parametrom λ za koji važi $\Box\lambda = 0$. Izaberimo λ u obliku

$$\lambda(x) = i\eta e^{ik\cdot x} - i\eta^* e^{-ik\cdot x}\,,$$

tako da dozvoljena gradijentna transformacija postaje

$$\epsilon'_\mu = \epsilon_\mu - \eta k_\mu\,.$$

Pošto je η nezavisan parametar, to od tri nezavisne komponente vektora ϵ_μ samo dve imaju fizički značaj. Ovo je direktna posledica gradijentne invarijantnosti teorije, odnosno bezmasenosti polja φ_μ.

Ako se ravan talas kreće duž z–ose, drugi uslov u (7.16) daje $\epsilon^0 = \epsilon^3$, a izborom $\eta = \epsilon_3/k_3$ postiže se $\epsilon^3 = 0$. Za dva nezavisna vektora polarizacije možemo uzeti

$$\epsilon_{(1)} = (0,1,0,0)\,, \qquad \epsilon_{(2)} = (0,0,1,0)\,.$$

Posmatranjem rotacije oko z–ose vidi se da vektori $\epsilon_{(\pm 1)}$ predstavljaju čestična stanja heliciteta $\lambda = \pm 1$. Vektor $\epsilon_{(3)} = (1, 0, 0, 1)$ nema fizičkog značaja (kao što je to bilo pri $\mu^2 \neq 0$), jer se gradijentnom transformacijom može anulirati.

Uslov kompletnosti (7.7) nije ispunjen u slučaju bezmasenog polja, za koje je $\mu^2 = 0$. Uvedimo vektor $\bar{k} = (k^0, -\boldsymbol{k})$ koji se dobija iz k inverzijom smera kretanja ravnog talasa i zadovoljava, pri $k^2 = 0$, sledeće uslove:

$$\bar{k}^2 = 0, \qquad \bar{k}\cdot\epsilon_{(1)} = \bar{k}\cdot\epsilon_{(2)} = 0\,.$$

Tada su vektori $k + \bar{k}$ i $k - \bar{k}$ vremenskog i prostornog tipa, redom, pa uslov kompletnosti dobija oblik

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^{\mu}_{(\lambda)}\epsilon^{\nu *}_{(\lambda)} + \frac{k^\mu \bar{k}^\nu + \bar{k}^\mu k^\nu}{k\cdot\bar{k}} = \eta^{\mu\nu}\,. \tag{7.17}$$

Može li se bezmasena teorija shvatiti kao granični slučaj masivne teorije? Odgovor na ovo pitanje nije sasvim jednostavan. Propagator masivnog polja nije definisan u graničnom slučaju $\mu^2 \to 0$, jer tada lagranžijan (7.6) postaje lokalno invarijantan. Kako onda preći na slučaj $\mu^2 = 0$? Odgovor se može dobiti posmatranjem masivnog polja koje interaguje sa *očuvanom* strujom ($k_\mu J^\mu = 0$), da bi granični slučaj $\mu^2 \to 0$ predstavljao konzistentnu teoriju. Tada je interakcija izmedju dve struje J_1 i J_2 opisana tzv. amplitudom interakcije,

$$M_{21} = J_2^\mu D^E_{\mu\nu}(k, \mu^2) J_1^\nu,$$

koja je, u ovom slučaju, jednaka sa energijom interakcije. Ovde je D^E efektivni propagator koji se dobija iz izraza (7.11) zanemarivanjem članova proporcionalnih sa k_ν. Pri $\mu^2 \to 0$ efektivni propagator postaje jednak sa propagatorom (7.15) bezmasene teorije. Ovaj rezultat je povezan sa činjenicom da se treće stanje polarizacije masivne teorije $\epsilon_{(3)} = (k^3/\mu, 0, 0, k^0/\mu)$ dekupluje od očuvane struje J^μ pri $\mu^2 \to 0$.

1.3 Polje simetričnog tenzora

Nadjimo sada lagranžijan za bezmaseno polje simetričnog tenzora drugog ranga $\varphi_{\mu\nu}$, zahtevajući od samog početka invarijantnost u odnosu na gradijentne transformacije

$$\varphi_{\mu\nu} \to \varphi'_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \partial_\mu\lambda_\nu + \partial_\nu\lambda_\mu\,. \tag{7.18}$$

U tom cilju navešćemo, najpre, sve moguće kvadratične invarijante koje mogu ući u slobodan lagranžijan:

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \varphi_{\mu\nu,\sigma}\varphi^{\mu\nu,\sigma}\,, &&I_2 = \varphi_{\mu\nu,\sigma}\varphi^{\mu\sigma,\nu}\,,\\
&I_3 = \varphi_{\mu\nu}{}^{,\lambda}\varphi^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}\,, &&I_4 = \varphi_{\mu\lambda}{}^{,\lambda}\varphi^{,\mu},\\
&I_5 = \varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu} &&(\varphi\equiv\varphi_\nu{}^\nu)\,.
\end{aligned}
$$

Sve ove invarijante nisu neophodne: I_3 se može pretvoriti u I_2 parcijalnom integracijom, tako da su samo četiri nezavisne. Lagranžijan je, dakle,

$$\mathcal{L}_T = aI_1 + bI_2 + cI_4 + dI_5\,.$$

Varirajući $\mathcal{L}_T$ po $\varphi^{\mu\nu}$ dobijaju se jednačine kretanja

$$-2a\Box\varphi_{\mu\nu} - b(\varphi_{\mu\sigma,\nu}{}^{\sigma} + \varphi_{\nu\sigma,\mu}{}^{\sigma}) - c(\varphi_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\varphi_{\lambda\sigma}{}^{,\lambda\sigma}) - 2d\eta_{\mu\nu}\Box\varphi = 0\,.$$

Ako sada izvršimo gradijentne transformacije i zahtevamo da se jednačine kretanja ne menjaju, dobija se uslov

$$(2a+b)\Box(\lambda_{\mu,\nu} + \lambda_{\nu,\mu}) + (b+c)2\lambda_{\sigma,\mu\nu}{}^{\sigma} + (c+2d)2\eta_{\mu\nu}\Box\lambda_\sigma{}^{,\sigma} = 0\,.$$

Birajući opšti faktor u $\mathcal{L}_T$ tako da bude $a = 1/2$, dobija se $b = -1$, $c = 1$, $d = -1/2$, pa je konačan oblik lagranžijana (Fierz i Pauli, 1939; Feynman, 1962–63)

$$\mathcal{L}_T = \tfrac{1}{2}\varphi_{\mu\nu,\sigma}\varphi^{\mu\nu,\sigma} - \varphi_{\mu\nu,\sigma}\varphi^{\mu\sigma,\nu} + \varphi_{\mu\sigma}{}^{,\sigma}\varphi^{,\mu} - \tfrac{1}{2}\varphi_{,\nu}\varphi^{,\nu}\,. \tag{7.19a}$$

Nekad je korisno upotrebiti drugi skup varijabli,

$$\bar\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi\,,$$

što pojednostavljuje formu $\mathcal{L}_T$:

$$\mathcal{L}_T = \tfrac{1}{2}\varphi_{\mu\nu,\sigma}\varphi^{\mu\nu,\sigma} - \bar\varphi_{\mu\nu,\sigma}\bar\varphi^{\mu\sigma,\nu} - \tfrac{1}{4}\bar\varphi_{,\nu}\bar\varphi^{,\nu}\,. \tag{7.19b}$$

Jednačine kretanja polja $\varphi_{\mu\nu}$ u interakciji sa poljem materije su oblika

$$
\begin{aligned}
&K_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi^{\sigma\rho} = J_{\mu\nu} \equiv -\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\varphi^{\mu\nu}}\,,\\
&K_{\mu\nu,\sigma\rho} \equiv -\eta_{\mu(\sigma}\eta_{\nu\rho)}\Box + \eta_{\mu(\sigma}\partial_\nu\partial_{\rho)} + \eta_{\nu(\sigma}\partial_\mu\partial_{\rho)}\\
&\qquad\quad - \eta_{\sigma\rho}\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}(\partial_\sigma\partial_\rho - \eta_{\sigma\rho}\Box)\,.
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Konzistentnost jednačina kretanja zahteva važenje zakona očuvanja struje: $\partial^\mu J_{\mu\nu} = 0$. Gradijentna simetrija ima za posledicu singularnost operatora

K ($K_{\mu\nu,\sigma\rho}\partial^\sigma\lambda^\rho = 0$) zbog čega ne postoji inverzni operator, pa se ne može naći jednoznačno rešenje jednačina kretanja.

Kovarijantni gradijentni uslov za tenzorsko polje ima oblik

$$\partial_\mu\bar\varphi^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\varphi^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\partial^\nu\varphi = 0\,, \tag{7.21}$$

i naziva se Hilbertovim uslovom. I ovaj se uslov, kao i Lorencov, može realizovati. S druge strane, ispunjenje uslova $\partial_\mu\varphi^{\mu\nu} = 0$, koji izgleda, na prvi pogled, isto tako prirodno kao i (7.21), ne može u opštem slučaju biti osigurano (Kibble, 1965).

Koristeći Hilbertov uslov, jednačine kretanja postaju jednostavnije:

$$-\tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho})\Box\varphi^{\lambda\rho} = J^{\mu\nu}\,. \tag{7.22}$$

Odgovarajući propagator je oblika

$$D^{\mu\nu,\lambda\rho} = \tfrac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\nu\lambda}\eta^{\mu\rho} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho})D\,. \tag{7.23}$$

Lagranžijan se može modifikovati dodavanjem člana koji narušava gradijentnu simetriju, tako da propagator postane dobro definisan, a fizički sadržaj teorije ostane isti. Ako je, naprimer, $\mathcal{L}'_T = \mathcal{L}_T - \frac{\alpha}{2}(\partial_\mu\bar\varphi^{\mu\nu}\partial^\lambda\bar\varphi_{\lambda\nu})$, odgovarajući propagator pri $\alpha = 1$ postaje jednak izrazu (7.23).

Partikularno rešenje jednačine (7.22) dobija se korišćenjem dobro definisanog propagatora: $\varphi^{\mu\nu}(x) = \int d^4y D^{\mu\nu,\lambda\rho}(x-y)J_{\lambda\rho}(y)$. Kad struja $J_{\lambda\rho}$ ne zavisi od polja $\varphi_{\mu\nu}$, energija interakcije izvora 1 i 2 postaje

$$E(x^0) = \int d^3x d^4y J_1^{\mu\nu}(x) D_{\mu\nu,\lambda\rho}(x-y) J_2^{\lambda\rho}(y)\,.$$

Ravan talas

$$\varphi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}e^{ik\cdot x} + \epsilon^*_{\mu\nu}e^{-ik\cdot x}$$

zadovoljava jednačine kretanja u vakuumu i Hilbertov uslov ako je

$$k^2 = 0\,, \qquad k^\mu\big(\epsilon_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\epsilon_\lambda{}^\lambda\big) = 0\,. \tag{7.24a,b}$$

Zbog četiri uslova (7.24b) simetričan tenzor polarizacije $\epsilon_{\mu\nu}$ ima $10 - 4 = 6$ nezavisnih komponenti, od kojih su samo dve fizičke. Zaista, posle zadavanja uslova (7.24b) moguće je izvršiti dodatne transformacije

$$\epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} - k_\mu\eta_\nu - k_\nu\eta_\mu\,,$$

koje ne narušavaju taj uslov. Zbog proizvoljnosti četiri parametra η_ν, broj fizičkih stepeni slobode se smanjuje na $6 - 4 = 2$.

U slučaju ravnog talasa koji se kreće duž z–ose, uslovi (7.24b) se mogu iskoristiti da se $\epsilon_{01}, \epsilon_{02}, \epsilon_{03}$ i ϵ_{22} izraze preko preostalih šest komponenti,

$$\begin{aligned} \epsilon_{01} &= -\epsilon_{31}\,, \qquad & \epsilon_{03} &= -\tfrac{1}{2}(\epsilon_{33}+\epsilon_{00})\,, \\ \epsilon_{02} &= -\epsilon_{32}\,, \qquad & \epsilon_{22} &= -\epsilon_{11}\,, \end{aligned}$$

dok se pogodnim izborom η_ν može postići

$$\epsilon'_{13} = \epsilon'_{23} = \epsilon'_{33} = \epsilon'_{00} = 0\,.$$

Samo komponente $\epsilon_{11} = -\epsilon_{22}$ i ϵ_{12} imaju odredjen fizički smisao, zbog čega postoje samo dva fizička tenzora polarizacije (Van Dam, 1974),

$$\epsilon_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.25}$$

gde $\epsilon_{(\lambda)}$ označava matricu $(\epsilon^{\mu\nu}_{(\lambda)})$.

Pri rotaciji oko z–ose ($\epsilon'^{\mu\nu} = R^\mu{}_\sigma R^\nu{}_\rho \epsilon^{\sigma\rho}$) dobija se sledeći zakon transformacije:

$$\epsilon'_{(\pm 2)} = e^{\pm 2i\theta}\epsilon_{(\pm 2)}\,, \qquad \epsilon_{(\pm 2)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_{(1)} \pm i\epsilon_{(2)})\,. \tag{7.26}$$

Komponente $\epsilon_{(\pm 2)}$, koje jedino i imaju fizičkog smisla, predstavljaju čestična stanja heliciteta $\lambda = \pm 2$.

U slučaju $k = (k^0, 0, 0, k^3)$, struje heliciteta ± 2 date su izrazom:

$$J_{(\pm 2)} = \epsilon^{\mu\nu}_{(\pm 2)} J_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(J_{11} - J_{22} \pm 2iJ_{12})\,.$$

Njihova interakcija ima oblik

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=\pm 2} J'_{(\lambda)} J^*_{(\lambda)} &= \tfrac{1}{2}(J'_{11} - J'_{22})(J^*_{11} - J^*_{22}) + 2J'_{12}J^*_{12} \\ &= (J'_{11}J^*_{11} + J'_{22}J^*_{22} + 2J'_{12}J^*_{12}) - \tfrac{1}{2}(J'_{11} + J'_{22})(J^*_{11} + J^*_{22})\,. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Pošto je, s druge strane,

$$\sum_{\lambda=\pm 2} J'_{(\lambda)} J^*_{(\lambda)} = J'_{\mu\nu}\Big(\sum_{\lambda=\pm 2} \epsilon^{\mu\nu}_{(\lambda)} \epsilon^{\sigma\rho *}_{(\lambda)}\Big) J^*_{\sigma\rho} \equiv J'_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu,\sigma\rho} J^*_{\sigma\rho}\,,$$

lako se dobija izraz za polarizacionu sumu (Schwinger, 1970):

$$\Pi^{\mu\nu,\sigma\rho} = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}) - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}, & \text{za } \mu,\nu,\sigma,\rho \neq 0, \\ 0, & \text{bar jedan indeks} = 0 \text{ ili } 3. \end{cases}$$

U slučaju opšteg impulsa k rezultat se dobija iz prvog reda na desnoj strani prethodnog izraza zamenom $\eta^{\mu\nu} \to \Pi^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - (k^\mu \bar{k}^\nu + \bar{k}^\mu k^\nu)/k\cdot\bar{k}$:

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu,\sigma\rho} =& \tfrac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}) - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho} \\ &+ k - \text{zavisni članovi}\,.\end{aligned} \tag{7.28}$$

Delovi ovog izraza, koji zavise od impulsa, mogu se zanemariti ako posmatramo interakciju očuvanih struja.

Jednačina kretanja (7.22) se lako može svesti na oblik

$$-\Box\,\varphi^{\mu\nu} = J^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}J_\lambda{}^\lambda \equiv \bar{J}^{\mu\nu}\,. \tag{7.29}$$

Naredna razmatranja bliže razjašnjavaju strukturu ove jednačine. Posmatrajmo jednačinu

$$-\Box\,\varphi^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}\,,$$

koja se razlikuje od (7.29). Njeno rešenje ima oblik $\varphi^{\mu\nu} = J^{\mu\nu}/k^2$, pa se interakcija polja $\varphi^{\mu\nu}$ sa strujom $J'_{\mu\nu}$ može predstaviti jednačinom

$$J'_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} = J'_{\mu\nu}\,\frac{1}{k^2}\,J^{\mu\nu}\,.$$

U sistemu $k = (k^0, 0, 0, k^3)$ zakon očuvanja struje glasi $k^0 J_{0\nu} = -k^3 J_{3\nu}$. Kad ovu relaciju iskoristimo da eliminišemo veličine sa indeksom 3 na desnoj strani prethodne jednačine, interakcija se razdvaja na dva dela: trenutni deo, sa zakonom tipa $1/(k^3)^2$, i retardovani deo, sa zakonom tipa $1/k^2$. Retardovani deo je oblika

$$\frac{1}{k^2}(J'_{11}J_{11} + J'_{22}J_{22} + 2J'_{12}J_{12})\,,$$

i predstavlja sumu *tri* nezavisna člana, ili tri polarizacije. Eliminacija doprinosa svih spinova osim $\lambda = \pm 2$ postiže se dodavanjem amplitude

$$-\frac{1}{2}J'_\mu{}^\mu\,\frac{1}{k^2}\,J_\nu{}^\nu\,,$$

posle čega se retardovan deo svodi na (7.27). Ovo dodavanje je ekvivalentno izmeni polazne jednačine, koja postaje

$$-\Box\,\varphi^{\mu\nu} = J^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}J_\lambda{}^\lambda\,,$$

i svodi se na (7.29). Tako vidimo da jednačine kretanja (7.29) zaista opisuju bezmaseno polje heliciteta ± 2.

1.4 Znak statičke interakcije

Interesantno je uočiti naizmeničnu promenu znakova u izrazima (7.4), (7.15) i (7.23), koji definišu propagatore bezmasenih polja spina 0, 1 i 2, redom, što je posledica znakova odgovarajućih lagranžijana (7.1), (7.5) i (7.19) (ovi znakovi su odredjeni uslovima pozitivne definitnosti hamiltonijana). Ova činjenica ima veoma značajan uticaj na osobine statičke interakcije izmedju čestica (polja materije). U statičkom slučaju samo veličina J i komponente J^0 i J^{00} ne iščezavaju (slična osobina se dobija i za polja proizvoljnog spina). Ovo je jasno, jer jedini vektor pomoću koga se konstruišu struje jeste p^μ. Energija statičke interakcije izmedju čestica 1 i 2 opisana je izrazima

$$J_1 D J_2 \,, \qquad J_1^\mu D_{\mu\nu} J_2^\nu \,, \qquad J_1^{\mu\nu} D_{\mu\nu,\lambda\rho} J_2^{\lambda\rho} \,,$$

gde su svi indeksi jednaki nuli, pa se pojavljuje sa pozitivnim ili negativnim znakom, u zavisnosti od toga da li je spin polja paran ili neparan.

Statička sila izmedju istih čestica je, dakle, privlačna samo u slučaju parnog spina.

Ovo je glavni razlog za odbacivanje polja spina 1 kao kandidata za opis gravitacije.

Interesantno je na ovom mestu pomenuti teorijsku mogućnost postojanja *negativne* mase. Tada bi interakcija velike pozitivne mase M sa malom negativnom masom m imala promenjen znak statičke interakcije (sile). Medjutim, u Njutnovoj teoriji je

$$-m_g \frac{GM}{\boldsymbol{x}^2} \hat{\boldsymbol{x}} = m_i \ddot{\boldsymbol{x}} \,,$$

pa ako važi princip ekvivalencije ($m_i = m_g$), *ubrzanje* ostaje isto, bez obzira na promenjen znak sile. Drugim rečima, Njutnova jabuka bi pala na Zemlju i kad bi imala negativnu masu. Gravitaciono odbijanje tela bi se moglo pojaviti u slučaju $m_i/m_g < 0$. Postojala je ideja da je za antičestice $m_g < 0$, što bi (zbog $m_i > 0$) narušilo princip ekvivalencije. Pokazalo se da takva pretpostavka nije u skladu sa rezultatima Etvešovog eksperimenta.

2. POKUŠAJ IZGRADNJE REALISTIČNE TEORIJE

Dosadašnja razmatranja moguće prirode gravitona ukazuju na sledeće njegove osobine:

a) masa gravitona je nula, što sledi iz činjenice da je gravitaciona interakcija dugog dometa, sa zakonom sile tipa r^{-2};

b) spin gravitona je paran, jer bi inače statička interakcija dve čestice imala pogrešan znak.

Posle razmatranja bezmasenih polja spina 0 i 2, postavlja se pitanje: kakva je situacija sa poljima spina $s > 2$? Razmatranja vezana za relativistički kovarijantnu kvantnu teoriju polja (dodatak G) dovode nas do sledećeg zaključka:

c) polja spina $s > 2$ nisu dobri kandidati za opis gravitacione interakcije. Tako, na primer, energija interakcije probne čestice spina 3 sa statičkim, tačkastim izvorom ima oblik koji narušava princip ekvivalencije (Van Dam, 1974). Prema tome,

bezmasena polja spina 0 ili 2 su jedini kandidati za opis gravitona.

Da bismo videli koja varijanta je realistična, izračunaćemo neke opservacione posledice ovih teorija. Takodje ćemo razmotriti mogućnost male, ali konačne mase gravitona (Van Dam i Veltman, 1970; Boulware i Deser, 1972).

2.1 Skalarno gravitaciono polje

Prvo ćemo ispitati teoriju gravitacije opisanu lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I \,, \tag{7.30}$$

gde je $\mathcal{L}_S$ lagranžijan skalarnog gravitacionog polja (7.1), $\mathcal{L}_M$ je slobodan lagranžijan materije, a $\mathcal{L}_I$ opisuje interakciju polja φ sa tragom tenzora energije–impulsa:

$$\mathcal{L}_I = -\lambda\varphi T \,. \tag{7.31a}$$

Pošto je za elektromagnetno polje $T = 0$, to skalarno gravitaciono polje *ne interaguje* sa elektromagnetnim. Zato ova teorija predvidja da gravitaciono polje ne utiče na kretanje elektromagnetnog polja: nema savijanja svetlosnog zraka pri prolazu pored Sunca, niti zakašnjenja radio signala, što je u kontradikciji sa eksperimentalnim činjenicama.

U daljem izlaganju posmatraćemo situaciju kad se dinamika materije može opisati čestičnom varijablom $z^\mu(s)$, što je pogodno za razmatranje klasične dinamike. U tom slučaju

$$I_M = \int d^4x \mathcal{L}_M(x) = -M \int ds \,, \tag{7.31b}$$

$$T^{\mu\nu}(x) = M \int \frac{dz^\mu}{ds}\frac{dz^\nu}{ds}\delta(x - z(s))ds \,, \tag{7.31c}$$

gde je $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dz^\mu dz^\nu$, a M predstavlja masu čestice.

1. Nadjimo, najpre, polje koje generiše statička, tačkasta čestica. Iz izraza za $T^{\mu\nu}$ dobija se $T(x) = M \int \delta(x - z(s))ds$, pa uslov statičnosti, posle integracije po $z^0(s) = s$, daje

$$T(x) = M\delta(\boldsymbol{x}) \,.$$

Posmatrana čestica se nalazi u koordinatnom početku, $\boldsymbol{z} = 0$. Jednačina kretanja za φ, $-\Box\varphi = \lambda T$, ima, u ovom slučaju, rešenje

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda M D(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{M}{r}\,. \tag{7.32}$$

Energija interakcije probne čestice mase m sa statičkim poljem data je izrazom

$$E(x^0) = \lambda \int d^3x T'(x)\varphi(x) = -\frac{\lambda^2}{4\pi}\frac{M}{r}\frac{m}{u^0}\,, \tag{7.33}$$

gde je $u^0 = dx^0/ds$. U slučaju čestice koja se sporo kreće $u^0 \approx 1$, pa gornji izraz predstavlja *Njutnov zakon* ako je $\lambda^2/4\pi = G$.

Veličina λ je univerzalna konstanta, što je u skladu sa principom ekvivalencije.

Iz Njutnovog zakona, i jednakosti $\Delta E = h\nu$, dobija se gravitacioni *crveni pomak*. Da bismo to pokazali, posmatrajmo neki atom čije osnovno stanje ima masu m_0, a prvo pobudjeno stanje masu m_1. Atom se nalazi u gravitacionom polju tela mase M na rastojanju r od njega. Pri $r \to \infty$ atom zrači učestanošću ν_0, $2\pi\nu_0 = m_1 - m_0$. Pri konačnom r energija osnovnog stanja je $m_0(1 - GM/r)$, a slično se dobija i za energiju prvog pobudjenog stanja. Otuda je energija izračenog fotona (koju meri posmatrač na beskonačnosti) data izrazom

$$2\pi\nu = (m_1 - m_0)(1 - GM/r) = 2\pi\nu_0(1 - GM/r)\,. \tag{7.34}$$

Ovakvo predvidjanje crvenog pomaka je provereno sa tačnošću od 1% (Misner, Thorn i Wheeler, 1970).

Da bismo našli jednačine kretanja probne čestice, izrazićemo deo dejstva koji sadrži čestičnu varijablu $z(s)$ u obliku

$$I_{MI} = -M \int [1 + \lambda\varphi(z)]ds\,. \tag{7.35}$$

Uvodeći

$$g_{\mu\nu} = (1 + \lambda\varphi)^2\eta_{\mu\nu} \tag{7.36}$$

gornji izraz se može geometrijski interpretirati kao dejstvo za česticu u prostoru metrike $g_{\mu\nu}$. Variranjem po $z(s)$ dobija se jednačina kretanja

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dz^\nu}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial z^\mu}\frac{dz^\lambda}{ds}\frac{dz^\sigma}{ds}\,,$$

koja predstavlja geodezijsku jednačinu u Rimanovom prostoru sa metrikom $g_{\mu\nu}$.

2. Ako gravitaciono polje statičkog i tačkastog izvora (7.32) interpretiramo kao polje Sunca, onda se može naći veličina *precesije perihela* pri kretanju planeta po orbitama. Za odredjivanje ovog efekta iskoristićemo Hamilton–Jakobijevu jednačinu (Landau i Lifšic, 1973)

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial x^\mu}\frac{\partial I}{\partial x^\nu} - m^2 = 0\,, \tag{7.37}$$

gde je I dejstvo, a m masa planete čije se kretanje posmatra. Metrika (7.36) je sferno simetrična, tj. u sfernim koordinatama $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ ne zavisi od t i ϕ, pa geodezijske jednačine daju dve konstante kretanja: energiju E (za $\mu = 0$) i ugaoni momenat L ($\mu = 3$):

$$E = (1+\lambda\varphi)^2\frac{dt}{ds}, \qquad L = (1+\lambda\varphi)^2 r^2\frac{d\phi}{ds}\,. \tag{7.38}$$

Pošto se kretanje vrši u jednoj ravni, izaberimo da to bude $\theta = \pi/2$, posle čega Hamilton–Jakobijeva jednačina postaje

$$(1+\lambda\varphi)^{-2}\left[\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial I}{\partial \phi}\right)^2\right] - m^2 = 0\,.$$

Tražeći dejstvo u obliku

$$I = -Et + L\phi + I_r\,, \tag{7.39}$$

za I_r se dobija

$$I_r = \int \left[E^2 - L^2/r^2 - m^2(1+\lambda\varphi)^2\right]^{1/2} dr\,.$$

Radi izračunavanja oblika trajektorije, izrazićemo I_r u obliku

$$I_r = \int \left[E^2 - m^2 + \frac{2GMm^2}{r} - \frac{1}{r^2}\left(L^2 + G^2M^2m^2\right)\right]^{1/2} dr\,.$$

Promena koeficijenta uz član r^{-2} (u odnosu na vrednost L^2 koju ima u Njutnovoj teoriji) uzrokuje sistematsko pomeranje perihela planetske orbite. Pošto je jednačina trajektorije $\phi + \partial I_r/\partial L = \text{const.}$, izmena ugla ϕ pri jednom obilasku planete po orbiti iznosi

$$\Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial L}\Delta I_r\,,$$

gde je ΔI_r odgovarajuća izmena I_r. Razlažući I_r po stepenima male veličine $G^2M^2m^2/L^2$, koja stoji uz r^{-2}, dobija se

$$\Delta I_r = \Delta I_r^{(0)} + \frac{\eta}{2L}\frac{\partial}{\partial L}\Delta I_r^{(0)}\,, \qquad \eta \equiv G^2M^2m^2\,,$$

gde $I_r^{(0)}$ opisuje kretanje po elipsi. Diferencirajući ovaj izraz po L, i uzimajući u obzir da je $-\partial \Delta I_r^{(0)}/\partial L = \Delta\phi^{(0)} = 2\pi$, dobija se rezultat

$$\Delta\phi = 2\pi - \frac{\eta}{L^2}\pi \,.$$

Drugi član u ovom izrazu opisuje vekovno pomeranje perihela putanje za vreme jednog obilaska planete,

$$\delta\phi = -\frac{G^2M^2m^2}{L^2}\pi \,, \tag{7.40}$$

i ono je jednako $-1/6$ Ajnštajnovog rezultata.

Skalarna teorija, dakle, nije dobra, jer u njoj nema skretanja svetlosnog zraka pri prolasku pored Sunca, kao ni zakašnjenja radio signala, dok vekovno pomeranje perihela Merkura nije u skladu sa posmatranjima.

2.2 Simetričan tenzor kao gravitaciono polje

Sada ćemo ispitati opservacione posledice teorije gravitacije zasnovane na lagranžijanu

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I \,, \tag{7.41}$$

gde je $\mathcal{L}_T$ lagranžijan tenzorskog gravitacionog polja (7.19), $\mathcal{L}_M$ je slobodan lagranžijan materije, a interakcija je oblika

$$\mathcal{L}_I = -\lambda\varphi_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \,. \tag{7.42}$$

1. Posmatrajmo maseno polje materije koje se može opisati čestičnim variablama. Jednačine polja $\varphi^{\mu\nu}$, posle zadavanja Hilbertovog gradijentnog uslova, dobijaju oblik (7.22), uz zamenu $J_{\mu\nu} \to \lambda T_{\mu\nu}$. Rešenje za $\varphi^{\mu\nu}$ je oblika

$$\begin{aligned} \varphi^{\mu\nu}(x) &= \lambda \int d^4x' D^{\mu\nu,\lambda\rho}(x-x')T_{\lambda\rho}(x') \\ &= \lambda \int d^4x' D(x-x')\overline{T}^{\mu\nu}(x') \,, \end{aligned}$$

gde je $\overline{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}T$. U slučaju statičkog izvora $T^{\mu\nu}$ ne zavisi od x_0' i $T^{\mu\alpha} = T^{\alpha\beta} = 0$, pa sledi

$$\begin{aligned} &\varphi^{00}(\boldsymbol{x}) = \lambda \int d^3x' D(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\, \tfrac{1}{2}T(\boldsymbol{x}') \,, \\ &\varphi^{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}) = -\eta^{\alpha\beta}\varphi^{00}(\boldsymbol{x}) \,, \\ &\varphi^{\mu 0}(\boldsymbol{x}) = 0 \,. \end{aligned} \tag{7.43a}$$

Ako je izvor tačkast, onda je $T(\boldsymbol{x}) = M\delta(\boldsymbol{x})$, pa se dobija

$$\varphi^{00}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda}{8\pi}\frac{M}{r}\,. \tag{7.43b}$$

Energija interakcije probne čestice mase m sa statičkim poljem ima oblik

$$E(x^0) = \lambda\int d^3x T'_{\mu\nu}(x)\varphi^{\mu\nu}(x) = -\frac{\lambda^2}{4\pi}\frac{M}{r}\Big(p_0 - \frac{m^2}{2p_0}\Big)\,. \tag{7.44}$$

Pri sporom kretanju probne čestice $p_0 \approx m$, pa prethodni izraz daje *Njutnov zakon* ako je $\lambda^2/8\pi = G$.

Univerzalnost konstante λ je u skladu sa principom ekvivalencije.

Crveni pomak se dobija iz važenja Njutnovog zakona (kao i u slučaju skalarnog polja), i u skladu je sa merenjima.

Deo dejstva koji sadrži čestične varijable može se izraziti u obliku

$$\begin{aligned} I_{MI} &= -m\int\big[\eta_{\mu\nu} + \lambda\varphi_{\mu\nu}(z)\big]\frac{dz^\mu}{ds}\frac{dz^\nu}{ds}ds \\ &= -m\int\big[(\eta_{\mu\nu} + 2\lambda\varphi_{\mu\nu})dz^\mu dz^\nu\big]^{1/2} + \mathcal{O}(\lambda^2)\,. \end{aligned} \tag{7.45}$$

Ako uvedemo veličinu

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda\varphi_{\mu\nu}\,, \tag{7.46}$$

jednačine kretanja materije dobijaju oblik geodezijskih jednačina u Rimanovom prostoru sa metrikom $g_{\mu\nu}$. Sve čestice se u gravitacionom polju kreću na isti način, nezavisno od svojih masa.

2. Za izračunavanje *precesije perihela* putanja planeta oko Sunca koristićemo Hamilton–Jakobijevu jednačinu (7.37), sa metrikom koja potiče od statičkog, tačkastog izvora. Ona postaje, pri $\theta = \pi/2$,

$$(1 - r_g/r)^{-1}\Big(\frac{\partial I}{\partial t}\Big)^2 - (1 + r_g/r)^{-1}\Big[\Big(\frac{\partial I}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial I}{\partial\phi}\Big)^2\Big] - m^2 = 0\,,$$

gde je $r_g = 2GM$. Tražeći I u obliku (7.39) dobija se

$$I_r = \int dr\left[\frac{1 + r_g/r}{1 - r_g/r}E^2 - \frac{L^2}{r^2} - m^2(1 + r_g/r)\right]^{1/2}\,.$$

Vršeći razlaganje u red po r_g/r može se identifikovati član tipa r^{-2}:

$$-\frac{1}{r^2}(L^2 - 2m^2r_g^2) = -\frac{1}{r^2}(L^2 - 8G^2m^2M^2)\,.$$

Iz njega se direktno dobija veličina pomeranja perihela u toku jednog obilaska putanje,

$$\delta\phi = \frac{8G^2M^2m^2}{L^2}\pi\,, \tag{7.47}$$

što iznosi 4/3 Ajnštajnovog rezultata ($\delta\phi = 43.03''$), i ne slaže se sa podacima poznatim za Merkur ($\delta\phi = 43.11 \pm 0.45''$).

3. *Kretanje svetlosti* u gravitacionom polju (7.43) može se opisati koristeći Hamilton–Jakobijevu jednačinu za dejstvo ψ,

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} = 0\,, \tag{7.48}$$

koja se dobija iz (7.37) pri $m^2 \to 0$. Radijalni deo dejstva ψ_r se dobija direktno iz izraza I_r u limesu $m^2 \to 0$:

$$\psi_r = \int dr\Big(\frac{1+r_g/r}{1-r_g/r}\,\omega^2 - \frac{L^2}{r^2}\Big)^{1/2},$$

gde smo energiju svetlosti označili sa ω.

Vremenska zavisnost $r = r(t)$ za putanju svetlosnog zraka definiše se relacijom $-t + \partial\psi_r/\partial\omega = \text{const.}$, i ima oblik

$$t = \int dr\,\frac{1+r_g/r}{1-r_g/r}\Big(\frac{1+r_g/r}{1-r_g/r} - \frac{\rho^2}{r^2}\Big)^{-1/2},$$

gde je $\rho = L/\omega$. Uslov da je radijalna brzina jednaka nuli u tački $r = b$, gde je putanja najbliža Suncu, daje relaciju

$$\rho^2 = b^2\,\frac{1+r_g/b}{1-r_g/b}\,.$$

Veličina ρ je, dakle, jednaka sa b samo u najnižoj aproksimaciji po r_g/b.

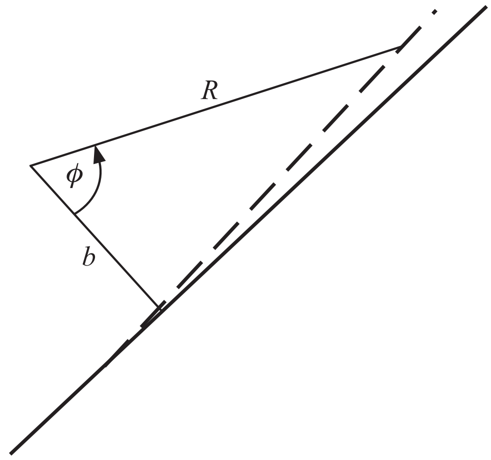
i) Ispitaćemo, najpre, *skretanje svetlosti* u polju Sunca. Ako se u dejstvu ψ_r zanemari gravitaciona interakcija ($r_g \to 0$), jednačina putanje svetlosnog zraka, $\phi + \partial\psi_r/\partial L = \text{const.}$, ima za rešenje pravu $r = \rho/\cos\phi$ koja prolazi na rastojanju $r = \rho$ od koordinatnog početka (slika 7.2).

U prvoj aproksimaciji po r_g/b radijalno dejstvo ima oblik

$$\psi_r = \omega\int dr\Big(1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}\Big)^{1/2}.$$

Razlaganjem podintegralnog izraza po stepenima od r_g/r dobija se

$$\psi_r \simeq \psi_r^{(0)} + \omega r_g\,\mathrm{arch}(r/\rho)\,,$$



Slika 7.2 Kretanje elektromagnetnog signala u gravitacionom polju

gde $\psi_r^{(0)}$ odgovara pravolinijskom kretanju svetlosnog zraka:

$$\psi_r^{(0)} = \omega \int dr \sqrt{1 - \rho^2/r^2} = \omega\sqrt{r^2 - \rho^2} - \omega\rho \arccos(\rho/r)\,.$$

Izmena ψ_r pri kretanju svetlosnog zraka od nekog rastojanja $r = R$ ($\phi < 0$) do tačke $r = b$, a zatim do $r = R$ ($\phi > 0$), iznosi

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\omega r_g \,\mathrm{arch}(R/\rho)\,.$$

Odgovarajuća promena ugla ϕ se dobija diferenciranjem po $L = \rho\omega$:

$$\Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial L}\Delta\psi_r = \Delta\phi^{(0)} + \frac{2r_g R}{\rho\sqrt{R^2 - \rho^2}}\,,$$

gde je $\Delta\phi^{(0)} = -\partial\Delta\psi_r^{(0)}/\partial L$. U limesu $R \to \infty$ dobija se isti rezultat kao i u OTR:

$$\Delta\phi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}\,.$$

Pošto je $\Delta\phi > \pi$, ovo znači da se svetlosni zrak savija prema izvoru gravitacionog polja za ugao

$$\delta\phi = \frac{2r_g}{b} = \frac{4MG}{b}\,, \tag{7.49}$$

gde smo iskoristili $\rho \approx b$. Za svetlosni zrak, koji prolazi pored ivice Sunčevog diska ($b = R_S$), prethodni izraz daje $\delta\phi = 1.75$", u skladu sa rezultatima posmatranja.

ii) Izračunajmo sada vreme koje protekne dok elektromagnetni signal predje put od $r = b$ do $r = R$ ($\phi > 0$) (slika 7.2). Iz promene radijalnog dela dejstva

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + \omega r_g \operatorname{arch}(R/\rho)$$

dobija se odgovarajući interval koordinatnog vremena:

$$\begin{aligned}\Delta t = \frac{\partial}{\partial\omega}\Delta\psi_r &= \frac{\partial}{\partial\omega}\Delta\psi_r^{(0)} + r_g \operatorname{arch}(R/\rho) + r_g \frac{R-\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \\ &= \Delta t^{(0)} + \delta t\,.\end{aligned}$$

Ovde je $\Delta t^{(0)} = \sqrt{R^2-\rho^2}$ koordinatno vreme koje odgovara pravolinijskom kretanju signala, a ostali članovi predstavljaju gravitacionu popravku δt. Direktno poredjenje sa rezultatom Ajnštajnove OTR daje

$$\delta t = \delta t^E + \frac{1}{2} r_g \Big(\frac{R-\rho}{R+\rho}\Big)^{1/2}. \tag{7.50}$$

Pri posmatranju prostiranja radio signala od Zemlje do Sunca (rastojanje R_1), pa zatim do Merkura ili neke druge planete (rastojanje od Sunca R_2), ukupna popravka iznosi ($\rho \approx b$)

$$\delta t_1 + \delta t_2 = \delta t_1^E + \delta t_2^E + \frac{1}{2} r_g \Big[\Big(\frac{R_1-b}{R_1+b}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{R_2-b}{R_2+b}\Big)^{1/2}\Big].$$

Ajnštajnov deo je najveći kad signal prolazi pored samog Sunčevog diska ($b = R_S$), i za Merkur iznosi 72 km $\simeq$ 240 μsec, što je u skladu sa rezultatima merenja. Preostala dva člana predstavljaju malu popravku ($b \ll R_1, R_2$), koja ne utiče bitno na slaganje sa eksperimentom.

2.3 Može li graviton imati masu?

Prethodna razmatranja pokazuju da bezmasena čestica spina 2 veoma dobro opisuje gravitacionu interakciju. Može li graviton imati malu, ali konačnu masu μ? Pokazaćemo da to nije moguće bez značajnog narušenja slaganja teorije sa eksperimentalnim testovima. Razlog ovog pomalo neočekivanog rezultata je taj što se propagator masivnog gravitona razlikuje od propagatora bezmasenog gravitona i pri $\mu^2 \to 0$ (Van Dam i Veltman, 1970; Boulware i Deser, 1972; Schwinger, 1970).

Teorija masivne čestice spina 2 opisana je lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_T - \tfrac{1}{2}\mu^2(\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} - \varphi^2)\,. \tag{7.51}$$

Interesantno je zapaziti oblik masenog člana koji sadrži ne samo izraz $\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$, već i φ^2. Jednačina kretanja je oblika

$$\begin{aligned}(-\Box - \mu^2)\varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\rho,\nu}{}^{\rho} + \varphi_{\nu\rho,\mu}{}^{\rho} - \varphi_{,\mu\nu} \\ - \eta_{\mu\nu}\big[\varphi_{\sigma\rho}{}^{,\sigma\rho} + (-\Box - \mu^2)\varphi\big] = \lambda T_{\mu\nu}\,.\end{aligned} \tag{7.52a}$$

Uzimanjem traga i diferenciranjem po x^μ dobija se

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\lambda}{3\mu^2}\Big(T - \frac{2}{\mu^2}T_{\sigma\rho}{}^{,\sigma\rho}\Big)\,, \\ \partial^\mu\varphi_{\mu\nu} &= -\frac{\lambda}{\mu^2}\partial^\mu T_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{3\mu^2}\partial_\nu\Big(T - \frac{2}{\mu^2}T_{\sigma\rho}{}^{,\sigma\rho}\Big)\,. \end{aligned} \tag{7.52b}$$

U vakuumu $\varphi_{\mu\nu}$ zadovoljava jednačine karakteristične za masivno polje spina 2,

$$(-\Box - \mu^2)\varphi_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \varphi = 0\,,$$

čime je opravdan oblik lagranžijana (7.51).

Koristeći izraze (7.52b) jednačina kretanja postaje

$$\begin{aligned} (-\Box - \mu^2)\varphi_{\mu\nu} =& \lambda T_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\mu^2}\big(\partial_\mu T_{\lambda\nu}{}^{,\lambda} + \partial_\nu T_{\lambda\mu}{}^{,\lambda}\big) \\ & - \frac{\lambda}{\mu^2}\eta_{\mu\nu}T_{\sigma\rho}{}^{,\sigma\rho} - \frac{\lambda}{3}\Big(\eta_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\mu^2}\Big)\Big(T - \frac{2}{\mu^2}T_{\sigma\rho}{}^{,\sigma\rho}\Big)\,. \end{aligned}$$

Prelazeći u impulsni prostor, rešenje ove jednačine dobija oblik

$$\varphi_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu,\lambda\rho}(k,\mu^2)\lambda T^{\lambda\rho}\,, \tag{7.53a}$$

gde je $D(k,\mu^2)$ propagator masivne čestice spina 2:

$$D_{\mu\nu,\lambda\rho}(k,\mu^2) = \frac{1}{k^2-\mu^2}\big[\tfrac{1}{2}(P_{\mu\lambda}P_{\nu\rho} + P_{\mu\rho}P_{\nu\lambda}) - \tfrac{1}{3}P_{\mu\nu}P_{\lambda\rho}\big]\,. \tag{7.53b}$$

Pošto tenzor $P_{\mu\nu}$ predstavlja projektor na trodimenzioni prostor stanja spina 1, polje $\varphi_{\mu\nu}$ ima šest nezavisnih komponenti, a uslov $\varphi = 0$ pri $k^2 = \mu^2$ smanjuje taj broj na pet, što odgovara masivnom polju spina 2.

Ravan talas impulsa k,

$$\varphi_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu}e^{ik\cdot x} + e^*_{\mu\nu}e^{-ik\cdot x}\,,$$

zadovoljava jednačine polja u vakuumu ako su ispunjeni uslovi

$$k^2 - \mu^2 = 0\,, \qquad k^\mu e_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \eta^{\mu\nu}e_{\mu\nu} = 0\,. \tag{7.54}$$

U sistemu mirovanja zadnje dve relacije postaju

$$e_{0\nu} = 0\,, \qquad e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0\,.$$

Zbog ovih pet uslova postoji samo $10-5=5$ nezavisnih tenzora $e^{(\lambda)}_{\mu\nu}$, i oni se mogu izabrati tako da budu ortonormirani $\left(e^{(\lambda)}_{\mu\nu}e^{(\lambda')\mu\nu}=\delta^{\lambda\lambda'}\right)$:

$$
\begin{aligned}
e_{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad & e_{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \\
e_{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, \qquad & e_{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, \\
e_{(0)} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{7.55}
$$

gde $e_{(\lambda)}$ označava matricu $\left(e^{\mu\nu}_{(\lambda)}\right)$.

Pri rotaciji oko z–ose dobijaju se sledeći zakoni transformacije:

$$
e'_{(\pm 2)} = e^{\pm 2i\theta}e_{(\pm 2)}\,, \qquad e'_{(\pm 1)} = e^{\pm i\theta}e_{(\pm 1)}\,, \qquad e'_{(0)} = e_{(0)}\,, \tag{7.56}
$$

gde su $e_{(\pm 2)}, e_{(\pm 1)}$ i $e_{(0)}$ stanja polarizacije masenog polja spina 2 sa projekcijama $s_3=\pm 2, \pm 1$ i 0,

$$
e_{(\pm 2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(1)} \pm ie_{(2)})\,, \qquad e_{(\pm 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{(3)} \pm ie_{(4)})\,.
$$

Uvedimo struje sa projekcijama spina $s_3=\pm 1$,

$$
T_{(\pm 1)} \equiv e^{\mu\nu}_{(\pm 1)}T_{\mu\nu} = \sqrt{2}(T_{13} \pm iT_{23})\,,
$$

čija je interakcija oblika

$$
\sum_{\lambda=\pm 1} T'_{(\lambda)}T^*_{(\lambda)} = 2\sqrt{2}(T'_{13}T_{13} + T'_{23}T_{23})\,.
$$

U slučaju očuvanih struja komponente T_{13} i T_{23} se mogu izraziti preko T_{10} i T_{20} ($k^0T_{0\nu} = -k^3T_{3\nu}$), pa prethodni izraz ne daje doprinos retardovanoj interakciji.

Na sličan način, za struje sa projekcijom spina $s_3=0$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
T_{(0)} \equiv& e^{\mu\nu}_{(0)}T_{\mu\nu} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\tfrac{1}{2}(T_{11}+T_{22}) - T_{13}\right]\,, \\
T'_{(0)}T^*_{(0)} =& \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{1}{4}(T'_{11}+T'_{22})(T_{11}+T_{22}) + T'_{13}T_{13}\right. \\
&\left. -\tfrac{1}{2}(T'_{11}+T'_{22})T_{13} - \tfrac{1}{2}T'_{13}(T_{11}+T_{22})\right]\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu samo prvi član u ovom izrazu odgovara retardovanoj interakciji,

$$\tfrac{1}{6}(T'_{11}+T'_{22})(T_{11}+T_{22})\,. \tag{7.57}$$

Izraz za polarizacionu sumu se dobija iz jednakosti

$$\sum_{\lambda} T'_{(\lambda)}T^{*}_{(\lambda)} = T'_{\mu\nu}\Big(\sum_{\lambda=0}^{4} e^{\mu\nu}_{(\lambda)}e^{\sigma\rho *}_{(\lambda)}\Big)T_{\sigma\rho} \equiv T'_{\mu\nu}P^{\mu\nu,\sigma\rho}T_{\sigma\rho}\,,$$

gde se leva strana izračunava iz jednačina (7.28) i (7.57), koje opisuju doprinose stanja $s_3=\pm 2$ i 0. Rezultat je

$$P^{\mu\nu,\sigma\rho} = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}+\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}) - \tfrac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}\,, & \text{za} \quad \mu,\nu,\sigma,\rho \neq 0,3\,; \\ 0, & \text{bar jedan indeks} = 0 \text{ ili } 3\,. \end{cases}$$

Ovo je rezultat u sistemu mirovanja. U slučaju proizvoljnog impulsa rezultat se dobija iz prvog reda na desnoj strani prethodnog izraza zamenom $\eta^{\mu\nu}\to P^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu,\sigma\rho} =& \tfrac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}+\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}) - \tfrac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho} \\ &+ k-\text{zavisni članovi}\,. \end{aligned} \tag{7.58}$$

Kako sa ove teorije preći na slučaj $\mu^2=0$? Jasno je da propagator masenog polja nije definisan u limesu $\mu^2\to 0$, jer tada langranžijan postaje gradijentno invarijantan. No, ako maseno polje interaguje sa očuvanom strujom, $k^\mu T_{\mu\nu}=0$ (što je potrebno da bi granični slučaj bezmasene teorije bio konzistentan), onda je amplituda interakcije dve struje oblika

$$M_{21} = T_2^{\mu\nu}D^E_{\mu\nu,\sigma\rho}(k,\mu^2)T_1^{\sigma\rho}\,,$$

gde je D^E efektivni propagator dobijen iz (7.53b) zanemarivanjem članova proporcionalnih sa k_μ:

$$D^E_{\mu\nu,\sigma\rho}(k,\mu^2) = \frac{1}{k^2-\mu^2}\big[\tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}+\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}) - \tfrac{1}{3}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\big]\,. \tag{7.59}$$

Ovaj propagator se razlikuje od efektivnog propagatora bezmasenog polja

$$D^E_{\mu\nu,\sigma\rho}(k) = \frac{1}{k^2}\big[\tfrac{1}{2}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}+\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}) - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}\big]$$

i pri $\mu^2=0$.

Odakle potiče *diskontinuitet* teorije po masi gravitona? Da bismo ovo razumeli, posmatraćemo šta se dogadja sa masivnim gravitonom pri $\mu^2\to 0$. Masivni graviton ima 5 stepeni slobode. Pri $\mu^2\to 0$ od njega se dobijaju bezmasene čestice heliciteta $\pm 2, \pm 1$ i 0. Dok se čestica heliciteta ± 1 dekupluje od očuvane struje, sa skalarnom česticom to nije slučaj. Zaista, doprinos skalarne čestice menja propagator bezmasenog gravitona upravo tako da se od njega dobije efektivni propagator masenog gravitona pri $\mu^2 = 0$, jer je

$$-\tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} + \tfrac{1}{6}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} = -\tfrac{1}{3}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} \,.$$

Jasno je da se eksperimentalne posledice bezmasene teorije i teorije sa proizvoljno malom masom gravitona *diskretno* razlikuju.

Odredimo sada konstantu interakcije masene teorije iz zahteva da se u statičkom nerelativističkom limesu dobije Njutnov zakon. Bezmasena teorija daje za energiju interakcije izraz

$$E = \lambda^2 T'_{00} \, \frac{1}{k^2} \Big(1 - \tfrac{1}{2}\Big) T_{00} \,.$$

Koristeći (7.53) dobija se analogan izraz za masenu teoriju:

$$E = \lambda^2(\mu) T'_{00} \, \frac{1}{k^2} \Big(1 - \tfrac{1}{3}\Big) T_{00} \,.$$

Ako je λ^2 odredjeno korektno ($\lambda^2 = 8\pi G$), onda mora biti

$$\lambda^2(\mu) = \tfrac{3}{4}\lambda^2 \,, \tag{7.60}$$

da bi i masena teorija imala dobar Njutnov limit. No, sa ovakvom vrednošću konstante $\lambda^2(\mu)$ druge eksperimentalne posledice teorije nisu korektne.

Pri računanju ovih posledica u bezmasenoj teoriji Sunce smo smatrali za statičan, tačkast izvor gravitacionog polja metrike $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda\varphi_{\mu\nu}$, gde je polje $\lambda\varphi_{\mu\nu}$ dato jednačinama (7.43). U masenoj teoriji polje $\lambda(\mu)\varphi_{\mu\nu}$ se može lako izračunati iz izraza (7.53):

$$\begin{aligned} \lambda(\mu)\varphi^{00} &= -\frac{2}{3}\frac{\lambda^2(\mu)}{4\pi}\frac{M}{r} \,, \\ \lambda(\mu)\varphi^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta}\frac{1}{3}\frac{\lambda^2(\mu)}{4\pi}\frac{M}{r} \,. \end{aligned} \tag{7.61}$$

Dok $\lambda(\mu)\varphi^{00}$ ima istu vrednost kao u bezmasenoj teoriji zbog relacije (7.60), dotle se $\lambda(\mu)\varphi^{\alpha\beta}$ razlikuje za faktor 1/2. Izračunavanje vrednosti precesije perihela putanje planete oko Sunca u masenoj teoriji daje 2/3 rezultata bezmasene teorije.

Za skretanje svetlosti i zakašnjenje radio signala razultat se može dobiti jednostavnije. Posmatrajmo interakciju elektromagnetnog polja sa Suncem.

Pošto je za elektromagnetno polje trag tenzora energije–impulsa nula, zadnji član u efektivnom propagatoru masivne teorije $D^E(k,\mu^2)$ ne daje doprinos amplitudi interakcije. Pošto isti zaključak važi i za zadnji član propagatora bezmasenog polja, to se amplitude interakcije razlikuju samo zbog razlike u konstantama interakcije, pa je njihov odnos jednak odnosu kvadrata odgovarajućih konstanti:

$$M_{21}(\mu^2)/M_{21} = \lambda^2(\mu)/\lambda^2 = \tfrac{3}{4}\,.$$

Zato masivan graviton uzrokuje skretanje svetlosti pri kretanju pored Sunca i zakašnjenje radio signala koji su za faktor 3/4 različiti od rezultata bezmasene teorije.

Ovi rezultati pokazuju da postojanje proizvoljno male, ali konačne mase gravitona spina 2 nije u skladu sa opservacionim činjenicama.

2.4 Problem konzistentnosti teorije

Prethodna razmatranja pokazuju da se graviton najuspešnije opisuje kao bezmasena čestica spina 2. Razmatrajući različite alternative mi smo propustili da proverimo konzistentnost ove teorije.

Teorija gravitacije spina 2 i mase nula zasnovana je na lagranžijanu (7.41) koji sadrži interakcioni član $\mathcal{L}_I = -\lambda\varphi_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, gde je $T^{\mu\nu}$ (dinamički) tenzor energije–impulsa *materije*. Odmah se može postaviti sledeće pitanje: zašto graviton interaguje samo sa tenzorom energije–impulsa materije, a ne i sa *sopstvenim* tenzorom energije–impulsa? Pokazaće se da je sugestija sadržana u ovom pitanju ne samo moguća već i nužna u konzistentnoj teoriji.

Posmatrajmo jednačinu kretanja za $\varphi^{\mu\nu}$ u obliku $K_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi^{\sigma\rho} = \lambda T_{\mu\nu}$. Operator $K_{\mu\nu,\sigma\rho}$ je singularan zbog gradijentne simetrije teorije, pa diferenciranje ove jednačine daje uslov konzistentnosti

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0\,, \tag{7.62}$$

koji implicira pravolinijsko kretanje čestice materije (na osnovu zakona održanja impulsa materije). Jasno je da ovaj uslov nije ispunjen za *interagujući* sistem materije i gravitacionog polja. Zaista, iz izraza (7.31c) za $T_{\mu\nu}$ sledi

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = M\int \frac{d^2z^\nu}{ds^2}\delta(x-z(s))ds\,.$$

Posle toga, korišćenjem jednačine kretanja za materiju,

$$\frac{d^2z^\nu}{ds^2} = -\tfrac{1}{2}g^{\nu\sigma}(g_{\sigma\lambda,\rho}+g_{\sigma\rho,\lambda}-g_{\lambda\rho,\sigma})\frac{dz^\lambda}{ds}\frac{dz^\rho}{ds}\,,$$

gde je $g_{\mu\nu} = \eta_{m\nu} + 2\lambda\varphi_{\mu\nu}$, dobija se

$$\begin{aligned} &(\eta_{\nu\sigma} + 2\lambda\varphi_{\nu\sigma})\partial_\mu T^{\mu\nu} = -[\lambda\rho, \sigma]T^{\lambda\rho}\,, \\ &[\lambda\rho, \sigma] \equiv \lambda(\varphi_{\sigma\lambda,\rho} + \varphi_{\sigma\rho,\lambda} - \varphi_{\lambda\rho,\sigma})\,. \end{aligned} \tag{7.63}$$

Narušenje uslova (7.62) je reda λ.

U daljem izlaganju mi ćemo pokušati da ispravimo ovu nekonzistentnost tražeći da na desnoj strani jednačine kretanja figuriše tenzor energije–impulsa za ceo sistem *materija + gravitaciono polje*. Uslov konzistentnosti će tada biti zadovoljen, jer za ceo sistem važi zakon održanja impulsa.

ZADACI

1. Pokazati da trodimenzioni propagator statičke teorije skalarnog polja ima oblik

$$D(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\,.$$

2. Pokazati da veličine $P_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/\mu^2$ i $P^\perp_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu/\mu^2$ predstavljaju projektore na masena stanja spina 1 i 0, redom, tj. da pri $k^2 = \mu^2$ važi:

$$\begin{aligned} &P_{\mu\sigma}P^{\sigma\nu} = P_\mu{}^\nu\,, && P^\perp_{\mu\sigma}P^{\perp\sigma\nu} = P^{\perp\nu}_\mu\,, \\ &P_{\mu\nu} + P^\perp_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\,, && P^\perp_{\mu\sigma}P^{\sigma\nu} = 0\,, \\ &\eta^{\mu\nu}P_{\mu\nu} = 3\,, && \eta^{\mu\nu}P^\perp_{\mu\nu} = 1\,. \end{aligned}$$

3. Veličine $\Pi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - (k_\mu\bar{k}_\nu + k_\nu\bar{k}_\mu)/k\cdot\bar{k}$ i $\Pi^\perp_{\mu\nu} = (k_\mu\bar{k}_\nu + k_\nu\bar{k}_\mu)/k\cdot\bar{k}$, gde je $\bar{k} = (k^0, -\boldsymbol{k})$, predstavljaju projektore na bezmasena stanja heliciteta ±1 i 0, redom. Dokazati sledeće relacije uz uslov $k^2 = 0$:

$$\begin{aligned} &\Pi_{\mu\sigma}\Pi^{\sigma\nu} = \Pi^\nu_\mu\,, && \Pi^\perp_{\mu\sigma}\Pi^{\perp\sigma\nu} = \Pi^{\perp\nu}_\mu\,, \\ &\Pi_{\mu\nu} + \Pi^\perp_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\,, && \Pi^\perp_{\mu\sigma}\Pi^{\sigma\nu} = 0\,, \\ &\eta^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu} = 2\,, && \eta^{\mu\nu}\Pi^\perp_{\mu\nu} = 2\,. \end{aligned}$$

4. Naći propagator $D'_{\mu\nu}(k)$ za lagranžijan $\mathcal{L}'_V$ bezmasenog vektorskog polja sa dodatnim članom $-\alpha(\partial\cdot\varphi)^2/2$.
5. Lagranžijan

$$\mathcal{L}''_V = \mathcal{L}_V + \frac{1}{2}\mu^2\varphi_\nu\varphi^\nu - \frac{\alpha}{2}(\partial\cdot\varphi)^2 - \varphi_\mu J^\mu$$

gde je $\partial\cdot J = 0$, je pogodan za razmatranje limita $\mu^2 \to 0$.
a) Pokazati da $\partial\cdot\varphi$ zadovoljava Klajn–Gordonovu jednačinu sa masom $m^2 = \mu^2/\alpha$.
b) Naći odgovarajući propagator $D''_{\mu\nu}(k)$ i ispitati njegovo ponašanje pri:
1^0 $\alpha \neq 0,\ \mu^2 \to 0$; 2^0 $\mu^2 \neq 0,\ \alpha \to 0$.

6. Dokazati da se pri $\mu^2 \to 0$ stanje polarizacije masivnog vektorskog polja sa projekcijom spina $s_3 = 0$ dekupluje od očuvane struje J^μ.
7. Dato je bezmaseno polje $\varphi_{\mu\nu}$ heliciteta 2.
   a) Naći gradijentnu transformaciju koja osigurava da polje $\varphi_{\mu\nu}$ zadovoljava Hilbertov uslov.
   b) Pokazati da se lagranžijan polja $\varphi_{\mu\nu}$ pri gradijentnim transformacijama menja za četvorodivergenciju.
8. Naći propagator za lagranžijan $\mathcal{L}'_T$ bezmasenog tenzorskog polja sa dodatnim članom $-\alpha(\partial_\mu \bar{\varphi}^{\mu\nu})^2/2$. Posmatrati posebno slučajeve $\alpha = 1$ i $\alpha \to \infty$.
9. Pokazati da projektor na bezmasena stanja heliciteta ± 2,

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\rho} = \tfrac{1}{2}(\Pi_{\mu\lambda}\Pi_{\nu\rho} + \Pi_{\mu\rho}\Pi_{\nu\lambda}) - \tfrac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}\Pi_{\lambda\rho}\,,$$

   zadovoljava sledeće uslove pri $k^2 = 0$:

$$\Pi_{\mu\nu,\lambda\rho}\Pi^{\lambda\rho,\sigma\tau} = \Pi_{\mu\nu}{}^{,\sigma\tau}\,, \qquad \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}\Pi_{\mu\nu,\lambda\rho} = 2\,,$$
$$\eta^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu,\lambda\rho} = 0\,.$$

10. Naći jednačinu trajektorije $u = u(\phi), u \equiv 1/r$, za kretanje probne čestice u sfernosimetričnom skalarnom polju gravitacije. Kako izgleda trajektorija u limesu $G \to 0$?
11. Na osnovu rezultata prethodnog zadatka izračunati vekovno pomeranje perihela putanje planete oko Sunca u skalarnoj teoriji gravitacije.
12. Koristeći jednačine kretanja probne čestice naći konstante kretanja u sfernosimetričnom gravitacionom polju u slučaju
   a) skalarne teorije,
   b) tenzorske teorije.
13. Naći jednačinu trajektorije $u = u(\phi), u \equiv 1/r$, za kretanje probne čestice u sfernosimetričnom tenzorskom polju gravitacije.
14. Na osnovu rezultata prethodnog zadatka izračunati:
   a) promenu ugla $\Delta\phi$ pri kretanju svetlosti od $r = R$ $(\phi < 0)$ do $r = R$ $(\phi > 0)$ (sl. 7.2);
   b) koordinatno vreme Δt koje protekne dok svetlost predje put od $r = b$ do $r = R$.
15. *a*) Izračunati energiju interakcije probne čestice mase m sa statičkim, tenzorskim gravitacionim poljem tačkastog izvora.
   b) Pokazati da je energija interakcije svetlosti sa ovim poljem data izrazom

$$E(x^0) = -2G\frac{M}{r}p^0\,,$$

   koji je dva puta veći od Njutnovog izraza (dobijenog zamenom: masa probne čestice $\to$ ukupna energija svetlosti).
16. Svetlosni zrak prolazi pored Sunca na rastojanju b (sl. 7.2). Izračunati:
   a) transverzalnu komponentu impulsa koji zrak dobije interagujući sa Suncem po zakonu iz zadatka 15;
   b) ugao skretanja svetlosti kao odnos transverzalne i longitudinalne komponente impulsa.

17. Pokazati da projektor na stanja spina 2 i mase μ,

$$P_{\mu\nu,\lambda\rho} = \frac{1}{2}(P_{\mu\lambda}P_{\nu\rho} + P_{\mu\rho}P_{\nu\lambda}) - \frac{1}{3}P_{\mu\nu}P_{\lambda\rho}$$

zadovoljava sledeće uslove pri $k^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned} &P_{\mu\nu,\lambda\rho}P^{\lambda\rho,\lambda\tau} = P_{\mu\nu}{}^{,\lambda\tau}\,, \qquad \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}P_{\mu\nu,\lambda\rho} = 5\,, \\ &\eta^{\mu\nu}P_{\mu\nu,\lambda\rho} = 0\,. \end{aligned}$$

18. Izračunati doprinos skalarne komponente masivnog gravitona efektivnom propagatoru u limesu $\mu^2 \to 0$.
19. Pokazati da precesija perihela planete u masenoj tenzorskoj teoriji gravitacije pri $\mu^2 \to 0$ iznosi $2/3$ rezultata bezmasene tenzorske teorije.
20. Dinamika tačkaste čestice u tenzorskom gravitacionom polju opisana je interakcijom oblika $-\lambda\varphi_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, gde je $T^{\mu\nu}$ TEI čestice. Pokazati, izračunavanjem izraza $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ uz pomoć jednačina kretanja, da je ova teorija nekonzistentna.

GLAVA VIII

NELINEARNI EFEKTI U GRAVITACIJI

U ravnom prostor–vremenu graviton se, kao što smo videli, najbolje opisuje teorijom bezmasenog polja heliciteta 2, ali ova teorija nije konzistentna. Bliža razmatranja ukazuju da se nekonzistentnost može otkloniti ako se u razmatranje uvede i TEI samog gravitacionog polja, što daje *nelinearne efekte*: TEI materije je izvor gravitacionog polja, a energija–impuls ovog polja postaje izvor novog polja, itd. Može li ova nelinearnost da objasni malo neslaganje u predvidjanju precesije perihela Merkura? Odgovor je, kao što ćemo videti, potvrdan, što daje poseban značaj postupku konstrukcije konzistentne teorije gravitacije.

Da bismo što jednostavnije izložili suštinu metoda razrešenja pomenutog problema, zadržaćemo se, najpre, na analognoj situaciji u Jang–Milsovoj teoriji. Zatim ćemo preći na gravitaciono polje — najpre skalarno, a zatim tenzorsko (Feynman, 1962–63; Van Dam, 1974; Okubo, 1978). Posebna pažnja biće posvećena pojednostavljenju metoda primenom formalizma prvog reda (Deser, 1970).

1. NELINEARNI EFEKTI U JANG–MILSOVOJ TEORIJI

Nelinearni efekti, koji se javljaju pri izgradnji konzistentne Jang–Milsove teorije, veoma su slični onome što se dogadja u teoriji gravitacije. Zato ćemo ovaj slučaj izložiti sa dosta detalja, analizirajući posebno uticaj nelinearnih efekata na lagranžijan Jang–Milsovog polja, a posebno na lagranžijan materije i interakcije (Okubo, 1978).

1.1 Nelinearna Jang–Milsova teorija

Posmatrajmo triplet četvorovektora $A^a{}_\mu$ $(a = 1, 2, 3)$ čiji je slobodan lagranžijan

$$\mathcal{L}_F^{(0)} = -\tfrac{1}{4}\overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu}\overset{\circ}{F}{}^{a\mu\nu}\,, \qquad \overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu\,, \tag{8.1}$$

invarijantan u odnosu na *lokalne* Abelove transformacije $\delta A^a{}_\mu = \partial_\mu \lambda^a$. Ukupan lagranžijan polja A^a u interakciji sa materijom dat je izrazom

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}_F^{(0)} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I\,, \tag{8.2}$$

gde je $\mathcal{L}_I = -gA^a \cdot J^a$, a J^a je kanonska (Neterina) struja materije koja potiče od *globalne* $SU(2)$ simetrije lagranžijana $\mathcal{L}_{MI} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I$.

U slučaju kad je materija opisana $SU(2)$ dubletom Dirakovih polja Ψ,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_M = \bar\Psi(i\gamma\cdot\partial - m)\Psi\,, \\ &\mathcal{L}_I = -gA^a{}_\mu\big(\bar\Psi\gamma^\mu \tfrac{1}{2}\tau^a\Psi\big) \equiv -gA^a\cdot J^a\,, \end{aligned} \tag{8.3}$$

(τ^a su Paulijeve spinske matrice), globalne $SU(2)$ transformacije su date izrazima

$$\begin{aligned} &\delta A^a{}_\mu = -\epsilon^{abc}\theta^b A^c{}_\mu\,, \\ &\delta\Psi = i\theta^a \tfrac{1}{2}\tau^a\Psi\,, \qquad \delta\bar\Psi = -i\theta^a\bar\Psi\tfrac{1}{2}\tau^a\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Jednačine kretanja polja A^a imaju oblik

$$\partial^\mu \overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu} = gJ^a_\nu\,, \tag{8.5}$$

a njihova konzistentnost zahteva $\partial\cdot J^a = 0$. Ovaj uslov, medjutim, nije ispunjen, jer protivreči jednačinama kretanja materije. Zaista, koristeći jednačine kretanja Dirakovog polja lako se dobija

$$\partial\cdot J^a = g\epsilon^{abc}A^{b\nu}J^c_\nu \neq 0.$$

Nekonzistentnost je reda g.

Razlog ove nekonzistentnosti nalazi se u činjenici da struja J^a nije kompletna kanonska struja cele teorije, već samo deo koji potiče od materije, pa zato i ne može biti očuvana. Priroda uočene nekonzistentnosti sugeriše i način razrešenja problema. Pokušaćemo da konstruišemo novu teoriju koja zadovoljava sledeća dva zahteva:

— lagranžijan nove teorije je oblika

$$(a) \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \Lambda\,,$$

i daje jednačine kretanja

$$(b) \qquad \partial^\mu \overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu} = g\big(J^a_\nu + j^a_\nu\big) \equiv g\mathcal{J}^a_\nu\,;$$

— dinamička struja $\mathcal{J}^a$ je jednaka kanonskoj struji koja potiče od postojanja globalne simetrije lagranžijana $\mathcal{L}$.

Ovakva teorija ne bi imala problema sa konzistentnošću, jer je kanonska struja automatski očuvana. Pre no što predjemo na rešavanje postavljenog zadatka, napomenućemo da struja $\mathcal{J}^a$ nije jednoznačno definisana: zakon očuvanja se ne menja ako izvršimo zamenu $\mathcal{J}^a_\nu \to \mathcal{J}^a_\nu + \partial^\mu W^a_{\mu\nu}$, gde je $W^a_{\mu\nu} = -W^a_{\nu\mu}$. Zato je dovoljno da umesto uslova (b) imamo

$$(b') \qquad \partial^\mu \overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu} = g\big(\mathcal{J}^a_\nu + \partial^\mu W^a_{\mu\nu}\big)\,.$$

Lagranžijan nove teorije ćemo naći iteracijom po stepenima od g, polazeći od $\mathcal{L}^{(0)}$:

$$(a') \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + g\Lambda^{(1)} + g^2\Lambda^{(2)} + \ldots$$

Prvi korak. Ograničavajući se na slučaj kad je materija opisana Dirakovim poljem, nadjimo, najpre, kanonsku struju koja odgovara globalnoj $SU(2)$ simetriji lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}$. Ako se iskoriste jednačine kretanja, promena lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}$ u odnosu na transformacije (8.4) postaje

$$\delta\mathcal{L}^{(0)} = \partial_\mu\bigg(\delta A^a_\nu \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial\partial_\mu A^a_\nu} + \delta\bar\Psi \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial\partial_\mu\bar\Psi} + \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial\partial_\mu\Psi}\delta\Psi\bigg) = -\theta^b \partial\cdot\mathcal{J}^b_{(0)}\,,$$

gde kanonska struja

$$\mathcal{J}^b_{(0)} = J^b + j^b_{(0)} \tag{8.6}$$

sadrži dva člana: J^b predstavlja doprinos materije, dok izraz $j^b_{(0)}$ predstavlja struju samih polja A^a i potiče od slobodnog lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}_F$:

$$j^{b\mu}_{(0)} = \epsilon^{abc} A^c{}_\nu \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}_F}{\partial\partial_\mu A^a{}_\nu} = \epsilon^{bca} A^c{}_\nu \overset{\circ}{F}{}^{a\nu\mu}\,.$$

Struja $j^b_{(0)}$ je ono što nedostaje desnoj strani jednačine (8.5).

Prethodna analiza polazi od globalne $SU(2)$ simetrije lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}$. Napomenimo da $\mathcal{L}^{(0)}$ nije invarijantan u odnosu na lokalne Abelove transformacije $\delta A^a_\mu = \partial_\mu\lambda^a$, jer uslov $\partial\cdot J^a = 0$ protivreči jednačinama kretanja materije. U toku procesa otklanjanja nekonzistentnosti doći ćemo do lokalne $SU(2)$ simetrije teorije.

Pokušajmo sada, u skladu sa zahtevima (a) i (b), da izmenimo lagranžijan $\mathcal{L}^{(0)}$ tako da se dobiju jednačine kretanja

$$\partial_\mu \overset{\circ}{F}{}^{a\mu\nu} = g\big(\mathcal{J}^{a\nu}_{(0)} + \partial_\mu W^{a\mu\nu}\big)\,. \tag{8.7a}$$

Prisustvo struje $j^a_{(0)}$ polja A^a na desnoj strani ove jednačine može se ostvariti ako se lagranžijanu $\mathcal{L}^{(0)}$ doda član reda g:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} &= \mathcal{L}^{(0)} + g\Lambda^{(1)}\,,\\ \Lambda^{(1)} &= -c_1 A^b\cdot j^b_{(0)} = c_1 A^b{}_\nu\big(\epsilon^{bca}A^c{}_\lambda \overset{\circ}{F}{}^{a\nu\lambda}\big)\,.\end{aligned} \tag{8.7b}$$

Variranje $\mathcal{L}^{(1)}$ po A^a i poredjenje sa (8.7a) daje $c_1 = 1/2$, $W^a_{\lambda\nu} = \epsilon^{abc}A^b{}_\lambda A^c{}_\nu$. Izmenom lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}$, u cilju dobijanja jednačine kretanja u obliku (8.7a), problem nije rešen: struja $\mathcal{J}^a_{(0)}$ nije više očuvana, jer ona nije kanonska struja novog lagranžijana $\mathcal{L}^{(1)}$!

Drugi korak. Nova očuvana struja se lako izračunava iz lagranžijana $\mathcal{L}^{(1)}$:

$$\mathcal{J}^{b\mu}_{(1)} = \epsilon^{abc}A^{c\nu}\frac{\partial\mathcal{L}^{(1)}}{\partial\partial_\mu A^a{}_\nu} = \mathcal{J}^{b\mu}_{(0)} + g\epsilon^{abc}A^c{}_\nu\big(\epsilon^{efa}A^{f\nu}A^{e\mu}\big)\,. \tag{8.8}$$

Da bi se na desnoj strani jednačine (8.7a) pojavila struja $\mathcal{J}^b_{(1)}$, ponovo ćemo izmeniti lagranžijan dodajući član reda g^2,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{L}^{(0)} + g\Lambda^{(1)} + g^2\Lambda^{(2)},\\ \Lambda^{(2)} &= -c_2\big[\epsilon^{abc}A^c{}_\nu\big(\epsilon^{efa}A^{f\nu}A^{e\mu}\big)\big]A^b{}_\mu\,,\end{aligned} \tag{8.9a}$$

posle čega jednačina kretanja postaje

$$\partial_\mu \overset{\circ}{F}{}^{a\mu\nu} = g\big(\mathcal{J}^{a\nu}_{(1)} + \partial_\mu W^{a\mu\nu}\big)\,, \tag{8.9b}$$

ako je $c_2 = 1/4$, a $W^{a\mu\nu}$ je isto kao u prvom koraku.

Naoružani prethodnim iskustvom, mi smo već spremni da se suočimo sa problemom da struja $\mathcal{J}^a_{(1)}$ nije očuvana, jer ne predstavlja kanonsku struju lagranžijana $\mathcal{L}^{(2)}$ iz koga je izvedena jednačina kretanja (8.9b). Medjutim, član $\Lambda^{(2)}$ u lagranžijanu $\mathcal{L}^{(2)}$ ne doprinosi kanonskoj struji, jer *ne zavisi od izvoda polja* ∂A^a, pa stoga važi $\mathcal{J}^a_{(2)} = \mathcal{J}^a_{(1)}$.

Tako se u ovom primeru iteraciona procedura završava na drugom koraku, ispunjenjem uslova (a) i (b). Konzistentna teorija je definisana lagranžijanom $\mathcal{L}^{(2)}$, koji daje jednačine kretanja (8.9b) za polje A^a. U toku izgradnje teorije pojavii su se nelinearni efekti, jer izvor polja A^a potiče delom od samih pōljā A^a.

Simetrija. Polazni lagranžijan $\mathcal{L}^{(0)}$ ima globalnu $SU(2)$ simetriju, dok $\mathcal{L}^{(0)}_F$ ima lokalnu Abelovu simetriju $\delta A^a{}_\mu = \partial_\mu\lambda^a$. Kakva je simetrija konačnog lagranžijana $\mathcal{L}^{(2)}$? Ako uvedemo veličinu

$$F^a{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu} - g\epsilon^{abc}A^b{}_\mu A^c{}_\nu\,,$$

lako se proverava da je

$$\mathcal{L}_F^{(0)} + g\Lambda^{(1)} + g^2\Lambda^{(2)} = -\tfrac{1}{4}F^a{}_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_F\,. \tag{8.10a}$$

Tako, neočekivano, otkrivamo lokalnu $SU(2)$ simetriju konačne teorije.

U procesu izgradnje konzistentne teorije polazna globalna $SU(2)$ simetrija i nepotpuna lokalna Abelova simetrija stapaju se u lokalnu $SU(2)$ simetriju.

U svetlu ovog rezultata korisno je ponovo razmotriti oblik očuvane struje i jednačina kretanja. Iz (8.8) i (8.6) se dobija

$$\mathcal{J}^{b\mu}_{(1)} = J^{b\mu} + \epsilon^{bca}A^c{}_\nu F^{a\nu\mu}\,,$$

gde drugi član predstavlja dinamičku struju koja potiče od polja A^a:

$$-\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial A^b{}_\mu} = \epsilon^{bca}A^c{}_\nu F^{a\nu\mu} = j^{b\mu}\,.$$

S druge strane, ako uočimo relaciju $\overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu} - gW^a_{\mu\nu} = F^a{}_{\mu\nu}$ jednačina kretanja (8.9b) se može napisati u obliku $\partial_\mu F^{a\mu\nu} = g\mathcal{J}^{a\nu}_{(1)}$, ili kao

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = gJ^{a\nu}\,, \tag{8.10b}$$

gde je uveden kovarijantni izvod: $D_\mu F^{a\mu\nu} = \partial_\mu F^{a\mu\nu} - g\epsilon^{abc}A^b{}_\mu F^{c\mu\nu}$. Posle korišćenja jednačina kretanja, zakon održanja struje $\mathcal{J}^b_{(1)}$ dobija oblik

$$D_\mu J^{a\mu} = 0\,, \tag{8.10c}$$

što je u isto vreme i uslov konzistentnosti jednačine kretanja za A^a. Lagranžijan $\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I$ predstavlja lokalnu $SU(2)$ teoriju u kovarijantnoj formi (dodatak A). Prethodna razmatranja se direktno mogu uopštiti na slučaj proizvoljne poluproste Lijeve grupe.

Pretpostavka da je materija opisana Dirakovim poljem nije od suštinskog značaja za prethodnu analizu. Ona ima za posledicu da interakcija $\mathcal{L}_I$, koja ne zavisi od izvoda polja, ne daje doprinos kanonskoj struji $\mathcal{J}^b$, zbog čega se *oblik interakcije ne menja* u toku postupka dobijanja konzistentne teorije. Jasno je da ovaj rezultat važi za svako polje materije čija interakcija sa A^a ne sadrži izvode polja. Celokupna promena teorije vezana je, u takvom slučaju, za sektor slobodnog lagranžijana gradijentnih polja, čija simetrija prelazi put od lokalne Abelove do lokalne $SU(2)$ simetrije. Lagranžijan $\mathcal{L}_{MI}$ se ne menja u toku izgradnje konačne teorije: njegova je simetrija, ustvari, od samog početka lokalna $SU(2)$, što se jasno vidi iz kovarijantnog zapisa:

$$\mathcal{L}_{MI} = \Psi(i\gamma\cdot D - m)\Psi \equiv \mathcal{L}_M\,(\partial \to D)\ .$$

Šta se dogadja kad interakcija zavisi od izvoda polja biće predmet naredne analize.

1.2 Skalarna elektrodinamika

Sistem elektromagnetnog i kompleksnog skalarnog polja mase m opisan je lagranžijanom

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} &= \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I^{(0)} \\ &= -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi - eA^\mu J_\mu^{(0)}\,,\end{aligned} \tag{8.11}$$

gde je

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,, \qquad J_\mu^{(0)} = i\big[\Phi^*(\partial_\mu\Phi) - (\partial_\mu\Phi^*)\Phi\big]\,.$$

Ukupni lagranžijan $\mathcal{L}^{(0)}$ poseduje globalnu $U(1)$ simetriju, a elektromagnetni deo $\mathcal{L}_{EM}$ je invarijantan u odnosu na $\delta A_\mu = \partial_\mu\lambda$. Jednačine kretanja imaju oblik

$$\begin{aligned}&\partial_\mu F^{\mu\nu} = eJ^\nu_{(0)}\,,\\ &(-\Box - m^2)\Phi = ie\big[\partial_\mu(A^\mu\Phi) + A^\mu\partial_\mu\Phi\big]\,.\end{aligned}$$

Konzistentnost prve jednačine zahteva da struja bude očuvana. No, pošto $J^\nu_{(0)}$ nije kompletna kanonska struja, ovaj uslov ne može biti ispunjen. Zaista, iz jednačine kretanja materije sledi $\partial_\mu J^\mu_{(0)} = 2e\partial_\mu(A^\mu\Phi^*\Phi) \neq 0$. Kompletna kanonska struja, koju definiše globalna $U(1)$ simetrija lagražijana $\mathcal{L}^{(0)}$, data je izrazom

$$\mathcal{J}^\mu_{(0)} = J^\mu_{(0)} - 2eA^\mu\Phi^*\Phi\,,$$

gde drugi član potiče od interakcije $\mathcal{L}_I^{(0)}$.

Izmenom lagranžijana

$$\mathcal{L}^{(0)} \to \mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + e^2A_\mu A^\mu\Phi^*\Phi\,, \tag{8.12a}$$

jednačine kretanja postaju

$$\begin{aligned}&\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\big(J^\nu_{(0)} - 2eA^\nu\Phi^*\Phi\big) \equiv e\mathcal{J}^\nu_{(0)}\,,\\ &(-\Box - m^2)\Phi = ie\big[\partial_\mu(A^\mu\Phi) + A^\mu\partial_\mu\Phi\big] - e^2A_\mu A^\mu\Phi\,.\end{aligned}$$

Pošto dodatni član $e^2A^2\Phi^*\Phi$ ne sadrži izvode polja, kanonska struja nove teorije je ista kao $\mathcal{J}^{\nu}_{(0)}$, pa je postupak izgradnje konzistentne teorije završen.

Simetrija dobijene teorije se najlakše uočava ako se lagranžijan (8.12a) izrazi u obliku

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi \,. \tag{8.12b}$$

Globalna $U(1)$ simetrija polazne teorije i *lokalna* Abelova simetrija elektromagnetnog lagranžijana stapaju se u *lokalnu* $U(1)$ *simetriju.*

Ovaj primer ilustruje situaciju koja nastaje kad polazna interakcija zavisi od izvoda polja: tada lagranžijan $\mathcal{L}_I^{(0)}$ daje doprinos kanonskoj struji, pa se u procesu nalaženja konzistentne teorije *menja oblik interakcije.* U razmatranom slučaju polazna globalna simetrija teorije je Abelova, pa zato kanonska struja ne sadrži doprinos samih polja A_μ.

U opštem slučaju kanonska struja dobija doprinos i od interakcije i od lagranžijana slobodnih gradijentnih polja. Razmatranja postaju znatno jednostavnija ako pretpostavimo da interakcija ne sadrži izvode gradijentnog polja, kao što je slučaj u tenzorskoj teoriji gravitacije.

2. SKALARNA TEORIJA GRAVITACIJE

U slučaju teorije sa unutrašnjom grupom simetrije, iteraciona procedura se, kao što smo videli, završava posle dva koraka. To neće biti slučaj sa teorijom gravitacije, gde je iteracioni postupak beskonačan. Da bismo pokazali kako se takav problem rešava, razmotrićemo, najpre, jednostavniji slučaj skalarne teorije gravitacije, ne pretpostavljajući da je masa gravitona nula (Okubo, 1978).

Polazni lagranžijan je oblika

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}_S^{(0)} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I = \tfrac{1}{2}\big(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \mu^2\varphi^2\big) + \mathcal{L}_M - \lambda\varphi T \,, \tag{8.13a}$$

gde je $\mathcal{L}_M$ lagranžijan materije, a T trag odgovarajućeg TEI. Jednačina kretanja za φ je

$$-\big(\Box + \mu^2\big)\varphi = \lambda T \,. \tag{8.13b}$$

Pošto nema nikakvih ograničenja na osobine interakcije, čak ni kada je graviton bezmasen (nema gradijentne simetrije), teorija je konzistentna i bez ikakvih dodatnih intervencija. Imajući na umu slučaj tenzorske teorije gravitacije, kao i fizički razumljiv zahtev da skalarni graviton treba da interaguje i sa sopstvenim TEI, pokušaćemo da izgradimo teoriju skalarne gravitacije na bazi sledeća dva zahteva:

— lagranžijan nove teorije $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \Lambda$ treba da dā jednačine kretanja

$$(\alpha) \qquad -\big(\Box + \mu^2\big)\varphi = \lambda(T + t) \equiv \lambda\theta \,;$$

— Veličina θ je trag ukupnog TEI (materija + gravitacija) koji je očuvan zbog postojanja globalne translacione invarijantnosti lagranžijana, $\partial_\mu \theta^\mu{}_\nu = 0$.

Kanonski TEI ${}^c\theta^\mu{}_\nu = (\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu\varphi)\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}$ je očuvana veličina, ali nije jednoznačno definisan. On se može izmeniti dodavanjem dela čija je divergencija nula, tako da se zakon očuvanja ne menja:

$$\begin{aligned} \theta^\mu{}_\nu &= {}^c\theta^\mu\nu + \partial_\rho W^{\mu\rho}{}_\nu \,, \\ W^{\mu\rho}{}_\nu &= -W^{\rho\mu}{}_\nu = (\delta^\mu_\nu\partial^\rho - \delta^\rho_\nu\partial^\mu)W(\varphi) \,, \end{aligned} \tag{8.14}$$

gde je $W(\varphi)$ proizvoljna funkcija. Trag veličine (8.14),

$$\theta = {}^c\theta + 3\Box W(\varphi) \,, \tag{β}$$

je ono što treba da stoji na desnoj strani jednačine (α).

Pokušajmo da novu teoriju nadjemo iteracijom po stepenima od λ, polazeći od lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}$.

Prvi korak. Trag kanonskog TEI, koji odgovara početnom lagranžijanu $\mathcal{L}^{(0)}$, ima oblik

$${}^c\theta_{(0)} = T + \left(-\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + 2\mu^2\varphi^2\right) . \tag{8.15a}$$

Drugi član u ovom izrazu predstavlja doprinos slobodnog lagranžijana skalarnog gravitacionog polja. Pokušajmo da nadjemo lagranžijan koji će dati jednačinu kretanja

$$-(\Box + \mu^2)\varphi = \lambda\big[T + \left(-\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + 2\mu^2\varphi^2\right) + 3\Box W(\varphi)\big] . \tag{8.15b}$$

Novi lagranžijan je oblika

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} + \lambda\Lambda^{(1)} \,,$$

gde $\Lambda^{(1)}$ zadovoljava uslov $-\delta\Lambda^{(1)}/\delta\varphi = -\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + 2\mu^2\varphi^2 + 3\Box W^{(1)}(\varphi)$. Ovaj uslov se može ostvariti izborom

$$\Lambda^{(1)} = \varphi\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \tfrac{2}{3}\mu^2\varphi^3 \,,$$

pri čemu je $W^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2$. Posle toga lagranžijan $\mathcal{L}^{(1)}$ postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= \mathcal{L}^{(1)}_S + \mathcal{L}_M - \lambda\varphi T \,, \\ \mathcal{L}^{(1)}_S &= \tfrac{1}{2}(1 + 2\lambda\varphi)\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \tfrac{1}{2}\mu^2\left(\varphi^2 + \tfrac{4}{3}\lambda\varphi^3\right) . \end{aligned} \tag{8.16}$$

Izmenom lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}$, u cilju dobijanja jednačine kretanja (8.15b), problem nije rešen: tenzor $\theta^{\mu\nu}_{(0)}$, čiji trag figuriše u (8.15b), nije očuvan, jer odgovara lagranžijanu $\mathcal{L}^{(0)}$ a ne $\mathcal{L}^{(1)}$.

Tačno rešenje. Posle nalaženja tenzora $\theta^{\mu\nu}_{(1)}$, nova jednačina kretanja $-(\Box+\mu^2)\varphi=\lambda\theta_{(1)}$ bi se mogla dobiti iz lagranžijana $\mathcal{L}^{(2)}$, itd. Iteraciona procedura bi se nastavila uvodjenjem sve većih stepena od λ. Jasno je da bi se pritom menjao samo $\mathcal{L}_S$ — gravitacioni deo lagranžijana. Pošto se direktnim izračunavanjem članova sve većeg stepena po λ ne može daleko stići, potrebno je pronaći neki efikasniji metod.

Jednostavan metod nalaženja konačnog odgovora je korišćenje pretpostavke da gravitacioni lagranžijan ima opšti oblik

$$\mathcal{L}_S=\tfrac{1}{2}F(\varphi)\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-G(\varphi)\,, \tag{8.17}$$

koji je motivisan početnim rezultatom iteracione procedure. Funkcije $F(\varphi)$ i $G(\varphi)$ nećemo tražiti iterativno, već direktno iz jednačina koje su definisane prirodom postavljenog zadatka.

Variranjem izraza (8.17) po φ dobija se jednačina kretanja

$$-F\Box\varphi-\tfrac{1}{2}F'\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-G'=\lambda T\,, \tag{8.18}$$

gde prim označava izvod po φ. S druge strane, iz opštih zahteva sledi da jednačina kretanja treba da ima oblik (α). Ako nadjemo trag TEI,

$$\theta=T+\bigl(-F+3W''\bigr)\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi+3\Box\varphi\,W'+4G\,,$$

onda opšta jednačina (α) postaje

$$-\bigl(1+3\lambda W'\bigr)\Box\varphi-\lambda\bigl(-F+3W''\bigr)\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi-\bigl(\mu^2\varphi^2+4\lambda G\bigr)=\lambda T\,. \tag{8.19}$$

Jednačina kretanja (8.18a) će imati ovaj oblik ako su zadovoljeni uslovi

$$\begin{aligned} F(\varphi)&=1+3\lambda W'(\varphi)\,,\\ F'(\varphi)&=2\lambda\bigl[-F(\varphi)+3W''(\varphi)\bigr]\,,\\ G'(\varphi)&=\mu^2\varphi+4\lambda G(\varphi)\,. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Zadnja jednačina se može svesti na oblik $e^{4\lambda\varphi}[e^{-4\lambda\varphi}G(\varphi)]'=\mu^2\varphi$, posle čega se lako nalazi

$$G(\varphi)=-\frac{\mu^2}{(4\lambda)^2}(1+4\lambda\varphi)+a_1e^{4\lambda\varphi}\,. \tag{8.21a}$$

Iz ponašanja $G(\varphi)$ u blizini nule, $G(\varphi)\sim-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2$, sledi $a_1=\mu^2/(4\lambda)^2$.

Eliminacijom $W(\varphi)$ iz prve dve jednačine dobija se

$$F(\varphi) = a_2 e^{2\lambda\varphi}\,, \tag{8.21b}$$

gde je $a_2 = 1$ zbog $F(0) = 1$. Prva jednačina, uz poznato $F(\varphi)$, daje rešenje za $W(\varphi)$:

$$W(\varphi) = \frac{1}{3\lambda}\left[\frac{1}{2\lambda}\big(e^{2\lambda\varphi} - a_3\big) - \varphi\right]. \tag{8.21c}$$

Iz ponašanja $W(\varphi)$ u okolini nule, $W(\varphi) \sim \varphi^2/3$, sledi $a_3 = 1$.

Tako smo dobili konačan lagranžijan,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_M - \lambda\varphi T\,, \\ &\mathcal{L}_S \equiv \frac{1}{2}e^{2\lambda\varphi}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\mu^2}{(4\lambda)^2}\big[e^{4\lambda\varphi} - (1 + 4\lambda\varphi)\big]\,, \end{aligned} \tag{8.22}$$

koji je nelinearan po polju i daje jednačine kretanja

$$-e^{2\lambda\varphi}\Box\varphi - \lambda e^{2\lambda\varphi}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\mu^2}{4\lambda}\big(e^{4\lambda\varphi} - 1\big) = \lambda T\,.$$

Ako uvedemo veličinu $\Phi(x) = e^{\lambda\varphi(x)}$, lagranžijan (8.21) se može izraziti u obliku

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\lambda^2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{\mu^2}{(4\lambda)^2}(\Phi^4 - 1 - 4\ln\Phi) + \mathcal{L}_M - T\ln\Phi\,, \tag{8.23}$$

dok jednačina kretanja postaje

$$-\Box\Phi - \mu^2\,\frac{\Phi^4 - 1}{4\Phi} = \lambda T\,.$$

Time je rešen zadatak konstrukcije konzistentne skalarne teorije gravitacije u kojoj graviton interaguje i sa sopstvenim TEI, u skladu sa zahtevom (α).

3. TENZORSKA TEORIJA GRAVITACIJE

Predjimo sada na ispitivanje mogućnosti izgradnje konzistentne teorije gravitona mase nula i heliciteta 2 (Feynman, 1962–63; Van Dam, 1974). Naivna teorija zasnovana na lagranžijanu (7.41) nije konzistentna, jer TEI materije nije očuvan. Da bi postupak otklanjanja nekonzistentnosti bio što jasniji, poći ćemo, kao i obično, od zahteva koje teorija treba da zadovoljava:

— jednačine kretanja za polje $\varphi_{\mu\nu}$, koje se dobijaju iz lagranžijana $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \Lambda$, treba da imaju oblik

$$(A) \qquad K_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi^{\sigma\rho} = \lambda\theta_{\mu\nu}\,;$$

— dinamička struja $\theta_{\mu\nu}$ je jednaka simetričnom TEI koji je očuvan,

$$(B) \qquad \partial^{\mu}\theta_{\mu\nu} = 0\,.$$

3.1 Iterativna procedura

Pokušajmo da nadjemo lagranžijan teorije koji zadovoljava uslove (A) i (B) iterativnim postupkom, polazeći od izraza

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_M - \lambda\varphi^{\mu\nu}T^{(0)}_{\mu\nu}\,, \tag{8.24a}$$

i odgovarajućih jednačina kretanja:

$$K_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi^{\sigma\rho} = \lambda T^{(0)}_{\mu\nu}\,. \tag{8.24b}$$

Ono što nedostaje na desnoj strani gornje jednačine je simetričan TEI gravitacionog polja $t^{(0)}_{\mu\nu}$. Ovaj nedostatak se može otkloniti izmenom polaznog lagranžijana,

$$\mathcal{L}^{(0)} \to \mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} + \lambda\Lambda^{(1)}\,, \tag{8.25a}$$

gde dodatni član $\Lambda^{(1)}$ mora zadovoljavati uslov

$$-\frac{\delta\Lambda^{(1)}}{\delta\varphi^{\mu\nu}} = t^{(0)}_{\mu\nu}\,. \tag{8.25b}$$

Traženi član se može naći posle dugog i zamornog računa:

$$\begin{aligned}-\Lambda^{(1)} =& \varphi^{\mu\nu}\bar\varphi^{\sigma\tau}\bar\varphi_{\mu\nu,\sigma\tau} + \varphi_{\sigma}{}^{\nu}\varphi^{\sigma\mu}\bar\varphi_{\mu\nu,\tau}{}^{\tau} - 2\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\nu\tau}\bar\varphi_{\mu\sigma}{}^{,\sigma\tau} \\ &+ 2\bar\varphi_{\mu\nu}\bar\varphi^{\sigma\mu}{}_{,\sigma}\bar\varphi^{\tau\nu}{}_{,\tau} + \left(\tfrac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} + \tfrac{1}{4}\varphi^2\right)\bar\varphi^{\sigma\tau}{}_{,\sigma\tau}.\end{aligned} \tag{8.26}$$

On se dobija polazeći od opšteg izraza kubičnog po poljima i njihovim izvodima (koji sadrži 18 proizvoljnih konstanti) i nametanjem uslova (8.25b).

Izmenom lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)} \to \mathcal{L}^{(1)}$ dobijaju se jednačine kretanja

$$K_{\mu\nu,\sigma\rho}\varphi^{\sigma\rho} = \lambda\big(T^{(0)}_{\mu\nu} + t^{(0)}_{\mu\nu}\big) \equiv \lambda\theta^{(0)}_{\mu\nu}\,.$$

No, tenzor $\theta^{(0)}_{\mu\nu}$ nije očuvan u novoj teoriji, jer se on odnosi na polazni lagranžijan $\mathcal{L}^{(0)}$. Pošto $\Lambda^{(1)}$ sadrži izvode polja, $\theta^{(1)}_{\mu\nu}$ se razlikuje od $\theta^{(0)}_{\mu\nu}$ za veličinu reda λ, pa je nekonzistentnost dobijenih jednačina reda λ^2.

Veličina $\Lambda^{(1)}$ se može dobiti još jednom metodom, koja je ekvivalentna sa prethodnom, ali je, kao što ćemo videti, mnogo pogodnija za uopštavanje. Tenzor $T^{\mu\nu}_{(0)}$ zadovoljava relaciju (7.63),

$$(\eta_{\nu\sigma} + 2\lambda\varphi_{\nu\sigma})\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(0)} = -[\lambda\rho, \sigma]T^{\lambda\rho}_{(0)} ,$$

koja se dobija uz korišćenje jednačina kretanja za materiju. Ova se jednačina može dovesti na oblik

$$\eta_{\nu\sigma}\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(0)} = -[\lambda\rho, \sigma]T^{\lambda\rho}_{(0)} - 2\lambda\varphi_{\nu\sigma}\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(0)} ,$$

iz čega sledi

$$\eta_{\nu\sigma}\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(0)} = -[\lambda\rho, \sigma]T^{\lambda\rho}_{(0)} + \mathcal{O}(\lambda^2) .$$

S druge strane, pošto je nekonzistentnost jednačina kretanja reda λ^2, to je $\partial_\mu \theta^{\mu\nu}_{(0)} = \mathcal{O}(\lambda^2)$, pa sledi

$$\eta_{\nu\sigma}\partial_\mu t^{\mu\nu}_{(0)} = [\lambda\rho, \sigma]T^{\lambda\rho}_{(0)} + \mathcal{O}(\lambda^2) .$$

Ova se relacija može upotrebiti za nalaženje popravke $\Lambda^{(1)}$ polaznog lagranžijana $\mathcal{L}^{(0)}$. Zaista, polazeći od opšteg kubičnog izraza za $\Lambda^{(1)}$, prethodna relacija napisana u obliku

$$-\eta_{\nu\sigma}\partial_\mu \frac{\delta\Lambda^{(1)}}{\delta\varphi^{\mu\nu}} = [\lambda\rho, \sigma]T^{\lambda\rho}_{(0)} + \mathcal{O}(\lambda^2) , \tag{8.27}$$

odredjuje sve konstante u $\Lambda^{(1)}$ tako da se dobija (8.26).

Ostvarenje prvog koraka iteracione procedure praćeno je sa mnogo zamornog računa. Očigledno je da bi drugi korak bio mnogo komplikovaniji, pa se, prirodno, postavlja pitanje o mogućnosti efikasnijeg rešavanja postavljenog zadatka. Razmatranja koja slede posvećena su upravo tom problemu.

3.2 Formulacija kompletne teorije

Ponekad se dogadja u fizičkim teorijama da je veoma teško izračunati korekcije višeg reda nekog izraza, a ipak je moguće konstruisati kompletno rešenje u kome su efektivno prosumirane sve popravke višeg reda. To je bio slučaj kod skalarne teorije gravitacije, gde nalaženje funkcija F i G u izrazu za kompletan lagranžijan odgovara sumiranju svih popravki na polazni lagranžijan $\mathcal{L}^{(0)}$. Zato ćemo i u ovom slučaju pokušati da nadjemo kompletan lagranžijan teorije polazeći od zahteva izraženih uslovima (A) i (B).

Uslovi konzistentnosti. Ako uvedemo kompletno dejstvo za gravitaciono polje,

$$I_G = \int (\mathcal{L}_T + \Lambda) d^4x \,,$$

onda se tražena jednačina polja (A) može napisati u obliku

$$\frac{\delta I_G}{\delta \varphi_{\mu\nu}} = \lambda \widetilde{T}^{\mu\nu} \,, \tag{8.28}$$

gde je $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ deo tenzora $\theta^{\mu\nu}$ koji potiče od materije i interakcije. Dozvolićemo mogućnost da je u konzistentnoj teoriji $T^{\mu\nu}_{(0)} \neq \widetilde{T}^{\mu\nu}$. Konzistentnost jednačina polja (8.28), i jednačina kretanja materije, zahteva da je ispunjen uslov

$$\partial_\mu \frac{\delta I_G}{\delta \varphi_{\mu\nu}} = \lambda \partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu} \,,$$

gde se desna strana izražava pomoću jednačina kretanja materije. Ako ništa ne pretpostavimo o interakciji gravitacije i materije, onda niti znamo oblik $\widetilde{T}^{\mu\nu}$, niti znamo jednačine kretanja materije, pa se konzistentnost ne može proveriti. Mi ćemo *pretpostaviti* da $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ zadovoljava isti uslov divergencije kao i $T^{\mu\nu}_{(0)}$:

$$g_{\nu\sigma} \partial_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu} = -[\mu\nu, \sigma] \widetilde{T}^{\mu\nu} \,. \tag{8.29}$$

Ovaj uslov je za $T^{\mu\nu}_{(0)}$ izveden iz njegovog oblika (7.31c) i odgovarajućih jednačina kretanja materije. Da bi jednačine (8.28) i (8.29) bile konzistentne, dejstvo I_G treba da zadovoljava sledeću *funkcionalno–diferencijalnu jednačinu*:

$$g_{\nu\sigma} \partial_\mu \frac{\delta I_G}{\delta \varphi_{\mu\nu}} + [\mu\nu, \sigma] \frac{\delta I_G}{\delta \varphi_{\mu\nu}} = 0 \,. \tag{8.30}$$

Rešavanje ovakve jednačine je izvanredno težak problem, jer ne postoji standardni postupak za nalaženje rešenja. *Ne postoji jednoznačno rešenje* ove jednačine, čak ni ako dodamo uslov da se pri malom $\varphi_{\mu\nu}$ to rešenje ponaša na odredjen način, npr. kao što je dato jednačinom (8.24a). Postoji, medjutim, "najprostije" rešenje, koje će nas dovesti do Ajnštajnove teorije.

Da bismo bolje razumeli smisao jednačine (8.30), napisaćemo je u jednoj ekvivalentnoj formi, u kojoj ona jasno izražava odredjenu osobinu dejstva I_G. Ako (8.30) pomnožimo proizvoljnim vektorom $2\xi^\sigma(x)$ i integralimo po celom prostoru, a zatim izvršimo parcijalnu integraciju u prvom članu, dobićemo

$$\int d^4x \, \frac{\delta I_G}{\delta \varphi_{\mu\nu}} \left\{ -(\xi^\sigma g_{\sigma\nu})_{,\mu} + [\mu\nu, \sigma] \xi^\sigma \right\} 2 = 0 \,. \tag{8.31}$$

Ova se jednačina može protumačiti na sledeći način. Primetimo da se beskonačno mala transformacija

$$\begin{aligned}\delta_0\varphi_{\mu\nu} &= 2\big\{(\xi^\sigma g_{\sigma\nu})_{,\mu} - [\mu\nu,\sigma]\xi^\sigma\big\} \\ &= \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} + 2\lambda(\varphi_{\mu\sigma}\xi^\sigma{}_{,\nu} + \varphi_{\nu\sigma}\xi^\sigma{}_{,\mu} + \varphi_{\mu\nu,\sigma}\xi^\sigma)\,,\end{aligned}$$

može napisati kao

$$\delta_0 g_{\mu\nu} = 2\lambda(g_{\mu\sigma}\xi^\sigma{}_{,\nu} + g_{\nu\sigma}\xi^\sigma{}_{,\mu} + g_{\mu\nu,\sigma}\xi^\sigma)\,. \tag{8.32}$$

Odavde sledi važan zaključak:

> *jednačina (8.31) izražava činjenicu da je pri beskonačno malim lokalnim transformacijama (8.32) dejstvo I_G invarijantno.*

Transformacija (8.32) se može prepoznati kao transformacija metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$ u odnosu na beskonačno male transformacije koordinata

$$x'^\mu = x^\mu - 2\lambda\xi^\mu(x)\,. \tag{8.33}$$

No, uslov (8.31) je uslov invarijantnosti dejstva I_G *samo* u odnosu na transformaciju (8.32), bez (8.33). Zato ćemo razmatranje mogućnosti geometrijske interpretacije, koja se zasniva na invarijantnosti dejstva u odnosu na *obe* transformacije, ostaviti za kasnije.

Dejstvo gravitacionog polja. Da bismo našli dejstvo I_G, potrebno je bolje razumeti način izgradnje invarijantnih veličina u odnosu na transformaciju (8.32).

Pri lokalnim transformacijama (8.32), determinanta $g = \det(g_{\mu\nu})$ se menja po pravilu $\delta_0 g = 2\lambda g(2\xi^\sigma{}_{,\sigma} + \xi^\sigma g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\sigma})$, odakle sledi

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g} + 2\lambda(\sqrt{-g}\,\xi^\sigma)_{,\sigma}\,.$$

Pri integraciji po celom prostoru, drugi član u ovoj jednačini iščezava. Tako nalazimo jedno lokalno invarijantno rešenje za dejstvo:

$$I_G^{(0)} = \int d^4x\sqrt{-g}\,. \tag{8.34}$$

Ovo formalno rešenje nije zadovoljavajuće sa gledišta dinamike, jer ne sadrži izvode gravitacionog polja. No, metoda njegove konstrukcije je veoma korisna za nalaženje drugih rešenja.

Da bi se mogli konstruisati lokalno invarijantni izrazi, pogodno je definisati vektore, skalare itd., u skladu sa standardnim postupkom u geometriji. Tako se *skalar* definiše uslovom $\sigma'(x') = \sigma(x)$, koji se može napisati u obliku

$$\delta_0\sigma(x) \equiv \sigma'(x) - \sigma(x) = 2\lambda\xi^\tau\partial_\tau\sigma(x)\,.$$

Kao što vidimo, skalar nije invarijantan u odnosu na δ_0–transformacije.

Kombinacijom prethodnih rezultata dobija se

$$\sqrt{-g'}\sigma' = \sqrt{-g}\sigma + 2\lambda(\sqrt{-g}\sigma\xi^\tau)_{,\tau}\,,$$

iz čega se vidi da veličina

$$I_G = \int d^4x\sqrt{-g}\,\sigma(x)\,, \tag{8.35}$$

gde je σ skalar, takodje predstavlja rešenje za gravitaciono dejstvo.

Kako od veličine $g_{\mu\nu}$ i njenih izvoda konstruisati skalar? S obzirom na skriveni geometrijski smisao transformacija (8.32), nije teško pogoditi da za to postoji metod koji je dobro poznat u diferencijalnoj geometriji. Jedini tenzor u Rimanovom prostoru, koji se može konstruisati od polja $g_{\mu\nu}$ i njihovih izvoda, jeste Rimanov tenzor krivine, tako da je konstrukcija dejstva pravolinijska. "Najprostije" rešenje je *Ajnštajnova teorija*,

$$I_G = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,R\,, \tag{8.36}$$

gde je R skalarna krivina Rimanovog prostora metrike $g_{\mu\nu}$. Postojanje i drugih invarijanti [npr. kosmološki član (8.34), ili invarijante kvadratične po tenzoru krivine] posledica je nejednoznačnosti rešenja. Normiranje rešenja (8.36) je takvo da se u slučaju slabog polja dobija lagranžijan $\mathcal{L}_T$.

Dejstvo za materiju i interakciju. Vratimo se sada onom delu dejstva I_{MI} koji opisuje materiju i njenu interakciju sa gravitacijom. U jednačini kretanja (8.28) $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ je definisan relacijom

$$-\lambda\widetilde{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{\delta I_{MI}}{\delta\varphi_{\mu\nu}}\,. \tag{8.37}$$

Iz prethodnog izlaganja je jasno da pretpostavka (8.29) o ponašanju divergencije veličine $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ vodi, u ovom slučaju, do zaključka o *invarijantnosti dejstva* I_{MI} u odnosu na beskonačno male lokalne transformacije (8.32):

$$\int d^4x\frac{\delta I_{MI}}{\delta g_{\mu\nu}}\delta_0 g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{8.38}$$

Dejstvo I_{MI} zavisi od polja materije i gravitacije. Provera uslova (8.29), pa prema tome i (8.38), zahteva korišćenje eksplicitnih jednačina kretanja za materiju. Takav način provere konzistentnosti teorije je komplikovan, i ne daje nikakvo praktično uputstvo za konstrukciju I_{MI}.

U slučaju kad je materija opisana čestičnim varijablama, dejstvo je definisano, sa tačnošću do članova reda λ, izrazom

$$I^{(1)} = \int d^4x \big(\mathcal{L}_T + \mathcal{L}_M - \lambda\varphi_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{(0)}\big) \equiv I_T + I^{(1)}_{MI}\,.$$

Deo I_T poseduje lokalnu simetriju $\delta_0\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$, a kompletno dejstvo poseduje simetriju u odnosu na globalne translacije $\delta x^\mu = a^\mu$, zbog čega važi zakon očuvanja TEI čitavog sistema. Teorija je nekonzistentna, jer uslov (8.38) za $I^{(1)}_{MI}$,

$$\frac{\delta I^{(1)}_{MI}}{\delta g_{\mu\nu}}\delta_0 g_{\mu\nu} = -\lambda T^{\mu\nu}_{(0)}(\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu) = 0\,, \tag{8.39a}$$

zahteva očuvanje samo dela $T^{\mu\nu}_{(0)}$ koji se odnosi na materiju. Medjutim, ako se ograničimo na tačnost do članova reda λ, prethodni uslov je korektan. Zaista, eksplicitnim korišćenjem geodezijskih jednačina dobija se

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(0)} = \mathcal{O}(\lambda)\,, \tag{8.39b}$$

što unosi grešku reda λ^2 u (8.39a).

Neefikasnost metoda korišćenja eksplicitnih jednačina kretanja u cilju provere konzistentnosti navodi nas na pitanje: može li se važenje uslova (8.39b) osigurati na neki drugi, jednostavniji i praktičniji način? Odgovor je: može! Automatsko važenje ovog uslova može se dobiti *proširenjem pojma lokalnih transformacija* i na varijable koje opisuju materiju.

Pretpostavimo da je dejstvo $I^{(1)}_{MI}$ invarijantno u odnosu na proširene lokalne transformacije koje obuhvataju i čestične varijable:

$$\begin{aligned}\delta_0\varphi_{\mu\nu} &= \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu\,,\\ \delta x^\mu &= a^\mu[\xi].\end{aligned}$$

Zahtev invarijantnosti $I^{(1)}_{MI}$ daje

$$\frac{\delta I^{(1)}_{MI}}{\delta x^\mu}a^\mu[\xi] + \frac{\delta I^{(1)}_{MI}}{\delta g_{\mu\nu}}2\lambda(\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu) = 0\,. \tag{8.40}$$

Iz oblika (7.45) za $I^{(1)}_{MI}$ sledi da je uslov invarijantnosti ispunjen ako važi $a^\mu[\xi] = -2\lambda\xi^\mu(x)$. S druge strane, posle korišćenja jednačina kretanja za materiju, uslov invarijantnosti (8.40) automatski prelazi u uslov konzistentnosti (8.39a).

Zahtev invarijantnosti (8.40) je veoma efikasan način izgradnje konzistentne teorije. Uopšteni oblik lokalnih transformacija dat je relacijama

$$\delta_0 g_{\mu\nu} = 2\lambda(g_{\mu\sigma}\xi^\sigma{}_{,\nu} + g_{\nu\sigma}\xi^\sigma{}_{,\mu} + g_{\mu\nu,\sigma}\xi^\sigma)\,, \tag{8.41a}$$

$$\delta x^\mu = -2\lambda\xi^\mu\,, \tag{8.41b}$$

dok se uslov invarijantnosti dejstva postiže izborom

$$I_{MI} = -m\int d\tau\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}\,. \tag{8.42}$$

Transformacija čestičnih varijabli (8.41b) se može najprostije realizovati ako pretpostavimo da se *sve tačke prostor–vremena* transformišu na isti takav način. U tom slučaju

uopštene lokalne transformacije nisu ništa drugo nego kompletne beskonačno male koordinatne transformacije.

Uvodjenje ovog pojma postalo je, praktično, nužno tek pri razmatranju interakcije gravitacije i materije (konstruisanje invarijantnog dejstva I_{MI} zahteva definisanje transformacionih osobina čestičnih varijabli, koje opisuju materiju).

Na ovom mestu je važno razjasniti dva pitanja:

a) da li proširena simetrija utiče na invarijantnost gravitacionog dejstva I_G?, i

b) da li uopštena simetrija ima oblik (8.41) i kad materija nije opisana čestičnim varijablama?

Odgovor na prvo pitanje se može naći analizom oblika gravitacionog dejstva (8.35). Pošto je veličina $d^4x\sqrt{-g}$ invarijantna mera, i $\sigma'(x') = \sigma(x)$, jasno je da je dejstvo I_G invarijantno i u odnosu na beskonačno male koordinatne transformacije (8.41).

Ako materija nije opisana čestičnom varijablom, već nekim poljem Φ, onda TEI materije sadrži izvode polja Φ. Ne ulazeći u detalje analize, jasno je da konstrukcija invarijantnog dejstva I_{MI} zahteva proširenje pojma lokalne transformacije ne samo na polja materije Φ, već i na veličinu $\partial_\mu\Phi$. Rezultat je, opet, beskonačno mala koordinatna transformacija (8.41) praćena pravilom promene polja materije Φ.

U toku izgradnje konzistentne teorije, simetrija se izmenila, baš kao i u slučaju Jang–Milsove teorije.

Lokalna Abelova simetrija gravitacionog dela i globalna translaciona simetrija celog sistema stapaju se u uopštenu lokalnu simetriju (8.41) (lokalna translacija).

Korisno je ovde razjasniti jednu jednostavnu osobinu veličine $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ koja ponekad može izazvati zabunu. Relacija (8.29), koju $\widetilde{T}^{\mu\nu}$ zadovoljava po pretpostavci, definiše u Rimanovoj geometriji ne tenzor, već *tenzorsku gustinu*. Pravi tenzor energije–impulsa se uvodi relacijom $T^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu}/\sqrt{-g}$.

Dejstvo $I = I_G + I_{MI}$ rešava postavljeni zadatak konstruisanja konzistentne teorije gravitacije. Iz nje slede Ajnštajnove jednačine za gravitaciono polje, koje su u skladu sa svim eksperimentalnim proverama.

Treba istaći, na kraju, da je ključni korak pri dobijanju konzistentne teorije bila pretpostavka da TEI zadovoljava uslov divergencije (8.29). Ova relacija predstavlja zakon kovarijantnog očuvanja pravog TEI. Predmet razmatranja u narednom odeljku biće pokušaj da se konačan rezultat dobije jednostavnije, i bez dodatnih pretpostavki tipa (8.29).

4. FORMALIZAM PRVOG REDA

Videli smo, u prethodnom izlaganju, da ne postoji opšti metod prelaza sa linearne, nekonzistentne teorije na konzistentnu, ali nelinearnu formulaciju. Metod pogadjanja funkcionalnog oblika dejstva (upotrebljen u slučaju skalarne teorije) nije uvek primenljiv, dok iterativna procedura u teoriji gravitacije zahteva beskonačno mnogo koraka. Fajnmanovo rešenje problema je veoma elegantno, ali se ono zasniva na pretpostavci (8.29), čije opravdanje vidimo tek posle nalaženja rešenja problema.

U nekim slučajevima prelaz na formalizam prvog reda znatno pojednostavljuje iterativni postupak, pa se put do konzistentne teorije može skratiti na samo *jedan* korak (Deser, 1970).

4.1 Jang–Milsova teorija

Zbog jednostavnosti izlaganja posmatraćemo, najpre, izgradnju konzistentne teorije polazeći od slobodnog Jang–Milsovog polja, uz posebnu analizu oblika interakcije sa materijom.

Slobodno Jang–Milsovo polje. Linearizovani lagranžijan slobodnog Jang–Milsovog polja u formalizmu prvog reda ima oblik

$$\mathcal{L}_F^{(0)} = -\tfrac{1}{2}F^{a\mu\nu}(\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu) + \tfrac{1}{4}F^{a\mu\nu}F^a{}_{\mu\nu}\,, \tag{8.43}$$

gde su A^a i F^a *nezavisne* varijable. Jednačine kretanja, koje slede variranjem po A^a i F^a,

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} = 0\,,$$
$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu \equiv \overset{\circ}{F}{}^a_{\mu\nu}\,,$$

ekvivalentne su jednačinama $\partial_\mu \overset{\circ}{F}{}^{a\mu\nu} = 0$, koje se dobijaju u formalizmu drugog reda. Teorija je invarijantna u odnosu na globalne $SU(2)$ i lokalne gradijentne transformacije.

Kao i ranije, mi želimo da izmenimo polazni lagranžijan $\mathcal{L}_F^{(0)}$ tako da jednačine kretanja postanu

$$(\diamond) \qquad \partial^\mu \overset{\circ}{F}{}^a{}_{\mu\nu} = g(j^a_\nu + \partial^\mu W^a_{\mu\nu})\,,$$

gde je j^a kanonska struja koja sledi iz novog lagranžijana.

U najnižoj aproksimaciji kanonska struja se dobija iz lagranžijana $\mathcal{L}_F^{(0)}$ i ima oblik

$$j^{a\nu}_{(0)} = \epsilon^{abc} A^b{}_\mu F^{c\mu\nu}\,,$$

koji se, posle eliminacija $F^{c\mu\nu}$, podudara sa rezultatom dobijenim u formalizmu drugog reda. Prateći uobičajenu iterativnu proceduru, potražićemo novi lagranžijan u obliku

$$\mathcal{L}_F^{(1)} = \mathcal{L}_F^{(0)} - \tfrac{1}{2} g A^a \cdot j_a^{(0)}\,,$$

gde je faktor 1/2 izabran, jer je $A\cdot j$ kvadratično po A. Tako dobijamo

$$\mathcal{L}_F^{(1)} = -\tfrac{1}{2} F^{a\mu\nu}\big(\partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu - g\epsilon^{abc} A^b{}_\mu A^c{}_\nu\big) + \tfrac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a{}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_F\,. \quad (8.44)$$

Pomalo nas iznenadjuje činjenica da je ovaj izraz jednak sa Jang–Milsovim lagranžijanom (8.10*a*) u formalizmu prvog reda. Pošto $A\cdot j$ ne sadrži izvode polja, kanonska struja, koja sledi iz ovog lagranžijana, ostaje ista kao $j^a_{(0)}$, pa je konstrukcija konzistentne teorije završena već posle *prvog* koraka.

Jednačine kretanja, koje slede iz novog lagranžijana, zaista možemo napisati u željenom obliku ($\diamond$):

$$\partial_\mu \overset{\circ}{F}{}^{a\mu\nu} = g\big[j^{a\nu} + \partial_\mu\big(\epsilon^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}\big)\big]\,.$$

Interakcija sa materijom. Vratimo se sada problemu nalaženja lagranžijana interakcije u slučaju opšteg polja materije ϕ. Ukupan lagranžijan $\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{MI}$ daje jednačine kretanja

$$D_\mu F_a{}^{\mu\nu} = g J^\nu_a \equiv -\frac{\delta \mathcal{L}_{MI}}{\delta A^a{}_\nu}\,,$$

ili

$$\partial_\mu \overset{\circ}{F}{}^{a\mu\nu} = g\big[J^{a\nu} + j^{a\nu} + \partial_\mu\big(\epsilon^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}\big)\big]\,.$$

Pretpostavićemo:

a) da $\mathcal{L}_{MI}$ ne zavisi od izvoda polja A^a, pa stoga ne utiče na konstrukciju struje j^a;

b) da je dinamička struja J_a jednaka sa kanonskom strujom lagranžijana $\mathcal{L}_{MI}$ (koja potiče od globalne $SU(2)$ simetrije), tako da je automatski održana.

Dakle,

$$-\frac{\partial\mathcal{L}_{MI}}{\partial\partial_\mu\phi}T_a\phi = -\frac{1}{g}\frac{\delta\mathcal{L}_{MI}}{\delta A^a{}_\mu}\,,$$

gde su su T_a generatori grupe $SU(2)$ u reprezentaciji koja odgovara polju ϕ. Rešenje poslednje jednačine je

$$\mathcal{L}_{MI}(\phi,\partial_\mu\phi,A^a{}_\mu) = \mathcal{L}_M(\phi,D_\mu\phi)\,, \tag{8.45}$$

gde je $D_\mu\phi \equiv (\partial_\mu + gA^a{}_\mu T_a)\phi$ kovarijantni izvod polja ϕ.

Zahtev konzistentnosti teorije u sektoru materije dovodi do uvodjenja tzv. minimalne interakcije materije i Jang–Milsovog polja.

4.2 Ajnštajnova teorija

Formalizam prvog reda za tenzorsku teoriju. Prelaz na formalizam prvog reda u tenzorskoj teoriji gravitacije može se ostvariti koristeći poznati Palatinijev formalizam u OTR. U Palatinijevom formalizmu dejstvo za OTR ima oblik

$$I_P = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)\,, \tag{8.46}$$

gde je koneksija $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ simetrična i definisana *nezavisno* od metrike. Variranjem po $g_{\mu\nu}$ i $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ dobijaju se jednačine kretanja

$$\begin{aligned}&R_{\mu\nu}(\Gamma) - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R(\Gamma) = 0\,,\\ &\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\nu\sigma,\rho} + g_{\rho\sigma,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}) \equiv \left\{{}^{\,\mu}_{\nu\rho}\right\}\,,\end{aligned}$$

koje, posle eliminacije Γ, daju standardne Ajnštajnove jednačine. Palatinijev formalizam je, ustvari, formalizam prvog reda za OTR.

Zamenom $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda\varphi_{\mu\nu}$ u I_P i zadržavanjem samo članova koji su kvadratični po poljima i njihovim izvodima, dobija se dejstvo

$$I_T = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d^4x\Big[-2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu}(\Gamma) + \eta^{\mu\nu}R^K_{\mu\nu}(\Gamma)\Big]\,, \tag{8.47}$$

gde su R^L i R^K linearan i kvadratičan deo krivine,

$$R^L_{\mu\nu} = \partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma_\mu\,,\qquad R^K_{\mu\nu} = \Gamma_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\,,$$

a $\Gamma_\rho \equiv \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}$. Ovo dejstvo opisuje tenzorsku teoriju (7.19) u formalizmu prvog reda. Zaista, variranjem po $\bar{\varphi}^{\mu\nu}$ i $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ dobijaju se jednačine kretanja

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\lambda} R^L_{(\mu\nu)} = 0\,, \\ &\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \lambda\eta^{\mu\lambda}(\varphi_{\nu\lambda,\rho} + \varphi_{\rho\lambda,\nu} - \varphi_{\nu\rho,\lambda})\,. \end{aligned} \tag{8.48a}$$

Zamena druge jednačine u prvu, posle prelaska na $\bar{\varphi}^{\mu\nu}$, dovodi do

$$\frac{1}{2\lambda} R^L_{(\mu\nu)}(\bar{\varphi}) = -\Box\,\bar{\varphi}_{\mu\nu} + 2\bar{\varphi}^\sigma{}_{(\mu,\nu)\sigma} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\,\bar{\varphi} = 0\,. \tag{8.48b}$$

Ako jednačinu kretanja (7.20) za $\varphi_{\mu\nu}$ napišemo u obliku

$$-\Box\,\bar{\varphi}_{\mu\nu} + 2\bar{\varphi}^\sigma{}_{(\mu,\nu)\sigma} + \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\,\bar{\varphi} = J_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}J_\lambda{}^\lambda\,,$$

postaje jasno da je (8.48*b*) jednačina kretanja tenzorskog polja u vakuumu.

Slobodna teorija gravitacije. Izgradnja konzistentne, slobodne teorije gravitacije postiže se takvom modifikacijom dejstva I_T koja dovodi do sledećih, nelinearnih jednačina tenzorskog polja:

$$(\star) \qquad \frac{1}{2\lambda} R^L_{(\mu\nu)}(\bar{\varphi}) = \lambda\big(\bar{t}_{\mu\nu} + \overline{W}^\rho{}_{\mu\nu,\rho}\big)\,,$$

gde je $\bar{t}_{\mu\nu} \equiv t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}t$, a $t_{\mu\nu}$ je simetričan i očuvan TEI gravitacionog polja.

Simetričan TEI se, u prvoj aproksimaciji, može dobiti iz početnog lagranžijana $\mathcal{L}_T$ koristeći Rosenfeldov postupak:

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta\mathcal{L}_T(\gamma)}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\bigg|_{\gamma=\eta}\,.$$

Ovde je $\mathcal{L}_T(\gamma)$ kovarijantni lagranžijan dobijen iz $\mathcal{L}_T$ uvodjenjem proizvoljnog krivolinijskog sistema koordinata sa metrikom $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_T(\gamma) = -\frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{-\gamma}\Big[-2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}\overset{\gamma}{R}{}^L_{\mu\nu}(\Gamma) + \gamma^{\mu\nu}\overset{\gamma}{R}{}^K_{\mu\nu}(\Gamma)\Big]\,, \tag{8.49a}$$

gde se $\overset{\gamma}{R}_{\mu\nu}$ dobija iz $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ zamenom $\Gamma \to G(\gamma)$ = Kristofelova koneksija za metriku $\gamma_{\mu\nu}$.

Naredna razmatranja se mogu znatno uprostiti ako pretpostavimo da se $\bar{\varphi}^{\mu\nu}$ transformiše kao *tenzorska gustina* pri uvodjenju krivolinijskih koordinata. U tom slučaju kovarijantni lagranžijan je dat izrazom

$$\mathcal{L}'_T(\gamma) = -\frac{1}{2\lambda^2}\Big[-2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}\overset{\gamma}{R}{}^L_{\mu\nu}(\Gamma) + \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}\overset{\gamma}{R}{}^K_{\mu\nu}(\Gamma)\Big]\,. \tag{8.49b}$$

Ova izmena je nebitna sa gledišta dobijanja TEI. Zaista, tenzori energije–impulsa dobijeni iz kovarijantnih lagranžijana $\mathcal{L}_T$ i $\mathcal{L}'_T$ *isti* su, do na jednačine kretanja za $\bar{\varphi}^{\mu\nu}$:

$$t'_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\bar{\varphi}^{\sigma\rho}\frac{\delta\mathcal{L}_T(\gamma)}{\delta\bar{\varphi}_{\sigma\rho}}\bigg|_{\gamma=\eta} .$$

Pošto je zahtev konzistentnosti ($\star$) izražen pomoću jednačina kretanja, tenzori $t_{\mu\nu}$ i $t'_{\mu\nu}$ su ekvivalentni sa gledišta izgradnje konzistentne teorije. Mi ćemo, nadalje, raditi sa tenzorom $t'_{\mu\nu}$, koji će biti tačno jednak odgovarajućem TEI konačne teorije, kao što ćemo uskoro videti.

Pri računanju TEI variranjem po metrici,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\bigg|_{\gamma=\eta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma^{\mu\nu}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial G^{\lambda}_{\sigma\tau}}\frac{\partial G^{\lambda}_{\sigma\tau}}{\partial\gamma^{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial G^{\lambda}_{\sigma\tau}}\frac{\partial G^{\lambda}_{\sigma\tau}}{\partial\partial_\rho\gamma^{\mu\nu}}\right)\bigg|_{\gamma=\eta} ,$$

treba uočiti da drugi član ne daje doprinos pri $\gamma = \eta$. Posle sredjivanja ovog izraza, i izdvajanja traga, dobija se relacija

$$\bar{t}'_{\mu\nu} \equiv t'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}t' = -\frac{1}{2\lambda^2}\Big[R^K_{\mu\nu}(\Gamma) - 2\lambda\sigma_{\mu\nu}\Big] , \tag{8.50}$$

gde je

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu} = \partial^\rho\big[&-\eta_{\mu\nu}(\bar{\varphi}_\lambda{}^\tau\Gamma^\lambda_{\rho\tau} - \tfrac{1}{2}\bar{\varphi}\Gamma_\rho) - 2\bar{\varphi}_\rho{}^\lambda\Gamma_{(\mu\nu)\lambda} \\ &- 2\bar{\varphi}_{(\mu}{}^\lambda\Gamma_{\rho\lambda\nu)} + 2\bar{\varphi}_{(\mu}{}^\lambda\Gamma_{\nu)\rho\lambda} - \bar{\varphi}_{\mu\nu}\Gamma_\rho + 2\bar{\varphi}_{\rho(\mu}\Gamma_{\nu)}\big] ,\end{aligned}$$

pri čemu su indeksi od φ i Γ podizani i spuštani pomoću η, a $\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \eta_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}$.

Pošto je $\bar{t}'_{\mu\nu}$ složena funkcija polja, nije jasno da li se i ovde, kao u slučaju Jang–Milsove teorije, novi lagranžijan može dobiti jednostavnim dodavanjem člana $-\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}(\alpha\bar{t}'_{\mu\nu})$. Direktna provera pokazuje da iz $t'_{\mu\nu}$ treba izbaciti deo $\sigma_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{L}^{(1)}_T = \mathcal{L}_T + \lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}\frac{1}{2\lambda^2}\alpha R^K_{\mu\nu} ,$$

posle čega se korektan rezultat dobija pri $\alpha = 2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)}_T &= -\frac{1}{2\lambda^2}\Big[-2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}(R^L_{\mu\nu} + R^K_{\mu\nu}) + \eta^{\mu\nu}R^K_{\mu\nu}\Big] \\ &= -\frac{1}{2\lambda^2}\Big[(\eta^{\mu\nu} - 2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu})(R^L_{\mu\nu} + R^K_{\mu\nu}) - \eta^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu}\Big] .\end{aligned} \tag{8.51}$$

Ako definišemo

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu} - 2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}) , \tag{8.52}$$

i odbacimo divergenciju $\eta^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu} = \partial_\mu(\Gamma^\mu - \Gamma^{\mu\nu}{}_\nu)$, lagranžijan $\mathcal{L}_T^{(1)}$ se lako može identifikovati sa Ajnštajnovim lagranžijanom u formalizmu prvog reda.

Primetimo da pri uvodjenju pomoćne metrike član $\bar\varphi^{\mu\nu}R^K_{\mu\nu}$ ne zavisi od γ, pa TEI, koji se dobija iz lagranžijana $\mathcal{L}_T^{(1)}$, ostaje isti kao i $t'_{\mu\nu}$, čime je konstrukcija konzistentne teorije završena u samo *jednom* koraku. Izraz $\bar\varphi^{\mu\nu}R^K_{\mu\nu}$ ostaje γ–nezavisan, jer smo izabrali da $\bar\varphi^{\mu\nu}$ bude tenzorska gustina. Da ovo nismo učinili, odgovarajući tenzori energije–impulsa bi bili jednaki tek posle korišćenja jednačina kretanja koje slede iz $\mathcal{L}_T$ i $\mathcal{L}_T^{(1)}$.

Da bismo eksplicitno proverili važenje uslova ($\star$), podjimo od jednačina $\delta\mathcal{L}_T^{(1)}/\delta\Gamma = 0$ napisanih u obliku

$$-2\lambda\bar\varphi^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = \tilde g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda - 2\tilde g^{(\mu\rho}\Gamma^{\nu)}_{\lambda\rho}\,.$$

Diferenciranjem ove jednačine možemo na levoj strani dobiti $\Box\bar\varphi^{\mu\nu}$, $\bar\varphi^{(\mu\rho,\nu)}{}_\rho$ i $\Box\bar\varphi$, i pomoću njih formirati izraz za $R^L_{(\mu\nu)}$. Na desnoj strani treba izvršiti dekompoziciju $\tilde g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - 2\lambda\bar\varphi^{\mu\nu}$. Rezultat ovog računa je korektna jednačina oblika ($\star$):

$$\frac{1}{2\lambda}R^L_{(\mu\nu)}(\bar\varphi) = \lambda\bar t'_{\mu\nu}\,.$$

Napomenimo da je ova jednačina tačna i u jakom gravitacionom polju kada $\bar\varphi^{\mu\nu}$ nije mala veličina.

Pretpostavka da je $\bar\varphi^{\mu\nu}$ tenzorska gustina donekle smanjuje opštost i snagu posmatranog metoda izgradnje konzistentne teorije, ali je jednostavnost i jasnoća dobijene strukture više nego dovoljna nadoknada.

Interakcija sa materijom. Ostalo je još da vidimo kakav mora biti oblik konzistentne interakcije gravitacionog polja i materije. U tom slučaju, pored $\bar t'_{\mu\nu}$, koji opisuje doprinos *gravitacije*, na desnoj strani jednačine ($\star$) mora stajati i dinamički TEI *materije*:

$$(\star\star) \qquad \frac{1}{2\lambda}R^L_{\mu\nu}(\bar\varphi) = \lambda\big(\bar t'_{\mu\nu} + \overline{T}_{\mu\nu}\big)\,.$$

Da bismo našli oblik gravitacione interakcije sa materijom, uvešćemo dve pretpostavke:

a) lagranžijan $\mathcal{L}_{MI}$ ne utiče na konstrukciju gravitacionog TEI, jer ne zavisi od izvoda gravitacionih polja;

b) dinamički tenzor $\overline{T}_{\mu\nu}$ je jednak sa odgovarajućim simetrizovanim kanonskim tenzorom.

Koristeći Rosenfeldovu definiciju za $\overline{T}_{\mu\nu}$ pretpostavka *b*) se može izraziti relacijom

$$2\frac{\delta\mathcal{L}_M(\gamma)}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\bigg|_{\gamma=\eta} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\delta\mathcal{L}_{MI}}{\delta\bar\varphi^{\mu\nu}}\,,$$

odakle sledi

$$\mathcal{L}_{MI} = \mathcal{L}_M(\eta^{\mu\nu} - 2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu})\,. \tag{8.53}$$

Drugim rečima, $\mathcal{L}_{MI}$ je jednak kovarijantnom lagranžijanu materije, koji se iz običnog $\mathcal{L}_M$ dobija zamenom $\eta^{\mu\nu} \to \tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - 2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}$ i $\partial_\mu \to D_\mu =$ (kovarijantni izvod sa odgovarajućom Kristofelovom koneksijom).

> *Gravitaciono polje se uvodi u dejstvo materije preko minimalne interakcije, pri čemu je ispunjen princip ekvivalencije.*

Geometrijska interpretacija Ajnštajnove teorije se pokazuje kao posledica konzistentnog uvodjenja nelinearne interakcije.

Završimo ovaj odeljak još jednim komentarom o tome zašto smo u formalizmu prvog reda dobili konzistentnu teoriju u jednom koraku. Kvalitativno, male izmene lagranžijana prvog reda dovode do značajnih promena u teoriji, jer menjaju kako jednačinu koja sledi variranjem po $\bar{\varphi}^{\mu\nu}$, tako i zavisnost $\Gamma = \Gamma(\varphi)$; tako postaje moguće da se u jednom koraku uvedu kompletni nelinearni efekti u teoriju.

ZADACI

1. Data je globalno SU(2) invarijantna teorija,

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\tfrac{1}{4}\mathring{F}^a{}_{\mu\nu}\mathring{F}^{a\mu\nu} + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^a - m^2\phi^a\phi^a) - gA^a\cdot J^a_{(0)}\,,$$

gde polje materije ϕ^a pripada tripletnoj SU(2) reprezentaciji, a $J^b_{(0)}$ je kanonska struja materije, $J^{b\mu}_{(0)} = -\epsilon^{bca}\phi^c\partial^\mu\phi^a$. Konstruisati odgovarajuću konzistentnu (nelinearnu) teoriju.

2. Konzistentno dejstvo zasnovano na lagranžijanu (8.2) ima oblik $I = I_F + I_{MI}$. *a*) Dokazati da struja materije J^μ_a zadovoljava relaciju $\partial_\nu J^\nu_a - g\epsilon_{abc}A^b{}_\nu J^\nu_c = 0$. Zatim, uz pomoć jednačina kretanja za A^a, izvesti uslov

$$\partial_\nu\frac{\delta I_F}{\delta A^a_\nu} - g\epsilon_{abc}A^b_\nu\frac{\delta I_F}{\delta A^c_\nu} = 0\,.$$

b) Pokazati da ovaj uslov označava invarijantnost dajstva I_F u odnosu na lokalne SU(2) transformacije.

3. Naći simetričan TEI $t^{(0)}_{\mu\nu}$ gravitacionog polja, polazeći od lagranžijana $\mathcal{L}_T$. Pokazati da prva popravka $\Lambda^{(1)}$ lagranžijana tenzorske teorije gravitacije, data jednačinom (8.26), zadovoljava uslov $-\delta\Lambda/\delta\varphi^{\mu\nu} = t^{(0)}_{\mu\nu}$.

4. U tenzorskoj teoriji gravitacije materija je opisana lagranžijanom skalarnog polja, $\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$. Da li u tom slučaju TEI materije $T^{\mu\nu}_{(0)}$ zadovoljava uslov divergencije (8.29)?

5. Pokazati da uslov divergencije (8.29), izražen preko pravog tenzora $T^{\mu\nu} = \widetilde{T}^{\mu\nu}/\sqrt{-g}$, ima oblik kovarijantnog zakona očuvanja:

$$D_\mu T^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu T^{\mu\nu} + \left\{{}^{\,\mu}_{\rho\mu}\right\}T^{\rho\nu} + \left\{{}^{\,\nu}_{\rho\tau}\right\}T^{\rho\tau} = 0\,.$$

6. Izvesti zakon transformacije determinante $g = \det(g_{\mu\nu})$ u odnosu na transformacije (8.32). Zatim pokazati da je veličina $\int d^4x\sqrt{-g}\,\sigma(x)$, gde je $\sigma(x)$ skalar, invarijantna u odnosu na beskonačno male koordinate transformacije (8.41).
7. Dokazati da je dejstvo relativističke čestice I_{MI}, dato jednačinom (8.42), invarijantno u odnosu na uopštene lokalne transformacije (8.41).
8. Dokazati relaciju
$$\bar{t}_{\mu\nu} \equiv t_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}t = 2\frac{\delta\mathcal{L}(\gamma)}{\delta\tilde{\gamma}^{\mu\nu}}\bigg|_{\gamma=\eta} .$$
9. Koristeći relaciju $\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - 2\lambda\bar{\varphi}^{\mu\nu}$, pokazati da je u slučaju slabog gravitacionog polja ispunjen uslov $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda\varphi_{\mu\nu}$.
10. Izvesti izraz (8.50) za Rosenfeldov TEI gravitacionog polja.
11. Pokazati da jednačina kretanja za Γ, koja sledi iz dejstva $I_T^{(1)}$, ima oblik
$$2\tilde{g}^{(\mu\rho}\Gamma^{\nu)}_{\lambda\rho} - \tilde{g}^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \tilde{g}^{\rho\sigma}\Gamma^{(\mu}_{\rho\sigma}\delta^{\nu)}_{\lambda} - \tilde{g}^{\mu\nu}{}_{,\lambda} - \tilde{g}^{(\mu\rho}{}_{,\rho}\delta^{\nu)}_{\lambda} = 0\,.$$
Odavde izvesti relaciju $\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{,\lambda} = \tilde{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\lambda} - 2\tilde{g}^{(\mu\rho}\Gamma^{\nu)}_{\lambda\rho}$, i rešiti je po Γ.
12. Konstruisati konzistentnu tenzorsku teoriju gravitacije polazeći od lagranžijana $\mathcal{L}_T(\gamma)$ u kome je $\bar{\varphi}^{\mu\nu}$ tenzor, a ne tenzorska gustina.

GLAVA IX

SUPERSIMETRIJA I SUPERGRAVITACIJA

Ideja o jedinstvenoj prirodi svih čestica i njihovih osnovnih interakcija vodi poreklo od Maksvelovog ujedinjenja elektriciteta i magnetizma, i ranih pokušaja ujedinjenja gravitacione i elektromagnetne interakcije, da bi se u novije vreme iskazala u uspešnoj izgradnji jedinstvene teorije elektromagnetnih i slabih, a u izvesnoj meri i jakih interakcija. Jedan od centralnih problema u poslednjih tridesetak godina je ujedinjenje gravitacije sa drugim osnovnim interakcijama u okviru konzistentne kvantne teorije.

Struktura prostor–vremena na niskim energijama je sa velikom tačnošću odredjena Poenkareovom grupom simetrije. Šezdesetih godina u fizici čestica vladalo je uverenje da se *ujedinjenje* osnovnih interakcija može ostvariti preko simetrije koja na netrivijalan način ujedinjuje relativizam i unutrašnje simetrije [izospin, SU(3), itd.]. U realizaciji te ideje bilo je uobičajeno raditi sa Lijevim grupama u kojima multipleti čestica imaju istu statistiku — sve čestice u multipletu su ili bozoni, ili fermioni. Mnogi takvi pokušaju su završeni neuspehom, dok najzad nije postalo jasno da je postavljeni cilj neostvariv u okviru standardnih Lijevih grupa simetrije.

Supersimetrija je simetrija koja *povezuje bozone i fermione*, i to na način koji je u skladu sa osnovnim principima kvantne teorije. Ona se karakteriše kako komutacionim tako i *antikomutacionim* relacijama izmedju generatora, i ne predstavlja standardnu Lijevu grupu. Rezultati dobijeni sedamdesetih godina su pokazali da je u okviru supersimetrije moguće ostvariti ideju netrivijalnog ujedinjenja prostorno–vremenske i unutrašnje simetrije u relativističkoj teoriji polja. Već rana ispitivanja kvantnih karakteristika supersimetričnih (SS) teorija dovela su do impresivnih rezultata: neki dugo poznati i problematični divergentni doprinosi, koji potiču od bozona i fermiona, medjusobno su se "skraćivali" upravo zahvaljujući supersimetriji.

Pošto je ideja lokalne simetrije postala osnova našeg razumevanja interakcija elementarnih čestica, bilo je prirodno podići ideju supersimetrije na nivo lokalne simetrije, čime je u svet supersimetrije uvedena i gravitacija.

Rezultati dobijeni ispitivanjem teorija sa globalnom supersimetrijom budili su nadu da će supergravitacija biti konzistentna kvantna teorija gravitacije. Pokazalo se, zaista, da su kvantne osobine supergravitacije mnogo bolje nego što je to slučaj sa Ajnštajnovom teorijom. U kojoj će meri biti moguće ove rezultate dovesti do potpuno uspešne realizacije kvantne teorije gravitacije, ostaje tek da se vidi.

U ovoj glavi biće izložene osnovne ideje supersimetrije i supergravitacije. Tehnički dodatak J je neodvojiv deo ovog materijala.

1. SUPERSIMETRIJA

1.1 Fermi–Bozeova simetrija

Posmatrajmo teoriju u kojoj postoji simetrija izmedju bozona i fermiona, pri kojoj bozonsko i fermionsko polje "rotiraju" jedno u drugo za "ugao" ε (van Nieuwenhuizen, 1981 ; Sohnius, 1985; West, 1986; Srivastava, 1986; Bailin i Alexander, 1994). Transformacija bozona u fermione, ako je linearna, mora imati oblik[†]

$$\delta A(x) = \varepsilon\psi(x)\,,$$

gde su, za sada, svi indeksi zanemareni. Iz ove relacije sledi nekoliko interesantnih posledica.

— *Spin.* Pošto bozoni imaju celobrojan, a fermioni polucelobrojan spin, parametar ε mora imati *polucelobrojan* spin. Najjednostavniji izbor je $s=\frac{1}{2}$; pretpostavićemo da je $\varepsilon=(\varepsilon_\alpha)$ Dirakov četvorokomponentni spinor.

— *Statistika.* U kvantnoj teoriji polja bozoni su komutirajući objekti, a fermioni antikomutirajući, po teoremi o vezi spina i statistike. Da bi se pojednostavilo razmatranje kvantne teorije, smatraćemo da su iste osobine ispunjene i u klasičnoj teoriji, koja je predmet našeg izlaganja. Zato će parametri ε, kao i fermionska polja, biti *antikomutirajuće* veličine, dok će bozonska polja biti *komutirajuće*:

$$\{\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta\}=\{\varepsilon_\alpha,\psi_\beta\}=\{\psi_\alpha,\psi_\beta\}=0\,,\qquad [\varepsilon_\alpha,A]=[\psi_\beta,A]=0\,.$$

— *Dimenzije.* Kanonske dimenzije bozonskih i fermionskih polja u jedinicama mase imaju vrednosti $d(A)=1$, $d(\psi)=3/2$, što sledi iz uslova

veličina:	I	d^4x	$\partial/\partial x^\mu$	A	ψ	ε
dimenzija:	0	-4	1	1	$3/2$	$-1/2$

da je dimenzija dejstva nula. Iz zakona transformacije bozonskog polja A se dobija $d(\varepsilon)=-1/2$. Zakon transformacije fermiona ne može biti $\delta\psi\sim\varepsilon A$,

[†] U ovoj glavi će, zbog jednostavnosti, uobičajena oznaka za varijaciju forme δ_0 biti zamenjena sa δ.

jer bi se dimenzije leve i desne strane razlikovale za 1. Ako zahtevamo da transformacije ne zavise od mase ili dimenzione konstante interakcije, ovo neslaganje se može ispraviti jedino ubacivanjem izvoda ∂_μ sa desne strane. Tako, na osnovu čisto *dimenzionih argumenata*, dolazimo do relacije

$$\delta\psi(x) = \varepsilon\partial_\mu A(x)\,.$$

— *Realnost.* Ako se ograničimo na jednostavan slučaj i pretpostavimo da su bozoni realni skalari, a fermioni Majorana–spinori, onda iz uslova realnosti za δA sledi da i ε mora biti Majorana–spinor.

Na osnovu prethodnih razmatranja, i vodeći računa o svim indeksima, zakoni transformacije se mogu napisati u kompletno kovarijantnom obliku kao

$$\begin{aligned}\delta A &= \bar\varepsilon^\alpha\psi_\alpha\,,\\ \delta\psi_\alpha &= -i(\gamma^\mu\varepsilon)_\alpha\partial_\mu A\,.\end{aligned}$$

— *Algebra.* Da bi posmatrane transformacije predstavljale grupu simetrije, potrebno je da imaju odredjenu algebarsku strukturu. Obratimo pažnju na komutator dve beskonačno male SS transformacije na polju A. On ima oblik

$$[\delta(\varepsilon_1),\delta(\varepsilon_2)]A = 2i\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu A\,,$$

koji se dobija posle korišćenja identiteta $\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2 = -\bar\varepsilon_2\gamma^\mu\varepsilon_1$. Tako zaključujemo da odredjena kombinacija dve SS transformacije dovodi do *translacije u prostor–vremenu* s parametrom $2i\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2$. Komutator dve supersimetrije na ψ nema takav oblik, što odražava činjenicu da je pored A potrebno uvesti u razmatranje i druga skalarna polja, kao što će se videti kasnije.

— *Stepeni slobode.* Bezmaseni Majorana–spinor ψ, koji zadovoljava jednu kompleksnu jednačinu kretanja, ima dva dinamička stepena slobode, pa se može očekivati da je u tom slučaju za realizaciju supersimetrije potrebno imati isti broj bozonskih komponenti polja — dva realna bozonska polja.

Jednostavan model. Jednostavan primer SS teorije u M_4 je Ves–Zuminov model. Osnovna polja su Majorana–spinor ψ_α, i dva bozonska poja, skalar A i pseudoskalar B. Ako su sva polja bezmasena, i ako nema interakcije, dejstvo je oblika

$$I_0 = \int d^4x\big[\tfrac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A + \tfrac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B + \tfrac{1}{2}i\bar\psi\gamma\cdot\partial\psi\big]\,. \tag{9.1}$$

Na osnovu linearnosti, kovarijantnosti, dimenzija i parnosti dolazi se do sledećeg skupa SS transformacija:

$$\begin{aligned}&\delta A = \bar\varepsilon\psi\,, \qquad \delta B = \bar\varepsilon\gamma_5\psi\,,\\ &\delta\psi = -i\gamma^\mu\partial_\mu(aA + b\gamma_5 B)\varepsilon\,,\end{aligned} \tag{9.2a}$$

gde su a i b bezdimenzioni parametri, a ε Majorana–spinor. Lako se proverava da su ove transformacije simetrija jednačina kretanja

$$\Box A = 0\,, \qquad \Box B = 0\,, \qquad i\gamma\cdot\partial\psi = 0\,.$$

Variranje dejstva uz odbacivanje divergencije daje

$$\delta I_0 = \int d^4x\big[\partial_\mu A\partial^\mu(\bar\varepsilon\psi) + \partial_\mu B\partial^\mu(\bar\varepsilon\gamma_5\psi) + \bar\psi\Box(aA + b\gamma_5 B)\varepsilon\big]\,,$$

iz čega sledi invarijantnost pri $a = b = 1$. Prema tome, konačan oblik SS transformacija je

$$\begin{aligned} &\delta A = \bar\varepsilon\psi\,, \qquad \delta B = \bar\varepsilon\gamma_5\psi\,, \\ &\delta\psi = -i\gamma\cdot\partial(A + \gamma_5 B)\varepsilon\,, \qquad \big[\ \delta\bar\psi = i\bar\varepsilon\gamma^\mu\partial_\mu(A - \gamma_5 B)\ \big]\,. \end{aligned} \tag{9.2b}$$

Komutator dve SS transformacije, sa parametrima ε_1 i ε_2, na poljima A, B i ψ ima oblik

$$\begin{aligned} [\delta_1,\delta_2]A &= 2i\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu A\,, \\ [\delta_1,\delta_2]B &= 2i\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu B\,, \\ [\delta_1,\delta_2]\psi &= 2i\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\psi - \bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2\gamma_\mu F_{\bar\psi}\,, \end{aligned} \tag{9.3}$$

gde je $F_{\bar\psi} \equiv i\gamma\cdot\partial\psi$ jednačina kretanja slobodnog fermionskog polja. Pri dobijanju ovih komutatora koristi se Fircov identitet

$$(\bar\varepsilon_2\psi)(\bar\chi\varepsilon_1) + (\bar\varepsilon_2\gamma_5\psi)(\bar\chi\gamma_5\varepsilon_1) - (\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2) = -(\bar\varepsilon_2\gamma_\mu\varepsilon_1)(\bar\chi\gamma^\mu\psi)\,.$$

Invarijantnost dejstva je dobijena bez korišćenja jednačina kretanja, dok se SS algebra na poljima A, B i ψ zatvara tek uz korišćenje ovih jednačina. Ovo je osobina posmatrane formulacije Ves–Zuminovog modela koja se može prevazići uvodjenjem u teoriju dodatnih, pomoćnih polja. Uzrok ove pojave, kao što ćemo videti, nalazi se u činjenici da je broj bozonskih i fermionskih stepeni slobode jednak samo na jednačinama kretanja.

Postoji jedna reformulacija posmatranog modela koja se zasniva na činjenici da se kinetički član za bezmaseni Majorana–spinor može izraziti preko njegove leve (ili desne) kiralne komponente. To sledi iz relacije

$$\bar\psi\gamma\cdot\partial\psi = \bar\psi_-\gamma\cdot\partial\psi_- + \bar\psi_+\gamma\cdot\partial\psi_+ = 2\bar\psi_-\gamma\cdot\partial\psi_- - \partial\cdot(\bar\psi_-\gamma\psi_-)\,,$$

gde smo u zadnjem koraku iskoristili $\bar\psi_+\gamma\cdot\partial\psi_+ = -(\partial\bar\psi_-)\cdot\gamma\psi_-$. Uvodeći kompleksno polje $\mathcal{A} = A + iB$, dejstvo (9.1) se može napisati kao

$$I_0' = \int d^4x\big[\tfrac12\partial_\mu\mathcal{A}^*\partial^\mu\mathcal{A} + i\bar\psi_-\gamma\cdot\partial\psi_-\big]\,, \tag{9.4a}$$

dok SS transformacije (9.2b) prelaze u

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \bar\varepsilon(1+i\gamma_5)\psi = 2\bar\varepsilon_+\psi_-\,, \\ \delta\psi_- &= P_-\delta\psi = -i\gamma^\mu\varepsilon_+\partial_\mu\mathcal{A}\,, \end{aligned} \tag{9.4b}$$

gde je $P_- \equiv \frac{1}{2}(1+i\gamma_5)$ kiralni projektor. Izraz za $\delta\psi_-$ dobijen je koristeći $P_-\gamma\cdot\partial(A+\gamma_5 B) = \gamma\cdot\partial\mathcal{A}P_+$. Pokušaj da se broj bozona smanji na jedan, stavljajući npr. $B=0$, nije konzistentan, jer bi tada polje $\mathcal{A}$ postalo realno, dok bi izraz za $\delta\mathcal{A}$ ostao kompleksan ($\bar\varepsilon_+\psi_-$ nije realna veličina). Tako vidimo da je za realizovanje beskonačno malih transformacija supersimetrije dovoljno imati bezmaseni dublet $(A+iB,\psi_-)$ sa helicitetima $(0,\frac{1}{2})$. Na sličan način se izvodi zaključak i o dubletu $(A-iB,\psi_+)$. Model (9.1) sadrži oba ova dubleta istovremeno. Oni predstavljaju ireducibilne reprezentacije jedne nove vrste algebre — *superalgebre*.

Napomenimo da dejstvo (9.1), osim invarijantnosti u odnosu na supersimetriju, ima i dve nezavisne globalne unutrašnje simetrije — kiralnu i običnu faznu simetriju:

$$\psi \to e^{\alpha\gamma_5}\psi\,, \qquad \mathcal{A} \to e^{-i\beta}\mathcal{A}\,. \tag{9.5}$$

Super–Poenkareova algebra. Transformacije polja (9.2) se mogu izraziti pomoću generatora SS transformacija Q,

$$\delta = \bar\varepsilon^\alpha Q_\alpha\,,$$

gde je Q, kao i parametar ε, Majorana–spinor, koji na polja A,B i ψ deluje po pravilu

$$\begin{aligned} &Q_\alpha(A) = \psi_\alpha\,, \qquad Q_\alpha(B) = \gamma_5\psi_\alpha\,, \\ &Q_\alpha(\psi_\beta) = -i[\gamma\cdot\partial(A+\gamma_5 B)C]_{\beta\alpha}\,. \end{aligned}$$

Izraz $Q(\phi)$, koji označava rezultat delovanja operatora Q na polje ϕ, može se ekvivalentno predstaviti i kao komutator $[Q,\phi]$. Ako u algebri (9.3) *zanemarimo* član koji je proporcionalan *jednačini kretanja*, ona se može napisati u opštem obliku

$$[\delta_1,\delta_2] = 2i\bar\varepsilon_1\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\,.$$

S druge strane, leva strana gornje relacije može se izraziti pomoću SS generatora kao $[\delta_1,\delta_2] = -\bar\varepsilon_1^\alpha\bar\varepsilon_2^\beta\{Q_\alpha,Q_\beta\}$, odakle sledi

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\} = 2i(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu\,, \tag{9.6a}$$

gde je $P_\mu = -\partial_\mu$. Generatori Q_α, zajedno sa generatorima Poenkareove grupe P_μ i $M_{\mu\nu}$, obrazuju super–Poenkareovu algebru. Iz činjenice da je

Q_α konstantan Dirakov spinor, sledi njegov zakon transformacije u odnosu na Lorencove transformacije i translacije:

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta\,, \qquad [P_\mu, Q_\alpha] = 0\,, \tag{9.6b,c}$$

gde su $\sigma_{\mu\nu}$ generatori Lorencove grupe u odgovarajućoj reprezentaciji.

Relacije $(9.6a,b,c)$, zajedno sa komutacionim relacijama Poenkareove grupe, izražavaju supersimetriju Ves–Zuminovog modela na jeziku algebre, koja se naziva super–Poenkareova algebra i ima oblik:

$$\begin{aligned}
&[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = \tfrac{1}{2} f_{\mu\nu,\lambda\rho}{}^{\tau\sigma} M_{\tau\sigma}\,, && \\
&[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = \eta_{\nu\lambda} P_\mu - \eta_{\mu\lambda} P_\nu\,, && [P_\mu, P_\nu] = 0\,, \\
&[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta\,, && [P_\mu, Q_\alpha] = 0\,, \\
&\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2i(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu && \{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = -2i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu\,.
\end{aligned} \tag{9.7a}$$

Pošto je Q_α Majorana–spinor, izraz $\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\}$ nije nezavisan od $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$, ali je naveden zbog kompletnosti.

Nije teško videti da se ova algebra ne menja pri kiralnim transformacijama $Q \to e^{\alpha\gamma_5} Q$. Invarijantnost antikomutatora $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ sledi iz $\gamma_5(\gamma^\mu C) + (\gamma^\mu C)\gamma_5^T = 0$. Super–Poenkareova algebra se može proširiti dodavanjem kiralnog generatora R koji zadovoljava uslov

$$[R, Q_\alpha] = (\gamma_5 Q)_\alpha\,, \tag{9.7b}$$

dok sa P i M komutira.

Relacija $(9.6a)$ je osnovna relacija SS algebre. Iz nje se jasno vidi da je supersimetrija prostorno–vemenska simetrija, i da predstavlja "kvadratni koren" iz translacije ($Q^2 \sim P$). Takodje je jasno da će posle lokalizacije supersimetrije doći i do pojave gravitacije.

1.2 Supersimetrična ekstenzija Poenkareove algebre

Kao što smo već pomenuli na početku ove glave, šezdesetih godina u fizici čestica rastao je interes za unutrašnje simetrije, kao što su SU(2), SU(3), i slične. Fizičari su pokušavali da ove simetrije spoje sa relativizmom, tj. da nadju grupu simetrije koja na *netrivijalan* način sadrži Poenkareovu i unutrašnju simetriju. Posle mnogo truda postalo je jasno da je takav spoj u relativističkoj teoriji polja nemoguć u okviru standardnih Lijevih grupa simetrije.

Kolman i Mandula su pokazali, pri dosta opštim pretpostavkama, da je svaka grupa simetrije sa bozonskim generatorima u relativističkoj teoriji polja jednaka, do na diskretnu podgrupu, *direktnom proizvodu* Poenkareove grupe i grupe unutrašnjih simetrija. Ako generatore unutrašnje simetrije označimo sa T_m, struktura direktnog proizvoda, na nivou algebre, dobija oblik

$$[T_m, P_\mu] = [T_m, M_{\mu\nu}] = 0\,,$$

tj. generatori T_m su translaciono invarijantni i Lorencovi skalari. Odavde se odmah može zaključiti da generatori T_m komutiraju sa Kazimirovim operatorima Poenkareove grupe:

$$[T_m, P^2] = 0\,, \qquad [T_m, W^2] = 0\,.$$

Drugim rečima, svi članovi jednog ireducibilnog multipleta unutrašnje grupe simetrije imaju istu masu i isti spin.

Tek uključivanje fermionskih generatora daje mogućnost netrivijalnog spajanja Poenkareove i unutrašnje simetrije.

Supersimetrična algebra. Struktura Lijeve grupe u okolini jediničnog elementa je odredjena odgovarajućom Lijevom algebrom, koja se zasniva na *komutacionim* relacijama generatora. Bitna karakteristika SS algebre je postojanje fermionskih generatora koji zadovoljavaju *antikomutacione* relacije. U Lijevoj algebri postoje Jakobijevi identiteti koji predstavljaju uslove konzistentnosti ove algebre. Slični uslovi postoje i u SS algebri. Ako sa B označimo bozonske a sa F fermionske generatore, onda SS algebra ima oblik

$$[B_1, B_2] = B\,, \qquad [B_1, F_2] = F\,, \qquad \{F_1, F_2\} = B\,, \tag{9.8a}$$

i zadovoljava uopštene Jakobijeve identitete:

$$\begin{aligned}
&[[B_1, B_2], B_3] + [[B_3, B_1], B_2] + [[B_2, B_3], B_1] = 0\,,\\
&[[B_1, B_2], F_3] + [[F_3, B_1], B_2] + [[B_2, F_3], B_1] = 0\,,\\
&\{[B_1, F_2], F_3\} + \{[F_3, B_1], F_2\} + [\{F_2, F_3\}, B_1] = 0\,,\\
&[\{F_1, F_2\}, F_3] + [\{F_3, F_1\}, F_2] + [\{F_2, F_3\}, F_1] = 0\,.
\end{aligned} \tag{9.8b}$$

Eksplicitnim ispisivanjem (anti)komutatora lako se proverava da su ove relacije identiteti.

Algebra tipa (9.8) je u matematici poznata kao Z_2 *gradirana Lijeva algebra*, i može se opisati sledećim opštim karakteristikama.

i) *Gradiranje.* Svakom generatoru se pripisuje gradiranje g iz skupa $Z_2 = (0, 1)$: $g(B) = 0$, $g(F)$=1; medju generatorima postoji pravilo kompozicije $\circ$, takvo da je $g(G_1 \circ G_2) = g(G_1) + g(G_2)$ (mod 2). Time je definisana Z_2 gradirana algebra.

ii) *Supersimetrija.* Pravilo kompozicije zadovoljava uslov supersimetrije ili gradirane antisimetrije: $G_1 \circ G_2 = -(-)^{g_1 g_2} G_2 \circ G_1$.

iii) Uopšteni Jakobijev identitet. Pravilo kompozicije zadovoljava uslove konzistentnosti:

$$(-1)^{g_1 g_3} G_1 \circ (G_2 \circ G_3) + \operatorname{cikl}(1,2,3) = 0\,.$$

Osobine i) i ii) su realizovane izborom komutatora ili antikomutatora za pravilo kompozicije u skladu sa (9.8a), dok se uopšteni Jakobijev identitet svodi na (9.8b)

Posmatrajmo sada SS ekstenziju Poenkareove algebre. Uvedimo SS generator Q_α koji je, po pretpostavci, translaciono invarijantan Dirakov spinor. Ove dve pretpostavke na jeziku algebre imaju oblik (9.6b,c). Da bismo proverili njihovu algebarsku konzistentnost, posmatrajmo razne Jakobijeve identitete. Identiteti sa (P,P,Q) i (M,P,Q) se lako dokazuju. Pri dokazu identiteta sa (M,M,Q) bitno je zapaziti činjenicu da matrice $\sigma_{\mu\nu}$ čine reprezentaciju Lorencove algebre. Zista, ako u relaciji

$$[[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}], Q_\alpha] + [[Q_\alpha, M_{\mu\nu}], M_{\lambda\rho}] + [[M_{\lambda\rho}, Q_\alpha], M_{\mu\nu}] = 0\,,$$

iskoristimo vrednosti izraza $[M,M]$ i $[M,Q]$ iz (9.7a), dobija se

$$\tfrac{1}{2} f_{\mu\nu,\lambda\rho}{}^{\sigma\tau}\, \sigma_{\sigma\tau} - [\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\rho}] = 0\,,$$

što je tačno, jer matrice $\sigma_{\mu\nu}$ zadovoljavaju istu algebru kao i $M_{\mu\nu}$.

Antikomutator dva SS generatora je u opštem slučaju jednak linearnoj kombinaciji bozonskih generatora,

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = ia(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + ib(\sigma^{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} M_{\mu\nu}\,,$$

gde je desna strana simetrična po α i β, što sledi iz osobina simetrije gama matrica, a a i b su konstante. Iz Jakobijevog identiteta za (P,Q,Q) sledi $b=0$, dok su identiteti sa (M,Q,Q) i (Q,Q,Q) automatski zadovoljeni.

Na Q_α se mogu nametnuti dodatna ograničenja. Četiri kompleksne veličine imaju osam realnih komponenti. Ako pretpostavimo da je Q_α Majorana–spinor, $\overline{Q}_\alpha$ nije nezavisan od Q_α, pa ga ne treba posebno razmatrati. Može se pokazati da ova pretpostavka u suštini ne smanjuje opštost izlaganja u posmatranom slučaju (West, 1986).

Koeficijent a je do sada ostao proizvoljan. Videćemo da uslov pozitivnosti energije daje $a > 0$, a standardni izbor $a = 2$ se postiže redefinicijom generatora P_μ. Tako dobijamo supersimetričnu ekstenziju Poenkareove algebre, istu kao u (9.7a).

U prethodnim razmatranjima smo pretpostavili da postoji samo jedan SS generator Q_α, tj. da unutrašnja simetrija nije prisutna. Ako postoji, ona se lako uklapa u prethodnu analizu. Posmatrajmo generatore Q^m_α $(m = 1,2,...,N)$ koji pripadaju nekoj ireducibilnoj reprezentaciji unutrašnje grupe simetrije sa generatorima T_m:

$$\begin{aligned} &[T_m, T_n] = f_{mn}{}^k T_k\,, && [T_m, Q^n_\alpha] = t_m{}^n{}_k Q^k_\alpha\,, \\ &[M_{\mu\nu}, T_m] = 0\,, && [P_\mu, T_m] = 0\,. \end{aligned} \tag{9.9a}$$

Tada razmatranja slična prethodnim dovode do sledećeg rezultata:

$$\{Q^m_\alpha, Q^n_\beta\} = 2\delta^{mn}(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu + C_{\alpha\beta}Z_1^{mn} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta}Z_2^{mn}\,, \tag{9.9b}$$

gde antisimetrične veličine Z_1^{mn} i Z_2^{mn} komutiraju sa svim generatorima, i predstavljaju tzv. *centralne naboje* algebre.

Ako postoji samo jedan SS generator Q_α, reč je o *prostoj supersimetriji*, dok slučaj $N > 1$ opisuje *raširenu supersimetriju*. I u slučaju proste supersimetrije može postojati netrivijalna unutrašnja simetrija, ali samo tipa $U(1)$: to je tzv. kiralna simetrija, izražena jednačinom (9.7b).

Prethodno izlaganje predstavlja razmatranje mogućih superalgebri nad Poenkareovom algebrom kao prostorno–vremenskom simetrijom. U slučaju kad su sve mase jednake nuli, Poenkareova simetrija prelazi u konformnu, a odgovarajuća SS ekstenzija se naziva konformna supersimetrija.

Neke posledice. Navedimo nekoliko jednostavnih i direktnih posledica SS algebre, koje imaju značajne fizičke posledice.

— *Mase multipleta.* Iz relacije $[P_\mu, Q_\alpha] = 0$ sledi $[P^2, Q_\alpha] = 0$, pa je P^2 Kazimirov operator superalgebre.

Sve čestice u ireducibilnoj reprezentaciji SS algebre imaju istu masu.

Eksperimenti ne pokazuju da, uz obične čestice, postoje i njihovi super–partneri različitog spina i iste mase. Prema tome, ako supersimetrija ima značaja u prirodi, ona mora biti realizovana kao narušena simetrija.

— *Pozitivnost energije.* Iz relacije $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = ia(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu$ i činjenice da je Q_α Majorana–spinor lako se dobija

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = -ia(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu\,.$$

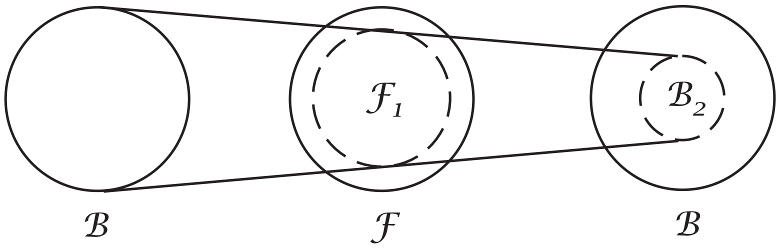
Zamenjujući u ovoj relaciji P_μ sa $i(E, -\boldsymbol{p})$ (po našoj konvenciji, u unitarnim reprezentacijama generatori su antihermitski), množeći je sa γ^0, i uzimajući trag po spinorskim indeksima, dobija se

$$\sum(Q_\alpha Q_\alpha^+ + Q_\alpha^+ Q_\alpha) = 4aE\,.$$

Ako je prostor u kome deluju SS operatori pozitivno definitan, onda je leva strana gornje jednakosti uvek ≥ 0, pa u slučaju $a > 0$ vredi sledeći iskaz:

U supersimetričnim teorijama vrednosti energije ne mogu biti negativne: $E \geq 0$.

— *Balans fermiona i bozona.* Videli smo da se SS teorije mogu realizovati na skupu polja od kojih svako ima odredjenu masu i spin. Kao što četvorovektor u^μ predstavlja ireducibilnu reprezentaciju Lorencove grupe koja sadrži dve ireducibilne reprezentacije rotacione podgrupe, skalar u^0 i



Slika 9.1 Preslikavanja i dimenzije bozonskog i fermionskog potprostora

vektor $\boldsymbol{u}$, tako ireducibilna reprezentacija SS algebre sadrži više ireducibilnih reprezentacija Poenkareove podgrupe. Relacija (9.6a) omogućava formulisanje korisnog iskaza, koji se odnosi na broj bozonskih i fermionskih stepeni slobode u svakoj ireducibilnoj reprezentaciji superalgebre.

Pošto SS transformacije povezuju bozone u fermione, jasno je da se skup vektora svake reprezentacije može podeliti na bozonski i fermionski podskup, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{F}$. Bozonski generatori preslikavaju svaki od ovih podskupova u samog sebe, dok fermionski generatori preslikavaju $\mathcal{B}$ u $\mathcal{F}$, i obratno. Ova preslikavanja su u opštem slučaju preslikavanja u (a ne na). Posmatrajmo delovanje kompozicije dva SS generatora na bozonski podskup $\mathcal{B}$:

$$Q_\alpha : \ \mathcal{B} \to \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}\,, \qquad Q_\beta : \ \mathcal{F}_1 \to \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}\,.$$

Sličan efekat ima i komutator $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$. Ako je preslikavanje $P_\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tipa na (kao i 1–1), onda se iz relacije (9.6a) vidi da takvo mora biti i preslikavanje $\{Q_\alpha, Q_\beta\} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, iz čega sledi $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$. Na sličan način, posmatranjem analognog preslikavanja $\mathcal{F} \to \mathcal{B} \to \mathcal{F}$ može se zaključiti da je $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$. Drugim rečima, skupovi $\mathcal{B}$ i $\mathcal{F}$ imaju isti broj elemenata, a preslikavanje Q_α je na (i 1–1).

Šta tačno znači pojam "broj elemenata" date reprezentacije, ostaje da se vidi u preciznijim razmatranjima. U slučaju konačnodimenzionih reprezentacija broj elemenata je odredjen brojem realnih komponenti polja (brojem stepeni slobode), što se moglo i očekivati. Iz kasnijeg izlaganja postaće jasno da se ovaj broj može računati sa ili bez korišćenja jednačina kretanja. Prema tome, za široku klasu reprezentacija, koje se karakterišu uslovom da je preslikavanje P_μ na (i 1–1), vredi sledeći iskaz:

Broj fermionskih i bozonskih stepeni slobode u prostoru reprezentacije supersimetrične algebre je jednak.

Postoje neki slučajevi kada uslovi ove teoreme nisu zadovoljeni, ali ih ovde nećemo razmatrati (Sohnius, 1985).

1.3 Slobodni Ves–Zuminov model

Uz pomoć prethodne teoreme postaje jasno da polja A, B i ψ u Ves–Zuminovom modelu ne mogu nositi reprezentaciju supersimetrije bez korišćenja jednačina kretanja, jer tada ne zadovoljavaju pravilo jednakog broja bozona i fermiona. Zaista, ako ne koristimo jednačine kretanja, broj realnih bozonskih komponenti je 2, dok Majorana–spinor ima 2 kompleksne ili 4 realne komponente.

Ako želimo da prevazidjemo ovu situaciju, kao prirodno rešenje se nameće uvodjenje dva dodatna bozonska polja, da bi se uspostavio balans bozona i fermiona. Ova dva bozona ne smeju davati doprinos broju stepeni slobode na jednačinama kretanja, jer tamo balans bozona i fermiona već postoji (2 bozona i 2 fermiona). To znači da dodatni bozoni moraju biti *pomoćna polja*, tj. da se rešavanjem jednačina kretanja mogu izraziti preko drugih polja. Uzimajući u obzir da je slobodna teorija zadata kvadratičnim lagranžijanom, zaključujemo da doprinos pomoćnih polja F i G mora biti oblika $F^2 + G^2$, odakle sledi da je njihova dimenzija (u jedinicama mase) jednaka *dva*.

Na osnovu dimenzionih argumenata sledi da su SS transformacije novih polja oblika

$$\delta F = -i\bar{\varepsilon}\gamma\cdot\partial\psi\,, \qquad \delta G = -i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma\cdot\partial\psi\,,$$

gde smo pretpostavili da je F skalar a G pseudoskalar. Na isti način zaključujemo da se polja F i G ne mogu pojaviti u δA i δB, ali se njihov doprinos u $\delta\psi$ pojavljuje u obliku

$$\delta\psi = (\delta\psi)_0 + (aF + b\gamma_5 G)\varepsilon\,,$$

gde $(\delta\psi)_0$ označava ranije dobijeni rezultat (9.2*b*). Modifikacija je takva da se posle korišćenja jednačina kretanja pomoćnih polja $F = G = 0$ dobija stari izraz (9.2*b*).

Ako je $a = b = 1$ nove transformacije predstavljaju realizaciju SS algebre, a njihov kompletan oblik glasi:

$$\begin{aligned}
&\delta A = \bar{\varepsilon}\psi\,, \qquad \delta B = \bar{\varepsilon}\gamma_5\psi\,, \\
&\delta\psi = -i\gamma\cdot\partial(A + \gamma_5 B)\varepsilon + (F + \gamma_5 G)\varepsilon\,, \\
&\delta F = -i\bar{\varepsilon}\gamma\cdot\partial\psi\,, \qquad \delta G = -i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma\cdot\partial\psi\,.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Dejstvo invarijantno u odnosu na ove transformacije ima oblik

$$I^0_{VZ} = \int d^4x \big[\tfrac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A + \tfrac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B + \tfrac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi + \tfrac{1}{2}(F^2 + G^2)\big]\,. \tag{9.11}$$

Prethodni postupak je karakterističan za konstrukciju slobodnih SS teorija. Multiplet polja (A, B, ψ_α), od kojih smo krenuli, čini jednu reprezentaciju SS algebre na jednačinama kretanja. Od njih je konstruisano dejstvo (9.1) koje je invarijantno u odnosu na SS transformacije bez korišćenja jednačina kretanja, i ne sadrži pomoćna polja. U sledećem koraku su nadjena pomoćna polja F i G koja osiguravaju zatvaranje algebre bez korišćenja jednačina kretanja. Posle toga je konstruisano novo invarijantno dejstvo (9.11).

Prva dva koraka su standardna, jer je, kao što ćemo videti, postupak nalaženja reprezentacija SS algebre na jednačinama kretanja sistematski rešen. Treći korak, u kome se nalaze pomoćna polja, najkritičniji je, jer ne postoji opšte uputstvo kako ga uspešno realizovati. Razlog se nalazi u činjenici što se broj stepeni slobode polja, pri ukidanju važenja jednačina kretanja, menja na komplikovan način, pa uspostavljanje balansa bozona i fermiona, uvodjenjem pomoćnih polja, nije lako kontrolisati. Za mnoge SS teorije problem nalaženja pomoćnih polja nije rešen.

Situacija postaje još komplikovanija pri konstrukciji interagujućih teorija, koje su fizički jedine relevantne. Interakcija se najčešće izgradjuje pomoću nekih dodatnih principa, kao što je zahtev da postoji neka lokalna simetrija, unutrašnja ili prostorno–vremenska.

Zbog velikih teškoća koje prate pokušaje uvodjenja pomoćnih polja, prirodno je postaviti pitanje da li su ona zaista neophodna. Videli smo da se bez njih SS algebra zatvara samo na klasičnim jednačinama kretanja. U takvoj situaciji mogu nastati problemi pri razmatranju kvantne teorije, u kojoj su važne sve konfiguracije polja, uključujući i one van klasičnih jednačina kretanja. Pojava novih metoda kvantizacije, kao što je uopšteni BRST pristup, pokazuje da se kvantna teorija može uspešno formulisati i kad algebra nije zatvorena. Ipak, ostaje činjenica da je kvantizacija teorija sa zatvorenom algebrom jednostavnija.

Sa ili bez pomoćnih polja, SS teorije se karakterišu simetrijom čiji generatori zadovoljavaju odredjenu algebru. Ova činjenica ima veoma važnu ulogu pri izgradnji odgovarajuće interagujuće teorije. Kao ilustraciju ovog iskaza posmatraćemo jednostavan model, zasnovan na realnom skalarnom polju A i Majorana–spinoru ψ,

$$I = \int d^4x \big(\tfrac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A + \tfrac{1}{2} i\bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi \big) \,,$$

koji ima simetriju $\delta A = \bar{\varepsilon}\psi$, $\delta\psi = -i\gamma\cdot\partial\psi$. I pored izvesne sličnosti sa Ves–Zuminovim modelom, ova simetrija nema ništa zajedničko sa supersimetrijom, što se može videti iz sledećih činjenica: *a*) algebra beskonačno malih transformacija se ne zatvara, bez obzira na jednačine kretanja, i *b*) ne postoji balans bozona i fermiona koji je neophodan za reprezentacije SS algebre. Nasuprot Ves–Zuminovom modelu, ovaj model se ne može uopštiti uvodjenjem interakcije, a da se pritom očuva postojeća simetrija. Za bogatu strukturu SS teorija od velikog je značaja postojanje SS algebre.

Obratimo pažnju, sada, na realizaciju kiralnih ili R transformacija (9.7b) u Ves–Zuminovom modelu. Uvodeći polja $\mathcal{A} = A + iB$ i $\mathcal{F} = F - iG$, SS transformacije (9.10) dobijaju oblik

$$\begin{aligned} &\delta\mathcal{A} = 2\bar\varepsilon\psi_- \,, \qquad \delta\mathcal{F} = -2i\bar\varepsilon\gamma\cdot\partial\psi_- \,, \\ &\delta\psi_- = -i\gamma\varepsilon_+\cdot\partial\mathcal{A} + \mathcal{F}\varepsilon_- \,, \end{aligned}$$

koji je pogodan za analizu kiralne simetrije. Ako za polje ψ_- definišemo kiralnu transformaciju $\delta_R\psi_- = \alpha q\gamma_5\psi_- = \alpha(-iq)\psi_-$, njen oblik za druge članove multipleta se može naći pomoću (9.7b). Primenom ove relacije na $\mathcal{A}$, dobija se

$$\delta_R\delta_S\mathcal{A} - \delta_S\delta_R\mathcal{A} = \alpha\bar\varepsilon\gamma_5 Q(\mathcal{A}) = \alpha(-i)\delta_S\mathcal{A}\,.$$

Ako sa q' označimo kiralni naboj od $\mathcal{A}$, $\delta_R\mathcal{A} = \alpha(-iq')\mathcal{A}$, i iskoristimo poznavanje SS i kiralne transformacije od ψ_-, prethodna relacija postaje

$$\alpha(-iq)\delta_S\mathcal{A} - \alpha(-iq')\delta_S\mathcal{A} = \alpha(-i)\delta_S\mathcal{A}\,,$$

odakle sledi $q' = q - 1$. Na sličan način se za kiralni naboj polja $\mathcal{F}$ dobija $q'' = q + 1$. Prema tome, kiralna transformacija na multipletu $(\mathcal{A}, \psi_-, \mathcal{F})$ realizovana je kao

$$(\mathcal{A}, \psi_-, \mathcal{F}) \to (\mathcal{A}', \psi'_-, \mathcal{F}') = e^{-i(q-1)\alpha}(\mathcal{A}, \psi_- e^{-i\alpha}, \mathcal{F}e^{-2i\alpha})\,. \qquad (9.12)$$

Nova polja, dobijena kiralnim transformacijama, imaju isti oblik SS transformacija, ali sa novim parametrima: $\varepsilon' = e^{\alpha\gamma_5}\varepsilon = (e^{-i\alpha}\varepsilon_-, e^{i\alpha}\varepsilon_+)$.

1.4 Supersimetrična elektrodinamika

Pokušajmo, po analogiji sa konstrukcijom slobodnog Ves–Zuminovog modela, da ispitamo mogućnost izgradnje slobodne SS teorije zasnovane na multipletu bezmasenih polja (ψ_α, A_μ) spina $s = (\frac{1}{2}, 1)$. Na jednačinama kretanja Majorana–spinor ψ_α ima dva stepena slobode, a bezmaseni bozon A_μ tri, što nije u skladu sa pravilom balansa bozona i fermiona. Uzimajući, medjutim, u obzir da se bezmaseni bozon može opisati četvorovektorom samo ako postoji sloboda gradijentnih transformacija, bozonski broj stepeni slobode se smanjuje na dva, i pomenuto pravilo je zadovoljeno. Konstrukcija će nas dovesti do SS uopštenja slobodne elektrodinamike.

Lokalna $U(1)$ simetrija na skupu polja (ψ_α, A_μ) ima oblik

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\lambda\,, \qquad \delta\psi = 0\,.$$

Druga relacija izražava uslov neutralnosti Majorana–spinora.

Na osnovu dimenzionih argumenata i kovarijantnosti SS transformacije imaju opšti oblik

$$\begin{aligned} &\delta A_\mu = i\bar\varepsilon\gamma_\mu\psi\,, \\ &\delta\psi = (a\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + b\partial\cdot A)\varepsilon\,, \end{aligned}$$

gde su a i b konstante. U ovom slučaju posmatraćemo algebru SS transformacija i lokalne $U(1)$ simetrije. Komutator supersimetrije i lokalne transformacije na ψ ima oblik

$$[\delta(\varepsilon),\delta(\lambda)]\psi = -b(\Box\lambda)\varepsilon\,.$$

Pošto rezultat na desnoj strani nije ni supersimetrija ni lokalna transformacija, zaključujemo da mora biti $b=0$. Posle toga komutator dve SS transformacije na A_μ dobija oblik

$$\begin{aligned}[\delta_1,\delta_2]A_\mu &= ia\bar\varepsilon_2\gamma_\mu\sigma^{\lambda\rho}\varepsilon_1 F_{\lambda\rho} - (\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2) = 2ia(\bar\varepsilon_2\gamma^\nu\varepsilon_1)F_{\mu\nu}\\ &= -2ia(\bar\varepsilon_2\gamma^\nu\varepsilon_1)\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu(2ia\bar\varepsilon_2\hat A\varepsilon_1)\,.\end{aligned}$$

Prvi član predstavlja očekivanu translaciju ako je $a=1$. Pored translacije, prisutan je i drugi član koji predstavlja gradijentnu transformaciju sa parametrom $2i\bar\varepsilon_2\hat A\varepsilon_1$ koji zavisi od polja A. Komutator dve supersimetrije na ψ ima oblik

$$[\delta_1,\delta_2]\psi = 2i(\bar\varepsilon_1\gamma_\nu\partial_\mu\psi)\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_2 - (\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2)\,,$$

odakle se, posle korišćenja jednačina kretanja za ψ, dobija zatvaranje SS algebre. Tako zaključujemo da je konačan oblik posmatranih SS i lokalnih transformacija

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= i\bar\varepsilon\gamma_\mu\psi + \partial_\mu\lambda\,,\\ \delta\psi &= \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varepsilon\,.\end{aligned} \tag{9.13a}$$

Invarijantno dejstvo ima oblik

$$I_0 = \int d^4x\big(-\tfrac14 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac12 i\bar\psi\gamma\cdot\partial\psi\big)\,. \tag{9.13b}$$

Zaista,

$$\delta I_0 = \int d^4x\,\big[-F^{\mu\nu}\partial_\mu(i\bar\varepsilon\gamma_\nu\psi) - iF^{\mu\nu}\partial_\rho(\bar\psi\gamma_\rho\sigma_{\mu\nu}\varepsilon)\big] = 0\,,$$

gde smo iskoristili $\partial_\mu{}^*F^{\mu\nu}=0$.

Algebra SS transformacija je oblika

$$\begin{aligned}[\delta_1,\delta_2]A_\mu &= -2i(\bar\varepsilon_2\gamma^\nu\varepsilon_1)\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu(2i\bar\varepsilon_2\hat A\varepsilon_1)\,,\\ [\delta_1,\delta_2]\psi &= -2i(\bar\varepsilon_2\gamma^\mu\varepsilon_1)\partial_\mu\psi + -\big(\bar\varepsilon_2\sigma^{\lambda\rho}\varepsilon_1\sigma_{\lambda\rho} + \tfrac12\bar\varepsilon_2\gamma^\rho\varepsilon_1\gamma_\rho\big)F_{\bar\psi}\,.\end{aligned} \tag{9.13c}$$

Predjimo sada na nalaženje pomoćnih polja. Razmotrimo, najpre, balans bozona i fermiona bez korišćenja jednačina kretanja. Uzimajući u obzir gradijentnu simetriju, vidimo da četiri komponente A_μ odredjuju samo tri stepena slobode. S druge strane, broj stepeni slobode Majorana–spinora je četiri. Najprostije uspostavljanje balansa se postiže dodavanjem jednog bozonskog polja D. Ako je D pseudoskalar, iz dimenzionih argumenata sledi da je opšti oblik SS i lokalnih transformacija

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= i\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\psi + \partial_\mu\lambda\,, \\ \delta\psi &= (\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - a\gamma_5 D)\varepsilon\,, \\ \delta D &= i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma\cdot\partial\psi\,. \end{aligned} \tag{9.14a}$$

Zatvaranje algebre zahteva $a = 1$, a odgovarajuće invarijantno dejstvo je

$$I^0_{ED} = \int d^4x\big(-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi + \tfrac{1}{2}D^2\big)\,. \tag{9.14b}$$

2. REPREZENTACIJE SUPERSIMETRIJE

Postupak konstrukcije *slobodnih* SS teorija bez pomoćnih polja se sistematski rešava nalaženjem reprezentacija SS algebre na jednačinama kretanja, tj. nalaženjem multipleta polja (ili čestičnih stanja) na kojima se SS algebra realizuje samo ako važe klasične jednačine kretanja. Ove reprezentacije daju jasnu čestičnu sliku teorije. Poželjno je, medjutim, imati i takve multiplete supersimetrije na kojima se SS algebra realizuje nezavisno od jednačina kretanja. Tada se mogu razviti pravila računanja sa multipletima (tenzorski račun) koja omogućavaju efikasnu konstrukciju interagujućih SS teorija, i olakšavaju izgradnju *kvantne* dinamike. Naredno izlaganje je posvećeno razmatranju ove dve vrste reprezentacija super–Poenkareove simetrije (Sohnius, 1985; West, 1986; Srivastava, 1986; Müller–Kirsten i Wiedermann, 1987).

2.1 Invarijante super–Poenkareove algebre.

Ako je $m^2 > 0$, reprezentacije Poenkareove algebre se karakterišu vrednostima invarijanti P^2 i W^2,

$$W_\mu = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}M^{\nu\lambda}P^\rho\,.$$

U slučaju super–Poenkareove algebre P^2 je i dalje invarijantna veličina, i komponente polja (ili stanja) u istom supermultipletu imaju istu masu. Veličina W^2, medjutim, nije invarijanta, pa supermultiplet sadrži polja (stanja) različitog spina. Zaista,

$$\begin{aligned} [W_\mu, Q_\alpha] &= -\tfrac{1}{2}(\hat{P}\gamma_\mu\gamma_5 Q)_\alpha + \tfrac{1}{2}(\gamma_5 Q)_\alpha P_\mu\,, \\ [W^2, Q_\alpha] &= -W^\mu(\hat{P}\gamma_\mu\gamma_5 Q)_\alpha + \tfrac{3}{4}P^2 Q_\alpha\,. \end{aligned}$$

Da bismo našli SS uopštenje pojma spina, uvešćemo, najpre, aksijalni vektor $N_\mu = \frac{1}{8} i\overline{Q}\gamma_\mu\gamma_5 Q$ koji zadovoljava $[N_\mu, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}(\hat{P}\gamma_\mu\gamma_5 Q)_\alpha$. Odavde sledi da

$$X_\mu \equiv W_\mu - N_\mu = W_\mu - \tfrac{1}{8} i\overline{Q}\gamma_\mu\gamma_5 Q\,,$$

zadovoljava relaciju $[X_\mu, Q_\alpha] = \frac{1}{2}(\gamma_5 Q)_\alpha P_\mu$. Sada nije teško videti da veličina

$$C_{\mu\nu} \equiv X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu$$

komutira sa Q_α, i da je njen kvadrat $C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} = 2X^2P^2 - 2(X\cdot P)^2$ traženo uopštenje od W^2, jer komutira sa svim generatorima super–Poenkareove grupe.

Posmatrane ireducibilne reprezentacije proste ($N = 1$) super–Poenkareove algebre karakterišu se vrednostima dvaju Kazimirovih operatora: P^2 i C^2. Smisao invarijante C^2 se lako vidi u sistemu mirovanja gde je $P^\mu = i(m, 0, 0, 0)$:

$$C^2 = 2m^2\boldsymbol{X}^2\,, \qquad X^a = -imM^a - \tfrac{1}{8} i\overline{Q}\gamma^a\gamma_5 Q \equiv -imY^a\,.$$

Operator Y^a zadovoljava komutacione relacije $SO(3)$ grupe,

$$[Y^a, Y^b] = \varepsilon^{abc}Y^c\,,$$

i predstavlja SS uopštenje ugaonog momenta M^a. Njegove svojstvene vrednosti odredjuju *superspin* y:

$$\boldsymbol{Y}^2 = -y(y+1)\,, \qquad y = 0, \tfrac{1}{2}, 1, ...$$

Veličina Y^a ne komutira sa M^a, iz čega se vidi da SS multiplet sadrži više komponenti različitog spina. Eksplicitnim nalaženjem ovih multipleta saznaćemo kakav je mogući čestični sadržaj SS teorija.

Na sličan način se, u slučaju bezmasenih reprezentacija, može uvesti *superhelicitet* Λ.

Unitarne, ireducibilne reprezentacije Poenkareove grupe mogu se naći koristeći Vignerov metod male grupe (dodatak I). Postupak se sastoji u tome da se, najpre, nadje reprezentacija podgrupe Poenkareove grupe koja odgovara nekom standardnom impulsu $\overset{\circ}{p}$ (male grupe), posle čega je reprezentacija cele grupe za proizvoljan impuls p potpuno odredjena, a metod njene konstrukcije poznat. Fizička interpretacija postupka je veoma jednostavna: iz ponašanja stanja u sistemu standardnog impulsa $\overset{\circ}{p}$ opšte ponašanje se odredjuje postupkom "bustiranja" u stanje proizvoljnog impulsa p.

Opisani postupak se može uopštiti i na slučaj super–Poenkareove grupe. U narednom izlaganju nećemo razmatrati strukturu ireducibilnih reprezentacija uopšte, već samo za neki zadat, standardni impuls (pošto znamo da tako dobijena ireducibilna reprezentacija potpuno odredjuje opštu strukturu reprezentacije za proizvoljan impuls).

U razmatranju koje sledi ograničićemo se na situacije kad je centralni naboj raširene supersimetrije reprezentovan trivijalno, tj. kad iščezava. U tom slučaju deo SS algebre, koji sadrži Q_α, ima sledeći oblik u dvodimenzionoj notaciji:

$$
\begin{aligned}
&[Q_a^m, \overline{Q}_{\dot b}^n] = -2i\delta^{mn}(\sigma^\mu)_{a\dot b}P_\mu\,,\\
&[M_{\mu\nu}, Q_a^m] = -(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b Q_b^m\,, \qquad [M_{\mu\nu}, \overline{Q}_{\dot a}^m] = \overline{Q}_{\dot b}^m(\bar\sigma_{\mu\nu})^{\dot b}{}_{\dot a}\,.
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

2.2 Reprezentacije u slučaju $m^2 = 0$

Razmotrimo najpre reprezentacije SS algebre na jednočestičnim, bezmasenim *stanjima*. Ove reprezentacije su posebno interesantne, jer mnogi važni SS modeli, koji predstavljaju uopštenje neabelovih teorija ili gravitacije, sadrže čitave multiplete bezmasenih čestica. Poznavanje strukture ovih multipleta omogućava bolje razumevanje fizičkog spektra odgovarajućih modela.

Standardni impuls se može izabrati u obliku $\overset{\circ}{p}{}^\mu = \omega(1,0,0,1)$, a mala grupa sadrži generatore Q_α^m, P_μ i T_m, jer svi oni komutiraju sa P_μ i ne menjaju oblik standardnog impulsa. Uslov invarijantnosti $\overset{\circ}{p}$, u odnosu na beskonačno male Lorencove transformacije, daje ograničenja $\omega^{01} = \omega^{31}$, $\omega^{02} = \omega^{32}$, $\omega^{03} = 0$, iz čega sledi da se Lorencovi generatori pojavljuju samo u kombinacijama

$$E_1 = M_{01} + M_{31}\,, \qquad E_2 = M_{02} + M_{32}\,, \qquad M_{12}\,.$$

Komutacione relacije generatora (E_1, E_2, M_{12}) definišu grupu $E(2)$, grupu translacija i rotacija u dvodimenzionoj euklidskoj ravni. U konačnodimenzionim unitarnim reprezentacijama ove grupe, generatori E_1 i E_2 se reprezentuju trivijalno (imaju nulte svojstvene vrednosti), pa su reprezentacije Poenkareove grupe potpuno odredjene reprezentacijama generatora M_{12}. Takve reprezentacije su jednodimenzione, i za njih važi

$$M_{12}\mid\omega,\lambda\rangle = i\lambda\mid\omega,\lambda\rangle\,, \qquad W_\mu\mid\omega,\lambda\rangle = \lambda p_\mu\mid\omega,\lambda\rangle\,, \tag{9.16}$$

gde je λ helicitet stanja $\mid\omega,\lambda\rangle$, $\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, ...$ (generatori su antihermitski, pa su njihove svojstvene vrednosti u unitarnim reprezentacijama imaginarne).

Pošto M_{12} ne komutira sa Q_a, supermultiplet sadrži više stanja sa različitim λ. Delovanjem Q_a na stanje $\mid\omega,\lambda\rangle$ ne menja se njegova energija i impuls, jer je $[P_\mu, Q_\alpha] = 0$. Helicitet stanja $Q_a\mid\omega,\lambda\rangle$ se lako izračunava na osnovu

$$
\begin{aligned}
M_{12}Q_a\mid\omega,\lambda\rangle &= (Q_aM_{12} + [M_{12}, Q_a])\mid\omega,\lambda\rangle\\
&= i\big(\lambda + \tfrac{1}{2}\sigma^3\big)_a{}^b Q_b\mid\omega,\lambda\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

Zamenjujući eksplicitan oblik za σ^3, vidimo da svaki Q_1 povećava helicitet za $\frac{1}{2}$, dok ga Q_2 smanjuje. Sličan račun za $\overline{Q}_{\dot{a}}$ pokazuje da svaki $\overline{Q}_{\dot{1}}$ smanjuje, a $\overline{Q}_{\dot{2}}$ povećava helicitet za $\frac{1}{2}$ (komutatori M_{12} sa Q_a i $\overline{Q}_{\dot{a}}$ se razlikuju u znaku).

Komutatori izmedju SS generatora u sistemu standardnog impulsa, gde je $P_\mu = ip_\mu$, imaju oblik

$$\{Q^m_a, \overline{Q}^n{}_{\dot{b}}\} = 2\delta^{mn}\omega(1-\sigma^3)_{a\dot{b}} = 4\delta^{mn}\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{a\dot{b}} ,$$

iz čega sledi

$$\begin{aligned} &\{Q^m_1, \overline{Q}^n{}_{\dot{1}}\} = 0\,, \qquad \{Q^m_2, \overline{Q}^n{}_{\dot{2}}\} = 4\omega\delta^{mn}\,, \\ &\{Q,Q\} = \{\overline{Q},\overline{Q}\} = 0\,. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Ove relacije definišu *Klifordovu algebru* za operatore $\overline{Q}$ i Q. Iz prve relacije sledi

$$\langle\omega,\lambda \mid Q^m_1(Q^n_1)^* + (Q^n_1)^* Q^m_1 \mid \omega,\lambda\rangle = 0\,,$$

pa uslov pozitivne definitnosti norme daje

$$Q^m_1 \mid \omega,\lambda\rangle = \overline{Q}^n_{\dot{1}} \mid \omega,\lambda\rangle = 0\,. \tag{9.19}$$

Relacije medju preostalim generatorima definišu Klifordovu algebru za N fermionskih stepeni slobode,

$$\bar{q}^m \equiv (4\omega)^{-1/2}\overline{Q}^m{}_{\dot{2}}\,, \qquad q^m \equiv (4\omega)^{-1/2}Q^m_2\,.$$

U svakoj ireducibilnoj reprezentaciji ove algebre postoji osnovno stanje (Klifordov vakuum) definisano relacijom

$$q^m \mid \Omega_0\rangle = 0\,, \qquad \mid \Omega_0\rangle \equiv \mid \omega,\lambda_0\rangle\,. \tag{9.20}$$

Ono se ne sme mešati sa pojmom vakuuma koji služi da označi stanje najniže energije. Postojanje osnovnog stanja sledi iz sledećeg jednostavnog argumenta: ako stanje $\mid \beta\rangle$ nije osnovno jer, npr., $q^1 \mid \beta\rangle \neq 0$, onda je $q^1 \mid \beta\rangle$ osnovno stanje, pošto je $q^1(q^1 \mid \beta\rangle) = 0$, i slično za druge modove. Sva ostala stanja se dobijaju iz osnovnog delovanjem operatora $\bar{q}^m$:

$$\begin{aligned} &\bar{q}^n \mid \Omega_0\rangle = \mid \omega,\lambda_0+\tfrac{1}{2},n\rangle\,, \\ &(\bar{q}^m)(\bar{q}^n) \mid \Omega_0\rangle = \mid \omega,\lambda_0+1,mn\rangle\,, \end{aligned}$$

itd. Treba uočiti dvostruku ulogu operatora $\bar{q}$ i q: oni su operatori kreacije i anihilacije u Klifordovoj algebri, ali istovremeno deluju i kao operatori promene heliciteta za $\pm\frac{1}{2}$. Stanja su antisimetrična po svim unutrašnjim indeksima $m, n, ...$ koji potiču od operatora $\bar{q}^m$. U reprezentaciji postoji najviše stanje

$$(\bar{q}^1)(\bar{q}^2)\cdots(\bar{q}^N) \mid \Omega_0\rangle = \mid \omega, \lambda_0 + \tfrac{1}{2}N, 1\,2 \cdots N\rangle\,,$$

na kome delovanje bilo kog $\bar{q}^m$ daje nulu. Svaka primena operatora $\bar{q}$ *povećava* helicitet za $\frac{1}{2}$, a broj različitih stanja datog heliciteta $\lambda_0 + \frac{1}{2}s$ je odredjen brojem mogućih razmeštaja s različitih fermionskih operatora $\bar{q}^m$:

helicitet:	λ_0	$\lambda_0 + \frac{1}{2}$	$\cdots$	$\lambda_0 + \frac{1}{2}N$
broj stanja:	$\binom{N}{0} = 1$	$\binom{N}{1} = N$	$\cdots$	$\binom{N}{N} = 1\,.$

Za dato N nije teško izračunati ukupan broj stanja, kao i broj bozona i fermiona:

$$n = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N\,, \quad n_B = \sum_{k=0}^{[N/2]} \binom{N}{2k}\,, \quad n_F = \sum_{k=0}^{[(N-1)/2]} \binom{N}{2k+1}\,.$$

Koristeći binomni razvoj izraza $(1-1)^N$, potvrdjuje se pravilo da je u svakoj ireducibilnoj reprezentaciji broj bozona i fermiona jednak.

Prethodna razmatranja opisuju konstrukciju ireducibilnih reprezentacija za standardnu vrednost impulsa $\overset{\circ}{p}$. Opšti slučaj se može razmatrati uz pomoć Vignerovog metoda male grupe, kao i kod Poenkareove grupe.

Da bismo uključili i prostornu inverziju I_P u simetriju, potrebno je posmatranom skupu stanja dodati i stanja suprotnog heliciteta, od $-\lambda_0$ do $-\lambda_0 - \frac{1}{2}N$. Izuzetak su oni multipleti koji automatski sadrže oba skupa heliciteta (PCT samo–konjugovani multipleti).

Najprostiji $N = 1$ multiplet (sa I_P simetrijom) ima sledeću strukturu:

Kiralni multiplet $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$				
helicitet:	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
broj stanja:	1	1	1	1

On odgovara bezmasenom Ves–Zuminovom modelu, koji je realizovan kao teorija bezmasenih polja (A, B, ψ) (skalar, pseudoskalar i Majorana– spinor) i naziva se kiralni multiplet. Navedimo još dva važnija $N = 1$ multipleta:

Gradijentni multiplet $\lambda_0 = -1$				
helicitet:	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
broj stanja:	1	1	1	1

Supergravitacioni multiplet $\lambda_0 = -2$				
helicitet:	-2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
broj stanja:	1	1	1	1

Prvi se koristi pri konstrukciji SS elektrodinamike, i realizuje se kao skup bezmasenih polja (A_μ, ψ) (foton spina 1 i fotino spina $\frac{1}{2}$); drugi opisuje čestičnu strukturu $N = 1$ supergravitacije, i odgovara bezmasenim poljima $(\varphi_{\mu\nu}, \psi_{\alpha\mu})$ (graviton spina 2 i gravitino spina $\frac{3}{2}$).

Mada je posmatrana struktura ireducibilnih reprezentacija jasna sa gledišta čestičnog sadržaja, interesantno je razmotriti odgovarajuće vrednosti Kazimirovih operatora. Ograničavajući se na jednostavan slučaj $N = 1$, zapišimo operator N^μ (SS doprinos operatoru ugaonog momenta) u dvokomponentnoj notaciji:

$$N^\mu = \tfrac{1}{8}(\overline{Q}\bar{\sigma}^\mu Q - Q\sigma^\mu\overline{Q})\,.$$

U prostoru stanja standardnog impulsa izgradjenih nad Klifordovim vakuumom $\mid \Omega_0\rangle$, on ima oblik

$$N^\mu = \tfrac{1}{8}(\overline{Q}_{\dot{2}}Q_2 - Q_2\overline{Q}_{\dot{2}})(1,0,0,1) = \tfrac{1}{2}(\bar{q}q - q\bar{q})\overset{\circ}{p}{}^\mu\,,$$

i zadovoljava uslove $N^1 = N^2 = 0$, $N^\mu N_\mu = 0$. Iz ovih osobina sledi da je operator Y^μ proporcionalan standardnom impulsu, na osnovu čega se može definisati SS uopštenje heliciteta (Srivastava, 1986).

Treba zapaziti da prethodna konstrukcija daje reprezentacije na jednačinama kretanja, što se ogleda u tome da se balans bozona i fermiona, kao i zatvaranje SS algebre, postiže samo na jednačinama kretanja. Kasnije ćemo razmatrati reprezentacije koje ne traže upotrebu jednačina kretanja.

Standardna razmatranja vezana za renormalizabilnost kvantne teorije traže odsustvo spina $\frac{3}{2}$; takodje se veruje da uslov konzistentnosti gravitacione interakcije eliminiše spin $\frac{5}{2}$. Tako dolazimo do praktičnih ograničenja na broj N nezavisnih supersimetrija:

Renormalizabilnost kvantne teorije zahteva $N \leq 4$, dok je uslov konzistentnosti interakcije sa gravitacijom ispunjen pri $N \leq 8$.

Narušenje ovih zahteva ima za posledicu prisustvo čestica heliciteta $\lambda = \frac{3}{2}$ i $\frac{5}{2}$, redom, u fizičkom spektru modela.

2.3 Reprezentacije u slučaju $m^2 > 0$

Reprezentacije SS algebre na masenim stanjima imaju formalnu strukturu veoma sličnu reprezentacijama na poljima, koje ne traže upotrebu jednačina kretanja, pa je njihovo izučavanje sa tog stanovišta veoma značajno. U ovom slučaju standardni impuls se može izabrati tako da odgovara sistemu mirovanja: $\overset{\circ}{p}{}^\mu = (m,0,0,0)$. Konačnodimenzione unitarne reprezentacije Poenkareove grupe su odredjene reprezentacijama male grupe — $SO(3)$ [odnosno $SU(2)$]. Stanja su odredjena masom m, spinom j i njegovom projekcijom j_3, i zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}^2 \mid j, j_3\rangle &= -j(j+1) \mid j, j_3\rangle\,, \qquad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, ... \\ M^3 \mid j, j_3\rangle &= ij_3 \mid j, j_3\rangle\,, \qquad j_3 = -j, -j+1, ..., j\,. \end{aligned} \tag{9.21}$$

U slučaju kad nema centralnih naboja, mala grupa SS algebre je definisana generatorima $P_\mu, M^a, Q_\alpha, T^m$. U sistemu mirovanja algebra supernaboja se svodi na

$$\{Q_a^m, \overline{Q}^n{}_{\dot b}\} = 2m\delta^{mn}(\sigma^0)_{a\dot b} = 2m\delta^{mn}\delta_{a\dot b}\,,$$

dok je $\{Q,Q\} = \{\overline{Q},\overline{Q}\} = 0$. Posle reskaliranja ova algebra postaje Klifordova algebra za $2N$ fermionskih stepeni slobode:

$$\{q_a^m, \bar q^n{}_{\dot b}\} = \delta^{mn}\delta_{a\dot b}\,, \qquad \{q,q\} = \{\bar q, \bar q\} = 0\,, \tag{9.22}$$

gde je $q_a^m \equiv (2m)^{-1/2} Q_a^m$. Za razliku od bezmasenog slučaja ovde nijedan supernaboj nije realizovan trivijalno, pa Klifordova algebra ima $4N$ elemenata. Ireducibilne reprezentacije ove algebre se dobijaju slično kao i u bezmasenom slučaju. Polazeći od osnovnog stanja $\mid \Omega\rangle$,

$$q_a^m \mid \Omega\rangle = 0\,, \qquad \mid \Omega\rangle \equiv \mid j_0, j_3\rangle\,, \tag{9.23}$$

multiplet se generiše uzastopnim delovanjem različitih operatora $\bar q^n{}_{\dot b}$:

$$\bar q^n{}_{\dot b} \mid \Omega\rangle\,, \quad \bar q^m_{\dot a} \bar q^n{}_{\dot b} \mid \Omega\rangle\,, \quad ...$$

U reprezentaciji postoji najviše stanje dobijeno primenom $2N$ različitih operatora $\bar q$. Svako stanje je antisimetrično u odnosu na zamenu parova indeksa $(m, \dot a)$, koji karakterišu pojedine operatore $\bar q$.

Struktura ove reprezentacije je takva da ne pokazuje dovoljno jasno njen čestični sadržaj, tj. koliko se stanja odredjenog spina nalazi u njoj. Razmotrićemo zato detaljnije jednostavan slučaj $N = 1$.

Ispitajmo, najpre, vrednost SS spina u stanju Klifordovog vakuuma. Pošto je u sistemu standardnog impulsa

$$Y^a = M^a + \frac{1}{8m}\overline{Q}\gamma^a\gamma_5 Q = M^a - \frac{1}{8m} i(\overline{Q}\bar\sigma^a Q - Q\sigma^a\overline{Q})\,,$$

sledi da u vakuumu $\mid \Omega\rangle$ operator superspina Y^a ima istu vrednost kao i operator običnog spina M^a, tj. $y = j_0$, $y_3 = j_3$.

Kakav je efekat delovanja Q_a na Klifordov vakuum vidi se iz relacije

$$M_{12}Q_a \mid \Omega\rangle = (Q_a M_{12} + [M_{12}, Q_a]) \mid \Omega\rangle = i(j_3 + \tfrac{1}{2}\sigma^3)_a{}^b Q_b \mid \Omega\rangle\,. \tag{9.24a}$$

Svaki q_1 povećava projekciju spina za $\frac{1}{2}$, a q_2 je smanjuje, dok za $\bar{q}$ važi obratno: svaki $\bar{q}_{\dot{1}}$ smanjuje, a $\bar{q}_{\dot{2}}$ povećava projekciju spina za $\frac{1}{2}$. Tako vidimo da stanja $\bar{q}_{\dot{1}} \mid \Omega\rangle$ i $\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$ imaju projekcije spina $j_3 - \frac{1}{2}$ i $j_3 + \frac{1}{2}$, redom.

Primenjujući dva različita $\bar{q}$ operatora na $\mid \Omega\rangle$ dobija se stanje projekcije spina j_3:

$$\begin{aligned} M_{12}\bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle &= [\bar{q}_{\dot{1}}M_{12} - \tfrac{1}{2}i(\bar{\sigma}^3)_{\dot{1}}{}^{\dot{b}}\bar{q}_{\dot{b}}]\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle \\ &= \bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}}M_{12} \mid \Omega\rangle = ij_3\bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle \,. \end{aligned} \tag{9.24b}$$

Sumirajmo ove rezultate. Za svaku vrednost mase m i superspina y prostor ireducibilne reprezentacije se deli na $2y + 1$ potprostora, koji se karakterišu vrednostima projekcije $y_3 = -y, -y + 1, ...y$; svaki od ovih potprostora sadrži stanja sa četiri vrednosti projekcije fizičkog spina: $j_3 = y_3,\ y_3 - \frac{1}{2},\ y_3 + \frac{1}{2},\ y_3$.

Razmotrićemo dva jednostavna primera. Reprezentacija najmanje dimenzije odgovara osnovnom stanju $\mid \Omega\rangle$ sa $y = y_3 = 0$. Ovo stanje je bozon, jer je u njemu $j_0 = j_3 = 0$. Reprezentacija je četvorodimenziona i sastoji se od stanja

$y = 0,\ \ y_3 = 0.$				
stanja:	$\mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{1}} \mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$
j_3 :	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Iz reprezentacije prostorne inverzije u prostoru spinora sledi da proizvod dva supernaboja nosi negativnu parnost. Prema tome, ako je $\mid \Omega\rangle$ skalar onda je $\bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$ pseudoskalar, i obratno. Gornja reprezentacija se koristi u masivnom Ves–Zuminovom modelu (skalar, pseudoskalar i čestica spina $\frac{1}{2}$).

Drugi primer se odnosi na slučaj osnovnog stanja $\mid \Omega\rangle$ sa $y = \frac{1}{2}$. Ovo stanje je fermion, jer je u njemu $j = \frac{1}{2}$. U ovom slučaju postoje dva potprostora u kojima je $y_3 = \pm\frac{1}{2}$, a svaki od njih sadrži stanja sa četiri projekcije spina j_3. Struktura ovih potprostora data je sledećim tabelama:

$y = \frac{1}{2},\ \ y_3 = \frac{1}{2}.$				
stanja:	$\mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{1}} \mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$
j_3:	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
j:	$\frac{1}{2}$	$1, 0$	1	$\frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}, \;\; y_3 = -\frac{1}{2}.$

stanja:	$\mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{1}} \mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$	$\bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$
j_3 :	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$
j :	$\frac{1}{2}$	1	$1, 0$	$\frac{1}{2}$

Fermionski vakuum $\mid \Omega\rangle$ ima efektivno jedan spinorski indeks: on se transformiše kao $\overline{Q}_{\dot{a}} \mid B\rangle$, gde se $\mid B\rangle$ transformiše kao bozon. Stanja $\mid \Omega\rangle$ i $\bar{q}_{\dot{1}}\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$ opisuju dve čestice spina $\frac{1}{2}$; jedan deo stanja $\bar{q}_{\dot{1}} \mid \Omega\rangle$ i $\bar{q}_{\dot{2}} \mid \Omega\rangle$ opisuje česticu spina 1, a ostatak česticu spina 0 (pseudoskalar). Vektor i pseudoskalar nastaju iz proizvoda spinora i fermionskog vakuuma:

$$(0, \tfrac{1}{2}) \otimes (0, \tfrac{1}{2}) = (0, 1) + (0, 0)\,.$$

Balans bozona i fermiona. Broj bozonskih i fermionskih komponenti polja u oba analizirana primera je jednak. U složenijim situacijama ovaj zaključak se ne može lako dobiti, pa ćemo zato dati jedan opšti dokaz ovog stava, koji je, takodje, zasnovan na osnovnoj relaciji SS algebre (9.6a). Uvedimo operator fermionskog broja N_F,

$$N_F = \begin{cases} 0 & \text{u bozonskom stanju,} \\ 1 & \text{u fermionskom stanju.} \end{cases}$$

Ovaj operator antikomutira sa Q_a. U svakoj konačnodimenzionoj reprezentaciji SS algebre, u kojoj je operacija traga dobro definisana, imamo

$$\mathrm{Tr}\,[(-1)^{N_F}\{Q_a, \overline{Q}_{\dot{b}}\}] = \mathrm{Tr}\,[(-1)^{N_F} Q_a \overline{Q}_{\dot{b}}] + \mathrm{Tr}\,[Q_a (-1)^{N_F} \overline{Q}_{\dot{b}}] = 0\,,$$

gde zadnja jednakost sledi iz $(-1)^{N_F} Q_a = Q_a (-1)^{N_F - 1}$. S druge strane, korišćenjem relacije (9.15) prethodni rezultat implicira $\mathrm{Tr}\,[(-1)^{N_F}] = 0$, tj.

$$\sum_B \langle B \mid (-1)^{N_F} \mid B\rangle + \sum_F \langle F \mid (-1)^{N_F} \mid F\rangle = n_B - n_F = 0\,. \qquad (9.25)$$

Broj fermionskih i bozonskih stepeni slobode (stanja) u svakoj SS reprezentaciji je, dakle, jednak.

2.4 $N = 1$ supermultipleti polja

Reprezentacije SS algebre *na poljima* koje ne zavise od dinamike, tj. ne zahtevaju upotrebu jednačina kretanja, praktično su najvažnije sa gledišta konstrukcije interagujućih teorija. Razmotrimo način njihove konstrukcije u jednostavnom slučaju $N = 1$.

Kiralni multiplet. SS transformacije preslikavaju bozone u fermione i obratno, pri čemu polja dimenzije d prelaze u polja dimenzije $d + 1/2$ ili u izvode polja dimenzije $d - 1/2$. Metod konstrukcije supersimetričnih multipleta polja koji reprezentuju $N = 1$ SS algebru bez upotrebe jednačina kretanja prikazaćemo, korak po korak, na najprostijem slučaju kiralnog multipleta (Sohnius, 1986).

1. Izaberimo neko kompleksno, skalarno polje $\mathcal{A}(x)$ kao "osnovno stanje" reprezentacije.

2. Definišimo polja ψ_α i $\mathcal{F}$ sledećim zakonima transformacije:

$$\delta\mathcal{A} = 2\bar{\varepsilon}\psi\,, \qquad \delta\psi = -ai\gamma^\mu\varepsilon\partial_\mu\mathcal{A} + \mathcal{F}\varepsilon\,.$$

Dimenzije ovih polja se lako odredjuju.

3. Nametnimo uslov da je ψ kiralni spinor, tj. $\psi = \psi_-$. Ovaj uslov definiše kiralni multiplet, i znači da je polje ψ bezmaseno, tj. da je Vajlov spinor. On se ekvivalentno može izraziti i kao zahtev $Q_+(\mathcal{A}) \equiv [Q_+, \mathcal{A}] = 0$.

4. Uslov zatvaranja algebre na $\mathcal{A}$ odredjuje koeficijent a u izrazu za $\delta\psi$: $a = 1$.

5. Zakon transformacije od $\mathcal{F}$ ne uvodi nova polja, jer bi njihova dimenzija morala biti veća od 2; dakle,

$$\delta\mathcal{F} = -2bi\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\,.$$

6. Uslov zatvaranja algebre na ψ odredjuje koeficijent b u $\delta\mathcal{F}$: $b = 1$.

7. Posle toga algebra se zatvara i na $\mathcal{F}$.

Time je završena konstrukcija multipleta $\phi = (\mathcal{A}, \psi, \mathcal{F})$ koji se naziva kiralni multiplet, i na kome je SS algebra realizovana linearno:

$$\begin{aligned} &\delta\mathcal{A} = 2\bar{\varepsilon}\psi_-\,, \\ &\delta\psi_- = -i\gamma^\mu\varepsilon_+\partial_\mu\mathcal{A} + \mathcal{F}\varepsilon_-\,, \\ &\delta\mathcal{F} = -2i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_-\,. \end{aligned} \tag{9.26a}$$

Komponenta $\mathcal{F}$ se transformiše u divergenciju, što je uvek slučaj sa komponentom najveće dimenzije u svakom multipletu.

Prebrojmo stepene slobode u ovom multipletu, tj. odredimo broj nezavisnih realnih komponenti polja. Dva kompleksna skalarna polja $\mathcal{A}$ i $\mathcal{F}$ imaju četiri stepena slobode, a isto toliko ima i kiralni spinor ψ. Broj od 4+4 stepena slobode je *najmanji mogući broj* za multiplet, jer svaki multiplet mora imati bar jedan spinor koji ima najmanje dve kompleksne komponente. Prema tome, kiralni multiplet je *ireducibilan.*

Umesto kompleksnih polja $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ mogu se uvesti odgovarajuće realne komponente,

$$\mathcal{A} = A + iB\,, \qquad \mathcal{F} = F - iG\,,$$

dok se sa kiralnog spinora ψ_- može preći na odgovarajući Majorana–spinor ψ. Zakoni transformacije za kiralni multiplet $\phi = (A, B, \psi, F, G)$ se lako dobijaju iz kompleksnog oblika (9.26a):

$$\begin{aligned}
&\delta A = \bar\varepsilon\psi\,, \qquad \delta B = \bar\varepsilon\gamma_5\psi\,, \\
&\delta\psi = -i\gamma\cdot\partial(A+\gamma_5 B)\varepsilon + (F+\gamma_5 G)\varepsilon\,, \\
&\delta F = -i\bar\varepsilon\gamma\cdot\partial\psi \equiv -\bar\varepsilon F_{\bar\psi}\,, \qquad \delta G = -i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma\cdot\partial\psi \equiv -\bar\varepsilon\gamma_5 F_{\bar\psi}\,.
\end{aligned} \tag{9.26b}$$

Činjenica da je ovo kiralni multiplet, tj. da je ψ Majorana–spinor, ogleda se u tome što je spinor u izrazu δB jednak γ_5 puta spinor u δA.

Na sličan način se može definisati antikiralni multiplet $\bar\phi$. Prethodna analiza i konstrukcija se mogu primeniti i kod složenijih multipleta, kao što ćemo uskoro videti.

Opšti multiplet. Ako opet podjemo od nekog kompleksnog polja $C(x)$, ali iz konstrukcije izbacimo zahtev kiralnosti, onda dolazimo do većeg multipeta,

$$V = (C, \chi_\alpha, M, N, A_\mu, \psi_\alpha, D)\,, \tag{9.27a}$$

sa sledećim zakonima transformacije:

$$\begin{aligned}
&\delta C = \bar\varepsilon\gamma_5\chi\,, \\
&\delta\chi = (M+\gamma_5 N)\varepsilon - i\gamma^\mu(A_\mu + \gamma_5\partial_\mu C)\varepsilon\,, \\
&\delta M = \bar\varepsilon(\psi - i\gamma\cdot\partial\chi)\,, \\
&\delta N = \bar\varepsilon\gamma_5(\psi - i\gamma\cdot\partial\chi)\,, \\
&\delta A_\mu = \bar\varepsilon(i\gamma_\mu\psi + \partial_\mu\chi)\,, \\
&\delta\psi = (\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \gamma_5 D)\varepsilon\,, \\
&\delta D = i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma\cdot\partial\psi\,,
\end{aligned} \tag{9.27b}$$

gde je parametar ε Majorana–spinor. Skalar M, pseudoskalari C, N i D, i vektor A_μ su kompleksne veličine, a spinori χ i ψ su Dirakovi spinori. Uočavamo da se i ovde komponenta D najveće dimenzije transformiše u divergenciju. Ovaj multiplet ima 16+16 stepeni slobode, i naziva se *opšti multiplet*.

Opšti multiplet je reducibilna reprezentacija supersimetrije. Nametanjem uslova

$$V = V^+\,, \tag{9.27c}$$

što znači da su sve komponente ili realne ili Majorana–spinori, dobija se tzv. *realni opšti multiplet,* koji ima 8+8 realnih komponenti.

Opšti multiplet se može uopštiti dodavanjem Lorencovih indeksa na njegove komponente.

Reducibilnost i podmultipleti. Multiplet je reducibilan ako sadrži podskup polja koji je zatvoren u odnosu na SS transformacije, pri čemu se na polja iz podskupa mogu nametnuti neki dodatni uslovi, različiti od jednačina kretanja.

Opšti realan multiplet je reducibilan. Zaista, polja $\psi, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ i D se transformišu medjusobno, i čine podmultiplet — gradijentni multiplet dV,

$$dV = (\psi, F_{\mu\nu}, D)\,, \tag{9.28a}$$

koji ima 4+4 realne komponente. Zakoni transformacije

$$\begin{aligned}
&\delta F_{\mu\nu} = i\bar{\varepsilon}(\gamma_\nu \partial_\mu - \gamma_\mu \partial_\nu)\psi\,, \\
&\delta\psi = (\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \gamma_5 D)\varepsilon\,, \\
&\delta D = i\bar{\varepsilon}\gamma_5 \gamma\cdot\partial\psi\,,
\end{aligned} \tag{9.28b}$$

realizuju SS algebru ako važi $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0$. Ovaj multiplet se može pisati i u obliku $dV = (\psi, A_\mu, D)$, gde A_μ realizuje i lokalnu $U(1)$ simetriju: $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda$.

Ako nametnemo uslov $dV = 0$, preostale komponente od V čine kiralni multiplet

$$\phi_1 = (A, C, \chi_\alpha, M, N)\,, \tag{9.29}$$

gde je skalar A definisan rešenjem $A_\mu = \partial_\mu A$ uslova $F_{\mu\nu} = 0$.

2.5 Tenzorski račun i invarijante

Za svaku grupu simetrije postoje pravila kako se od dva multipleta dobija treći. Ona su analogna, na primer, kombinovanju dva vektora u tenzor drugog ranga ili skalar. Ovaj postupak, izmedju ostalog, omogućava dobijanje invarijantnih veličina, što je od posebne važnosti za sistematsku konstrukciju dejstva. Slična analiza se može napraviti i u slučaju supersimetrije, i naziva se, po analogiji sa Lorencovom simetrijom, tenzorski račun.

A. Posmatrajmo dva kiralna multipleta, $\phi_1 = (\mathcal{A}_1, \psi_1, \mathcal{F}_1)$ i $\phi_2 = (\mathcal{A}_2, \psi_2, \mathcal{F}_2)$, i formirajmo treći multiplet koji polazi od osnovnog stanja

$$\mathcal{A}_3 \equiv \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = (A_1A_2 - B_1B_2) + i(A_1B_2 + A_2B_1)\,.$$

Multiplet ϕ_3, dobijen polazeći od $\mathcal{A}_3$ i poznatih zakona transformacije za ϕ_1 i ϕ_2, takodje je kiralan. Eksplicitan račun pokazuje da su komponente ovako dobijenog multipleta,

$$\phi_3 = \phi_1\cdot\phi_2\,, \tag{9.30a}$$

izražene preko komponenti polaznih multiplete na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&A_3 = A_1 A_2 - B_1 B_2 \,, \\
&B_3 = A_1 B_2 + A_2 B_1 \,, \\
&\psi_3 = (A_1 - \gamma_5 B_1)\psi_2 + (A_2 - \gamma_5 B_2)\psi_1 \,, \\
&F_3 = A_1 F_2 + B_1 G_2 + A_2 F_1 + B_2 G_1 - \bar\psi_1 \psi_2 \,, \\
&G_3 = A_1 G_2 - B_1 F_2 + A_2 G_1 - B_2 F_1 + \bar\psi_1 \gamma_5 \psi_2 \,.
\end{aligned}
\tag{9.30b}
$$

Ovaj proizvod je simetričan i asocijativan,

$$
\begin{aligned}
&\phi_1 \cdot \phi_2 = \phi_2 \cdot \phi_1 \,, \\
&(\phi_1 \cdot \phi_2) \cdot \phi_3 = \phi_1 \cdot (\phi_2 \cdot \phi_3) \,,
\end{aligned}
$$

pa je, stoga, proizvod proizvoljnog broja multipleta dobro definisan. Množeći multiplet ϕ sa konstantnim kiralnim multipletima $1_+ = (1,0,0,0,0)$ i $1_- = (0,1,0,0,0)$, dobija se

$$
\phi \cdot 1_+ = \phi \,, \qquad \phi \cdot 1_- = (-B, A, -\gamma_5\psi, G, -F) \,.
$$

Na sličan način se definiše proizvod dva opšta realna mutipleta, $V = V_1 \cdot V_2$, polazeći od osnovnog stanja $C = C_1 C_2$.

B. Za kiralne multiplete se može definisati još jedan simetričan proizvod,

$$
V = \phi_1 \times \phi_2 \,, \tag{9.31a}
$$

koji polazi od $A_1A_2 + B_1B_2$ kao osnovnog stanja, i predstavlja opšti realni multiplet:

$$
\begin{aligned}
&C = A_1 A_2 + B_1 B_2 \,, \\
&\chi = (B_1 - \gamma_5 A_1)\psi_2 + (B_2 - \gamma_5 A_2)\psi_1 \,, \\
&M = B_1 F_2 + A_1 G_2 + B_2 F_1 + A_2 G_1 \,, \\
&N = B_1 G_2 - A_1 F_2 + B_2 G_1 - A_2 F_1 \,, \\
&A_\mu = B_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu A_2 + B_2 \overleftrightarrow{\partial}_\mu A_1 + i\bar\psi_1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2 \,, \\
&\psi = \big[G_1 + \gamma_5 F_1 + i\gamma\cdot\partial(B_1 - \gamma_5 A_1)\big]\psi_2 + (1 \leftrightarrow 2) \,, \\
&D = -2\big(F_1 F_2 + G_1 G_2 + \partial A_1 \cdot \partial A_2 + \partial B_1 \cdot \partial B_2\big) - i\bar\psi_1 \gamma\cdot\overleftrightarrow{\partial}\psi_2 \,.
\end{aligned}
\tag{9.31b}
$$

C. Posebna kombinacija

$$
\phi_1 \wedge \phi_2 = (\phi_1 \cdot 1_-) \times \phi_2 \,,
$$

je antisimetrična po ϕ_1 i ϕ_2, ima za osnovno stanje $A_1B_2 - A_2B_1$, i predstavlja opšti realni multiplet.

D. Interesantno je da se od kiralnog multipleta $\phi = (A, B, \psi, F, G)$ može napraviti novi kiralni multiplet polazeći od polja F kao osnovnog stanja. Ovaj multiplet se naziva *kinetički multiplet* i ima oblik

$$T\phi = (F, G, -i\gamma\cdot\partial\psi, -\Box A, -\Box B)\,. \tag{9.32a}$$

Ponavljajući postupak još jednom, lako se dobija osobina

$$TT\phi = -\Box\,\phi\,, \tag{9.32b}$$

koja opravdava naziv kinetički. Operator T je SS uopštenje Dirakovog operatora $i\gamma\cdot\partial$.

Konstrukcija dejstva. Posle nalaženja strukture multipleta i pravila za njihovo množenje, ostaje da se razjasni postupak izgradnje invarijantnih veličina, što će omogućiti konstrukciju dejstva SS teorije.

Iz zakona transformacije kiralnog multipleta ϕ sledi da se njegova F komponenta transformiše kao divergencija. Ovo nije slučajno, već sledi iz činjenice da je to komponenta najveće dimenzije, pa će njena SS transformacija ili sadržavati polja većih dimenzija (kojih nema), ili biti oblika ∂(druga polja). Prema tome, izraz

$$I_1 = \int d^4x[\phi]_F \tag{9.33a}$$

je invarijantan u odnosu na supersimetriju. Ako je kiralni multiplet ϕ dobijen množenjem drugih multipleta, npr. $\phi = \phi_1\cdot\phi_2$, onda veličina I_1 sadrži proizvode običnih komponenti polja, pa se može uzeti za dejstvo SS teorije.

Na sličan način se zaključuje da je D komponenta opšteg realnog multipleta V takodje pogodna za definisanje dejstva:

$$I_2 = \int d^4x[V]_D\,. \tag{9.33b}$$

2.6 Interagujući Ves–Zuminov model

Najopštije SS dejstvo izgradjeno samo od jednog kiralnog multipeta, koje ne sadrži parametre negativne dimenzije, ima oblik

$$I_{VZ} = \int d^4x\left(\tfrac{1}{2}\phi\cdot T\phi + \tfrac{1}{2}m\phi\cdot\phi - \tfrac{1}{3}g\phi\cdot\phi\cdot\phi\right)_F\,, \tag{9.34a}$$

koji definiše Ves–Zuminov model sa masom i interakcijom. Član $[\phi\times\phi]_D$ ne daje ništa novo, jer se od $-2[\phi\cdot T\phi]_F$ razlikuje samo za divergenciju. Koristeći pravila računanja sa multipletima, može se naći komponentni oblik lagranžijana:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{VZ} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g \,, \\
&\mathcal{L}_0 \equiv \tfrac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A + \tfrac{1}{2}\partial_\mu B \partial^\mu B + \tfrac{1}{2} i\bar{\psi}\gamma\cdot\partial\psi + \tfrac{1}{2}(F^2 + G^2)\,, \\
&\mathcal{L}_m \equiv m(AF + BG - \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\psi)\,, \\
&\mathcal{L}_g \equiv -g[(A^2 - B^2)F + 2ABG - \bar{\psi}(A - \gamma_5 B)\psi]\,,
\end{aligned}
\tag{9.34b}
$$

Ovaj lagranžijan je invarijantan u odnosu na SS transformacije (9.26b). Iz njega slede jednačine kretanja za sva polja, koje se mogu napisati u super–kovarijantnom obliku:

$$
T\phi = -m\phi + g\phi\cdot\phi\,.
$$

Jednačine kretanja za F i G su *algebarske* jednačine,

$$
F = -mA + g(A^2 - B^2)\,, \qquad G = -mB + 2gAB\,,
$$

što označava činjenicu da su ova polja pomoćna. Eliminacijom ovih polja iz dejstva, dobija se lagranžijan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{VZ} =& \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A \partial^\mu A - m^2 A^2) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu B \partial^\mu B - m^2 B^2) + \tfrac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi \\
&+ mgA(A^2 + B^2) - \tfrac{1}{2}g^2(A^2 + B^2)^2 + g\bar{\psi}(A - \gamma_5 B)\psi\,,
\end{aligned}
\tag{9.35a}
$$

koji predstavlja uopštenje izraza (9.1), postignuto uvodjenjem mase i interakcije. Treba uočiti da su mase svih polja iste, i da su sve interakcije ($A^3, AB^2, A^4, B^4, A^2B^2, A\bar{\psi}\psi$ i $B\bar{\psi}\gamma_5\psi$) odredjene preko dva parametra: mase m i konstante interakcije g. Ovakva situacija odražava činjenicu da je dejstvo (9.34) invarijantno u odnosu na SS transformacije

$$
\begin{aligned}
&\delta A = \bar{\varepsilon}\psi\,, \qquad \delta B = \bar{\varepsilon}\gamma_5\psi\,, \\
&\delta\psi = [-(i\gamma\cdot\partial + m) + g(A + \gamma_5 B)](A + \gamma_5 B)\varepsilon\,,
\end{aligned}
\tag{9.35b}
$$

koje se dobijaju iz (9.26b) korišćenjem jednačina kretanja za F i G.

Uloga pomoćnih polja je uspostavljanje balansa bozona i fermiona van jednačina kretanja. Transformacije (9.26b) realizuju SS algebru bez ikakvih dodatnih uslova, i njihov oblik ne zavisi od dinamike, tj. od parametara u dejstvu, što nije slučaj sa (9.35b). Interesantno je primetiti da i jednačine kretanja čine SS multiplet. Eliminacija pomoćnih polja, koja se realizuje korišćenjem algebarskih jednačina kretanja u dejstvu i zakonu transformacije, nije supersimetričan postupak, pa se zato, posle tog koraka, algebra SS transformacija zatvara samo na jednačinama kretanja.

3. SUPERGRAVITACIJA

Kada se supersimtrija lokalizuje, u SS algebri se pojavljuje lokalna translacija sa parametrom $2i\bar{\varepsilon}(x)\gamma^\mu\varepsilon(x)$. Zato očekujemo da se u teoriji, koja je invarijantna u odnosu na lokalnu supersimetriju, pojavi i gravitacija. Lokalno supersimetrična teorija, ili supergravitacija, prirodno je uopštenje običnih SS teorija u kome je gravitacija ujedinjena sa ostalim osnovnim interakcijama. Sa gledišta fenomenologije ona se pokazala pogodnijom od obične SS teorije, jer dozvoljava lakše uvodjenje mehanizma spontanog narušenja simetrije kojim se dobija realniji spektar čestica. Njene kvantne osobine su mnogo bolje nego u slučaju Ajnštajnove teorije.

Sledeći analogiju sa Ves–Zuminovim modelom i super ED u ovom odeljku ćemo razmotriti izgradnju SS teorije gravitacije polazeći od odgovarajuće linearizovane teorije. U ovakvom pristupu biće lakše razlikovati one karakteristike teorije koje su vezane za supersimetriju, od onih koje potiču od nelinearnosti gravitacione interakcije u kompletnoj teoriji.

Graviton se u linearnoj aproksimaciji opisuje kao bezmaseno polje spina 2. Ako isključimo spin $\frac{5}{2}$ iz razmatranja (za njega se smatra da nema konzistentnu gravitacionu interakciju), može se zaključiti da graviton pripada SS multipletu $(2, \frac{3}{2})$. Odgovarajuća čestična stanja su opisana kao simetrični tenzor $\varphi_{\mu\nu}$ i Rarita–Švingerovo polje $\psi_{\alpha\mu}$ (četvorovektor čija je svaka komponenta Majorana–spinor), koji zadovoljavaju slobodne jednačine kretanja. Slobodno polje spina 2 opisano je u glavi VI. Posle upoznavanja elemenata slobodne teorije polja $\psi_{\alpha\mu}$, pristupićemo izgradnji najpre linearizovane, a zatim i kompletne teorije supergravitacije, kao i razjašnjenju strukture pomoćnih polja (Schwinger, 1970; van Nieuwenhuizen, 1981; West, 1986; Srivastava, 1986).

3.1 Rarita–Švingerovo polje

Slobodna teorija bezmasenog polja $\psi_{\alpha\mu}$ (gravitino) može se izgraditi polazeći od zahteva invarijantnosti u odnosu na gradijentne transformacije

$$\psi_\mu \to \psi'_\mu = \psi + \partial_\mu\varepsilon\,, \tag{9.36}$$

gde je parametar ε Majorana–spinor. Najopštiji lagranžijan za slobodni gravitino, koji sadrži najviše prve izvode polja, ima oblik

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_\mu(a\gamma^\mu\partial^\nu + b\partial^\mu\gamma^\nu + c\eta^{\mu\nu}\gamma\cdot\partial + d\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma\cdot\partial)\psi_\nu\,.$$

Variranjem po ψ_μ dobijaju se jednačine kretanja

$$a\gamma^\mu\partial\cdot\psi + b\partial^\mu\gamma\cdot\psi + c\gamma\cdot\partial\psi^\mu + d\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma\cdot\partial\psi_\nu = 0\,.$$

Iz zahteva invarijantnosti ovih jednačina u odnosu na gradijantne transformacije, dobija se $a + d = 0$, $b + c = 0$. Posle toga invarijantnost dejstva se postiže ako je $a+b=0$. Izborom $a=-1/2$ i korišćenjem identiteta

$$\gamma^\mu\eta^{\nu\lambda}-\gamma^\nu\eta^{\lambda\mu}+\gamma^\lambda\eta^{\mu\nu}-\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda=\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5\gamma_\rho\,,$$

lagranžijan dobija konačan oblik

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar\psi_\mu\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\psi_\lambda\,. \tag{9.37}$$

Jednačine kretanja se mogu napisati u nekoliko ekvivalentnih oblika:

$$\begin{aligned}
&f^\mu\equiv i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\psi_\lambda=0\,,\\
&-i\left[\gamma\cdot\partial(\gamma\cdot\psi)-\partial\cdot\psi\right]=\tfrac{1}{2}\gamma\cdot f\,,\\
&i\gamma^j\psi_{j\mu}=-\big(f_\mu-\tfrac{1}{2}\gamma_\mu\gamma\cdot f\big)\,,\\
&i(\gamma_i\psi_{j\mu}+\gamma_\mu\psi_{ij}+\gamma_j\psi_{\mu i})=\varepsilon_{\rho ij\mu}\gamma_5 f^\rho\,,
\end{aligned} \tag{9.38}$$

gde je $\psi_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu\psi_\nu-\partial_\nu\psi_\mu$.

Masa i helicitet. Gradijentna simetrija teorije dozvoljava izbor gradijentnog uslova

$$\Omega\equiv\gamma\cdot\psi=0\,. \tag{9.39a}$$

Ovaj uslov je dobar, jer je $\delta(\gamma\cdot\psi)=\gamma\cdot\partial\varepsilon$ rešivo po ε. Posle toga iz jednačina kretanja se dobija

$$i\gamma\cdot\partial\psi^\mu=0\,,\qquad i\partial\cdot\psi=0\,, \tag{9.39b}$$

iz čega se vidi da je posmatrano polje *bezmaseno*, $\Box\psi^\mu=0$, kao što smo i očekivali.

Sada ćemo pokazati da ovo polje ima *helicitet* $\lambda=\pm\frac{3}{2}$. Posmatrajmo ravan talas $\psi^\mu=u^\mu(k)e^{-ik\cdot x}$, koji se kreće duž z–ose, $k=(k^0,0,0,k^3)$. Koristeći kompletan skup vektora $(\epsilon_{(-)},\epsilon_{(+)},k,\bar k)$, veličina $u^\mu(k)$ se može napisati u obliku

$$u^\mu=\epsilon^\mu_{(-)}u_-+\epsilon^\mu_{(+)}u_++k^\mu u_0+\bar k^\mu u_3\,,$$

gde je $\epsilon_\pm=(0,1,\pm i,0,0)/\sqrt{2}$, u_-,u_+,u_0 i u_3 su Majorana–spinori, a $k^2=0$. Prvi uslov iz (9.39b) znači da su svi spinori bezmaseni:

$$\hat k u_-=\hat k u_+=\hat k u_0=\hat k u_3=0\,,$$

dok iz drugog sledi $(k\cdot\bar k)u_3=0$, tj. $u_3=0$. Gradijentni uslov (9.39a) dozvoljava transformacije $\psi_\mu\to\psi_\mu-ku$ koje se mogu iskoristiti za eliminaciju u_0. Tako dobijamo

$$u^\mu=\epsilon^\mu_{(-)}u_-+\epsilon^\mu_{(+)}u_+\,. \tag{9.40}$$

Razmotrimo sada smisao gradijentnog uslova za preostale stepene slobode. Množeći ovaj uslov sa $\hat{\epsilon}_{(-)}$, i koristeći $\hat{\epsilon}_{(-)}\hat{\epsilon}_{(-)} = 0$, dobija se

$$\hat{\epsilon}_{(-)}\hat{\epsilon}_{(+)}u_+ = -(1 - 2\Sigma^3)u_+ = 0\,,$$

gde je $\Sigma^3 = \frac{1}{2}i\gamma^1\gamma^2$ operator projekcije spina duž k^3. Ova relacija znači da spinor u_+ ima helicitet $+\frac{1}{2}$. Na sličan način se dobija da je helicitet od u_- jednak $-\frac{1}{2}$. Prema tome, gradijentni uslov eliminiše pojavu heliciteta $\pm\frac{1}{2}$ i osigurava da izraz (9.40) opisuje polje heliciteta $\pm\frac{3}{2}$.

Propagator. Jednačina polja ψ_μ u interakciji sa spoljašnjim izvorom ima oblik

$$\begin{aligned} &K^{\mu\nu}\psi_\nu = J^\mu\,, \\ &K^{\mu\nu} \equiv i\,[\gamma^\mu\partial^\nu + \partial^\mu\gamma^\nu - \gamma\cdot\partial\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma\cdot\partial\gamma^\nu]\,. \end{aligned} \tag{9.41a}$$

Pošto je zbog postojanja gradijentne simetrije operator $K^{\mu\nu}$ singularan, $\partial_\mu K^{\mu\nu} = 0$, konzistentnost prethodnih jednačina zahteva da je ispunjen uslov $\partial_\mu J^\mu = 0$. Da bismo rešili ove jednačine, zgodno je preći u impulsni prostor $(i\partial \to k)$:

$$(-\gamma^\mu k^\nu - k^\mu\gamma^\nu + \hat{k}\eta^{\mu\nu} + \gamma^\mu\hat{k}\gamma^\nu)\psi_\nu = -J^\mu\,. \tag{9.41b}$$

Odavde sledi

$$\hat{k}\psi^\mu - k^\mu\gamma\cdot\psi = -\big(J^\mu - \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma\cdot J\big)\,,$$

posle čega primena gradijentnog uslova dovodi do rešenja

$$\psi^\mu = G^{\mu\nu}J_\nu\,, \qquad G^{\mu\nu} \equiv -\hat{k}\big(\eta^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\big)D\,, \tag{9.42a}$$

gde je $D = 1/k^2$ propagator skalarnog polja. Prethodni rezultat za G se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$G^{\mu\nu} = -\hat{k}\tfrac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu D = \tfrac{1}{2}\gamma^\nu\hat{k}\gamma^\mu D\,, \tag{9.42b}$$

gde smo, u zadnjem koraku, zanemarili član proporcionalan sa k^ν koji, pri delovanju na očuvanu struju, daje nulu.

Struktura opisanog postupka nalaženja propagatora postaje jasnija uvodjenjem veličina

$$P_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} - \tfrac{1}{3}\bar{\gamma}_\mu\bar{\gamma}_\nu\,, \qquad L_{\mu\nu} = \tfrac{1}{3}\bar{\gamma}_\mu\bar{\gamma}_\nu\,, \qquad \Lambda_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu/k^2\,, \tag{9.43}$$

gde je $\Pi_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2$, $\bar{\gamma}_\mu \equiv \gamma_\mu - k_\mu\hat{k}/k^2$. Ove veličine čine skup projektora u prostoru rešenja jednačine kretanja za ψ_μ. Jednačina (9.41b) izražena preko projektora dobija oblik

$$(P_{\mu\nu} - 2L_{\mu\nu})\hat{k}\psi^\nu = -(P_{\mu\nu} + L_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu})J^\nu\,,$$

odakle sledi $\Lambda_{\mu\nu}J^\nu = 0$, tj. $k\cdot J = 0$. Ova jednačina se može razdvojiti na dva bloka množenjem sa projektorima P i L, redom, posle čega se dobija njen ekvivalentan oblik

$$
\begin{aligned}
(P_{\mu\nu} + L_{\mu\nu})\hat{k}\psi^\nu &= -\big(P_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}L_{\mu\nu}\big)J^\nu\,, \\
\hat{k}\psi_\mu - \hat{k}\Lambda_{\mu\nu}\psi^\nu &= -\big(\eta_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\bar{\gamma}_\mu\gamma_\nu\big)J^\nu\,.
\end{aligned}
$$

Množenjem zadnje jednačine sa $\bar{\gamma}^\mu$ dobija se $-\hat{k}(\gamma\cdot\psi) + k\cdot\psi = \gamma\cdot J/2$, posle čega ona prelazi u oblik koji se lako rešava zadavanjem gradijentnog uslova, dovodeći do rešenja (9.42a).

Interakcija struja. Energija interakcije dve struje ima oblik

$$
E = \bar{J}^\mu G_{\mu\nu} J^\nu\,. \tag{9.44}
$$

Pokazaćemo da je ova energija pozitivna, čime se opravdava izbor znaka lagranžijana. Reziduum izraza za energiju može se prepisati u obliku

$$
R = \bar{J}_\mu \eta^{\lambda\mu}\gamma_\sigma\big(\tfrac{1}{2}\hat{k}\big)\gamma_\lambda\eta^{\nu\sigma}J_\nu\,.
$$

Iskoristimo sada identitete

$$
\begin{aligned}
\eta^{\mu\nu} &= \epsilon^\mu_{(-)}\epsilon^{\nu *}_{(-)} + \epsilon^\nu_{(+)}\epsilon^{\mu *}_{(+)} + (k^\mu\bar{k}^\nu + k^\nu\bar{k}^\mu)/(k\cdot\bar{k})\,, \\
\hat{k} &= u_-\bar{u}_- + u_+\bar{u}_+\,.
\end{aligned}
$$

Prva relacija predstavlja uslov kompletnosti skupa vektora $(\epsilon_{(-)}, \epsilon_{(+)}, k, \bar{k})$, a druga važi u prostoru bezmasenih spinora uz uslov normalizacije $u_-^+ u_- = u_+^+ u_+ = 2k^0$. Članovi u R proporcionalni sa k^μ ne daju doprinos, jer je $k\cdot J = 0$ i $\hat{k}u_\mp = 0$. Koristeći relacije

$$
\hat{\epsilon}_{(+)}u_+ = \hat{\epsilon}_{(-)}u_- = 0\,,
$$

koje znače da se helicitet od u_+ (u_-) ne može povećati (smanjiti), reziduum postaje

$$
R = \tfrac{1}{2}\mid \bar{u}_-\hat{\epsilon}_{(-)}\,\epsilon_{(-)}\cdot J\mid^2 + \tfrac{1}{2}\mid \bar{u}_+\hat{\epsilon}_{(+)}\,\epsilon_{(+)}\cdot J\mid^2\,, \tag{9.45}
$$

gde je $\mid A\mid^2 \equiv A^+ A$, čime je dokazana njegova pozitivnost.

3.2 Linearizovana teorija

Jednačine kretanja slobodnih bezmasenih polja spina 2 i $\frac{3}{2}$ su invarijantne u odnosu na gradijentne transformacije

$$\delta_\xi \varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \,, \qquad \delta_\theta \psi_\mu = \partial_\mu \theta \,, \tag{9.46}$$

gde je parametar θ Majorana–spinor. Znajući da skup polja $(\varphi_{\mu\nu}, \psi_\lambda)$ čini SS multiplet (na jednačinama kretanja), pokušaćemo, po analogiji sa elektrodinamikom, da izgradimo SS teoriju gravitacije, čija će simetrija biti supersimetrija kombinovana sa lokalnom simetrijom (9.46).

SS transformacije. Na osnovu dimenzionih argumenata SS transformacije imaju opšti oblik

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon \varphi_{\mu\nu} &= i\tfrac{1}{2}(\bar\varepsilon\gamma_\mu\psi_\nu + \bar\varepsilon\gamma_\nu\psi_\mu) + c_1\,\eta_{\mu\nu}\varepsilon\gamma\cdot\psi \,, \\
\delta_\varepsilon \psi_\mu &= 2c_2\,\partial_j\varphi_{i\mu}\sigma^{ij}\varepsilon + c_3\,\partial^\rho\varphi_{\rho\mu}\varepsilon \,,
\end{aligned}$$

gde je ε konstantni Majorana–spinor. Komutator lokalne θ simetrije i globalne supersimetrije na $\varphi_{\mu\nu}$ daje

$$[\delta_\theta, \delta_\varepsilon]\varphi_{\mu\nu} = i\tfrac{1}{2}(\bar\varepsilon\gamma_\mu\partial_\nu\theta + \bar\varepsilon\gamma_\nu\partial_\mu\theta) + c_1\,\eta_{\mu\nu}\varepsilon\gamma\cdot\partial\theta \,.$$

Desna strana predstavlja gradijentnu transformaciju od $\varphi_{\mu\nu}$ s parametrom $\xi_\mu = i\bar\varepsilon\gamma_\mu\theta/2$, ukoliko je $c_1 = 0$. Komutatori $[\delta_\theta, \delta_\varepsilon]\psi_\mu$ i $[\delta_\xi, \delta_\varepsilon]\varphi_{\mu\nu}$ automatski daju nule, dok izraz

$$[\delta_\xi, \delta_\varepsilon]\psi_\mu = 2c_2\,\partial_\mu(\partial_j\xi_i)\sigma^{ij}\varepsilon + c_3\,\partial^\rho(\partial_\rho\xi_\mu + \partial_\mu\xi_\rho)\varepsilon \,,$$

predstavlja gradijentnu transformaciju s parametrom $\theta = 2c_2\partial_j\xi_i\sigma^{ij}\varepsilon$, ako je $c_3 = 0$. Komutator dve supersimetrije na $\varphi_{\mu\nu}$ ima oblik

$$\begin{aligned}
[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]\varphi_{\mu\nu} &= ic_2[\bar\varepsilon_2\gamma_\mu\sigma^{ij}\varepsilon_1\partial_j\varphi_{i\nu} + (\mu\leftrightarrow\nu)] - (\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2) \\
&= ic_2[\bar\varepsilon_2\gamma^j\varepsilon_1\partial_j\varphi_{\mu\nu} - \partial_\mu(\bar\varepsilon_2\gamma^i\varepsilon_1\varphi_{i\nu})] + (\mu\leftrightarrow\nu) \,.
\end{aligned} \tag{9.47}$$

Desna strana predstavlja translaciju i gradijentnu transformaciju s parametrom $\xi_\nu = -ic_2\bar\varepsilon_2\gamma^j\varepsilon_1\varphi_{j\nu}$. Da bi translacija imala oblik koji zahteva SS algebra, mora biti $c_2 = -1$.

Tako je konačan oblik traženih SS transformacija dat relacijama

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_{\mu\nu} &= i\tfrac{1}{2}(\bar\varepsilon\gamma_\mu\psi_\nu + \bar\varepsilon\gamma_\nu\psi_\mu) \,, \\
\delta\psi_\mu &= -2\partial_j\varphi_{i\mu}\sigma^{ij}\varepsilon \,.
\end{aligned} \tag{9.48}$$

Zatvaranje algebre je postignuto tek posle uključivanja u razmatranje i lokalnih gradijentnih transformacija, kao što je bio slučaj i pri razmatranju SS elektrodinamike.

Na kraju ostaje da se proveri da li dobijene transformacije zatvaraju algebru na ψ_μ:

$$
\begin{aligned}
&[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]\psi_\mu = i\partial_i(\bar\varepsilon_1\gamma_j\psi_\mu + \bar\varepsilon_1\gamma_\mu\psi_j)\,\sigma^{ij}\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2)\\
&\quad = -\tfrac14(\bar\varepsilon_1\Gamma_A\varepsilon_2)\,\sigma^{ij}\Gamma^A i\partial_i(\gamma_j\psi_\mu + \gamma_\mu\psi_j) - (\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2)\\
&\quad = -\tfrac12 i(\bar\varepsilon_1\Gamma_a\varepsilon_2)\,\sigma^{ij}\Gamma^a\big(\gamma_j\psi_{i\mu} + \tfrac12\gamma_\mu\psi_{ij}\big) - \tfrac12 i\partial_\mu\big[(\bar\varepsilon_1\Gamma_a\varepsilon_2)\,\sigma^{ij}\Gamma^a\gamma_j\psi_i\big]\,.
\end{aligned}
$$

Ovde smo koristili Fircov identitet u kome, zbog antisimetrije u odnosu na zamenu $(\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2)$, preostaju samo članovi sa $\Gamma_a = \{\gamma_m,\, 2i\sigma_{mn}\,|_{m<n}\}$, kao i relaciju $\sigma^{ij}\partial_i(\gamma_j\psi_\mu + \gamma_\mu\psi_j) = \sigma^{ij}\big[\gamma_j\psi_{i\mu} + \frac12\gamma_\mu\psi_{ij} + \partial_\mu(\gamma_j\psi_i)\big]$. Drugi član je oblika gradijentne transformacije na ψ_μ, dok prvi, uz pomoć jednačina kretanja, postaje $-i\bar\varepsilon_1\Gamma_a\varepsilon_2\sigma^{ij}\Gamma^a\gamma_j\psi_{i\mu} + \mathcal{O}(f)$. Koristeći identitete

$$
\sigma^{ij}\sigma^{mn}\gamma_j = -\tfrac12\sigma^{mn}\gamma^i\,, \qquad \sigma^{ij}\gamma^m\gamma_j = \tfrac12\gamma^m\gamma^i - 2\eta^{im}\,,
$$

lako se vidi da je doprinos člana $\Gamma^a = \sigma^{mn}$ oblika $\mathcal{O}(f)$, pa izračunavanje doprinosa od $\Gamma^a = \gamma^m$ dovodi do konačnog rezultata:

$$
\begin{aligned}
[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]\psi_\mu = {}& 2i(\bar\varepsilon_1\gamma^\rho\varepsilon_2)\partial_\rho\psi_\mu\\
&- \partial_\mu\big[2i(\bar\varepsilon_1\gamma^m\varepsilon_2)\psi_m + \tfrac12 i(\bar\varepsilon_1\Gamma_a\varepsilon_2)\,\sigma^{ij}\Gamma^a\gamma_j\psi_i\big] + \mathcal{O}(f)\,.
\end{aligned}
\tag{9.49}
$$

Dejstvo. Dejstvo koje je invarijantno u odnosu na SS transformacije (9.48) predstavlja linearizovanu supergravitaciju, i dato je kao zbir slobodnih dejstava za bezmasene čestice spina 2 i $\frac32$:

$$
I^L_{SG} = \int d^4x\Big(\tfrac12\varphi^{\mu\nu}G^L_{\mu\nu} + \tfrac12\bar\psi_\mu f^\mu\Big)\,, \tag{9.50}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
&G^L_{\mu\nu} = R^L_{\mu\nu} - \tfrac12\eta_{\mu\nu}R^L\,,\\
&R^L_{\mu\nu} = -\Box\,\varphi_{\mu\nu} + \varphi^\sigma{}_{\mu,\nu\sigma} + \varphi^\sigma{}_{\nu,\mu\sigma} - \partial_\mu\partial_\nu\varphi\,, \qquad R^L = \eta^{\mu\nu}R^L_{\mu\nu}\,.
\end{aligned}
$$

Pri dokazu invarijantnosti nije potrebno koristiti jednačine kretanja.

Dejstvo (9.50) je takodje invarijantno u odnosu na lokalne Abelove transformacije (9.46). Iz ove invarijantnosti se dobijaju sledeći diferencijalni identiteti:

$$
\partial^\mu G^L_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \partial^\mu f_\mu = 0\,.
$$

3.3 Kompletna supergravitacija

Prelaz od linearizovane teorije na kompletnu supergravitaciju sastoji se u uvodjenju nelinearnih gravitacionih efekata, pri čemu se to mora uraditi u skladu sa zahtevima supersimetrije. Linearizovana teorija poseduje *lokalnu* Abelovu simetriju i globalnu *supersimetriju*. Prelaz na konzistentnu samointeragujuću teoriju može se izvršiti koristeći metod Neterinih struja (analogno slučaju obične teorije gravitacije), pri čemu će dobijena teorija posedovati *lokalnu supersimetriju*. Postoji, medjutim, direktniji metod dobijanja kompletne supergravitacije koji se sastoji u tome da se rezultati linearizovane teorije kovarijantizuju tako da se osigura važenje lokalne Poenkareove simetrije, uvodeći usput korekcije koje potiču od zahteva supersimetrije. Time se dolazi do supersimetrizovane lokalne Poenkareove simetrije, ili, ekvivalentno, do lokalizovane super–Poenkareove simetrije.

Sa gledišta lokalne Poenkareove simetrije prirodno je očekivati da će dejstvo supergravitacije imati oblik†

$$I_{SG} = \int d^4x \Big(-\frac{1}{2\kappa^2} bR + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\lambda \Big) . \tag{9.51a}$$

gde je $D_\rho \psi_\lambda = \big(\partial_\rho + \frac{1}{2} A_\rho^{ij} \sigma_{ij} \big) \psi_\lambda$ kovarijantni izvod koji osigurava lokalnu Poenkareovu simetriju. U dejstvu za polje spina $\frac{3}{2}$ nema determinante b, jer je veličina $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ tenzorska gustina, a ne tenzor. Treba napomenuti da bi korišćenje koneksije $A = \Delta$, koja odgovara Rimanovom prostoru, bilo nekonzistentno, jer, kao što ćemo videti, zbog prisustva spinorskog polja posmatrani prostor ima netrivijalnu torziju.

Koristeći identitet $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}_{mnkl} b^k{}_\rho b^l{}_\lambda = -2b(h_m{}^\mu h_n{}^\nu - h_n{}^\mu h_m{}^\nu)$ gravitacioni lagranžijan se može prevesti u pogodniji oblik:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2\kappa^2} bR = \frac{1}{8\kappa^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}_{mnkl} b^k{}_\rho b^l{}_\lambda R^{mn}{}_{\mu\nu}(A) , \tag{9.51b}$$

U narednom razmatranju pokazaćemo da je oblik dejstva (9.51a) u skladu sa supersimetrijom bez ikakvih dodatnih intervencija.

Jednačine kretanja. Variranjem gravitacionog lagranžijana po A, uz korišćenje Palatinijevog identiteta $\delta_A R^{mn}{}_{\mu\nu} = D_\mu(\delta A^{mn}{}_\nu) - D_\nu(\delta A^{mn}{}_\mu)$, dobija se (uz zanemarivanje divergencije)

$$\delta_A \mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}_{mnkl} (D_\nu b^k{}_\rho) b^l{}_\lambda \delta A^{mn}{}_\mu ,$$

† Uobičajena gravitaciona konstanta $\kappa = 8\pi G/c^2$ ima dimenziju -2 (u jedinicama mase). Da bi oblik SS transformacija u supergravitaciji bio jednostavniji, koristićemo redefinisanu konstantu: $\kappa \to \kappa^2$.

dok variranje Rarita–Švingerovog lagranžijana daje

$$\delta_A \mathcal{L}_{RS} = -\frac{i}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}_{kmnl} b^k{}_\nu \bar\psi_\rho \gamma^l \psi_\lambda \delta A^{mn}{}_\mu\,,$$

gde smo iskoristili $\gamma_5\gamma_k\sigma_{mn} \to \frac{1}{2}\varepsilon_{kmnl}\gamma^l$. Odavde se dobija jednačina kretanja za A,

$$T^k{}_{\nu\rho} \equiv D_\nu b^k{}_\rho - D_\rho b^k{}_\nu = \frac{\kappa^2}{2} i\bar\psi_\rho\gamma^k\psi_\nu\,, \tag{9.52a}$$

koja se može rešiti po A:

$$A_{ij\mu} = \Delta_{ij\mu} - \tfrac{1}{2}(T_{ijm} - T_{mij} + T_{jmi})b^m{}_\mu\,. \tag{9.52b}$$

Tako vidimo da posmatrano dejstvo živi u prostoru sa netrivijalnom torzijom $T^k{}_{\mu\nu}$. U daljem izlaganju podrazumevaćemo da je varijabla $A_{ij\mu}$ u dejstvu zamenjena izrazom (9.52b), čime na konzistentan način prelazimo na formulaciju supergravitacije u formalizmu drugog reda.

Variranjem po $b^i{}_\nu$ i $\bar\psi_\mu$ dobijaju se još dve jednačine:

$$\begin{aligned} F_i{}^\nu &= \frac{b}{\kappa^2}G^\nu{}_i + \tfrac{1}{2}i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar\psi_\mu\gamma_5\gamma_i D_\rho\psi_\lambda\,,\\ F^\mu &= i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\psi_\lambda\,, \end{aligned} \tag{9.53}$$

gde je $G^\nu{}_i = R^\nu{}_i - \frac{1}{2}h_i{}^\nu R$.

Iz lokalne Poenkareove invarijantnosti teorije sledi da ove dve jednačine nisu nezavisne, već zadovoljavaju odredjene diferencijalne identitete: njihovi kovarijantni izvodi iščezavaju na jednačinama kretanja. Ovi identiteti predstavljaju uslove konzistentnosti teorije. Razmotrićemo, kao primer, eksplicitan dokaz identiteta $D_\mu F^\mu = 0$. Krenimo od jednakosti

$$\begin{aligned} D_\mu F^\mu &= i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\big[(D_\mu b^i{}_\nu)\gamma_i D_\rho\psi_\lambda + \gamma_\nu D_\mu D_\rho\psi_\lambda\big]\\ &= \tfrac{1}{4}i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\big[i\kappa^2(\bar\psi_\nu\gamma^i\psi_\mu)\gamma_i D_\rho\psi_\lambda + R^{ij}{}_{\mu\rho}\gamma_\nu\sigma_{ij}\psi_\lambda\big]\,. \end{aligned}$$

koja se dobija posle korišćenja jednačine (9.52a) za torziju. Izrazimo u drugom članu proizvod $\gamma_\nu\sigma_{ij}$ preko γ_r i $\gamma_5\gamma_r$, uz korišćenje cikličkog identiteta za krivinu i torziju,

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\gamma_\nu\sigma_{ij}\psi_\lambda R^{ij}{}_{\mu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} b_{i\nu} R^{ij}{}_{\mu\rho}\gamma_5\gamma_j\psi_\lambda - 2bG^\lambda{}_l\gamma^l\psi_\lambda\,,\\ &\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}R^j{}_{\nu\mu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}D_\rho T^j{}_{\nu\mu}\,, \end{aligned}$$

i izrazimo član $G^\lambda{}_l$ uz pomoć jednačine kretanja $F_l{}^\lambda = 0$. Da je tako dobijeni izraz jednak nuli, sledi iz Fircovog identiteta za nediferencirana polja gravitina.

Napominjemo da se različiti oblici jednačine kretanja za gravitino mogu lako dobiti iz odgovarajućih jednačina (9.38) u M_4.

Lokalna supersimetrija. Sada ćemo pokazati da je dejstvo (9.51), u kome je koneksija A zadata jednačinom (9.52b), invarijantno u odnosu na *lokalne SS transformacije*:

$$\begin{aligned} &\delta b^i{}_\mu = \kappa i\bar{\varepsilon}\gamma^i\psi_\mu\,, \qquad \big(\,\delta h_i{}^\mu = -\kappa i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\psi_i\,\big) \\ &\delta\psi_\mu = -\frac{2}{\kappa}D_\mu\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{9.54}$$

U daljem razmatranju često ćemo koristiti $\kappa = 1$ zbog jednostavnosti.

Činjenica da je spinska koneksija $A(b,\psi)$ rešenje jednačine $\delta I/\delta A = 0$ znatno uprošćava način variranja dejstva $I = I[b,\psi,A(b,\psi)]$. Iz opšteg izraza

$$\delta I = \delta b\frac{\delta I}{\delta b}\bigg|_{A(b,\psi)} + \delta\psi\frac{\delta I}{\delta\psi}\bigg|_{A(b,\psi)} + \delta A(b,\psi)\frac{\delta I}{\delta A}\bigg|_{A(b,\psi)}$$

lako se vidi da zadnji član iščezava. Prema tome, pri variranju dejstva *variranje po* $A(b,\psi)$ *ne daje doprinos*, pa se može ignorisati.

Uzimajući u obzir ovo pravilo, variranjem gravitacionog dela dobija se rezultat

$$\delta\mathcal{L}_G = -b\big(R^i{}_\mu - \tfrac{1}{2}b^i{}_\mu R\big)(-i\bar{\varepsilon}\gamma^\mu\psi_i)\,.$$

Pri variranju dejstva za gravitino dobijaju se tri člana, koji nastaju variranjem ψ_λ, $\bar{\psi}_\mu$ i $\gamma_\nu = b^k{}_\nu\gamma_k$. Prvi član je oblika

$$\delta_1\mathcal{L}_{RS} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu D_\rho D_\lambda\varepsilon = -\tfrac{1}{4}i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\sigma_{ij}\varepsilon R^{ij}{}_{\rho\lambda}\,.$$

Drugi član je

$$\begin{aligned} \delta_2\mathcal{L}_{RS} &= -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}(D_\mu\bar{\varepsilon})\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\psi_\lambda \\ &= i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar{\varepsilon}\gamma_5[(D_\mu\gamma_\nu)D_\rho\psi_\lambda + \gamma_\nu D_\mu D_\rho\psi_\lambda] \equiv A + B\,. \end{aligned}$$

Drugi deo ovog izraza, zajedno sa $\delta\mathcal{L}_G$ i $\delta_1\mathcal{L}_{RS}$, daje nulu. Zaista, iz relacije

$$\begin{aligned} \delta_1\mathcal{L}_{RS} + B &= -\tfrac{1}{4}i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}R^{ij}{}_{\rho\lambda}\big[\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\sigma_{ij}\varepsilon - \bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_\nu\sigma_{ij}\psi_\mu\big] \\ &= -\tfrac{1}{4}iR^{ij}{}_{\rho\lambda}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}b^k{}_\nu\varepsilon_{kijl}\bar{\psi}_\mu\gamma^l\varepsilon = ib\big(R^i{}_\lambda - \tfrac{1}{2}b^i{}_\lambda R\big)\bar{\psi}_i\gamma^\lambda\varepsilon\,, \end{aligned}$$

direktno sledi da je $\delta_1\mathcal{L}_{RS} + B + \delta\mathcal{L}_G = 0$.

Ako prvi deo izraza $\delta_2\mathcal{L}_{RS}$ napišemo u obliku

$$A = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}(D_\mu b^m{}_\nu)\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_m D_\rho\psi_\lambda = \tfrac{1}{2}i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\big(\tfrac{1}{2}i\bar{\psi}_\nu\gamma^m\psi_\mu\big)\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_m D_\rho\psi_\lambda\,,$$

zbir ovog člana i $\delta_3\mathcal{L}_{RS}$ postaje

$$A+\delta_3\mathcal{L}_{RS}=\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\big[\tfrac{1}{2}(\bar\psi_\nu\gamma^m\psi_\mu)(\bar\varepsilon\gamma_5\gamma_m D_\rho\psi_\lambda)+(\bar\psi_\mu\gamma_5\gamma_m D_\rho\psi_\lambda)(\bar\varepsilon\gamma^m\psi_\nu)\big]\,.$$

Pokazaćemo da je ovaj zbir nula. Posmatrajmo Fircov identitet

$$\begin{aligned}&(\bar\varepsilon\gamma^m\psi_\nu)(\bar\psi_\mu\gamma_5\gamma_m D_\rho\psi_\lambda)-(\mu\leftrightarrow\nu)=\\&\qquad -\tfrac{1}{4}(\bar\varepsilon\gamma^m\Gamma_A\gamma_5\gamma_m D_\rho\psi_\lambda)(\bar\psi_\mu\Gamma^A\psi_\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu)\,.\end{aligned}$$

Zbog antisimetrije po (μ,ν), od svih Γ_A doprinos u sumi daju samo članovi $\Gamma_a\in\{\gamma_k, 2i\sigma_{kl}\ |_{k<l}\}$, pri čemu σ_{kl} otpada zbog $\gamma^m\sigma_{kl}\gamma_m=0$. Račun sa $\Gamma_a=\gamma_k$ daje

$$(\bar\varepsilon\gamma^m\psi_\nu)(\bar\psi_\mu\gamma_5\gamma_m D_\rho\psi_\lambda)\to\tfrac{1}{2}(\bar\varepsilon\gamma_5\gamma_k D_\rho\psi_\lambda)(\bar\psi_\mu\gamma^k\psi_\nu)\,,$$

odakle sledi $A+\delta_3\mathcal{L}_{RS}=0$.

Time smo dokazali lokalnu supersimetriju dejstva (9.51) u formalizmu drugog reda. Supergravitacija se može konzistentno zadati i u formalizmu prvog reda, gde je potrebno zadati pravila transformacije ne samo za polja $b^k{}_\mu$, ψ_ν, već i za $A_{ij\lambda}$ (Deser i Zumino, 1976).

3.4 Algebra lokalne supersimetrije

Dejstvo (9.51) je invarijantno u odnosu na *lokalne* super–Poenkareove transformacije sa parametrima $(a^\mu,\omega^{ij},\varepsilon_\alpha)$:

$$\begin{aligned}\delta b^i{}_\mu&=-a^\rho\partial_\rho b^i{}_\mu-a^\rho{}_{,\mu}b^i{}_\rho+\omega^i{}_s b^s{}_\mu+\kappa i\bar\varepsilon\gamma^i\psi_\mu\,,\\ \delta\psi_\mu&=-a^\rho\partial_\rho\psi_\mu-a^\rho{}_{,\mu}\psi_\rho+\tfrac{1}{2}\omega\cdot\sigma\psi_\mu-\frac{2}{\kappa}D_\mu\varepsilon\,.\end{aligned}\tag{9.55}$$

U formalizmu drugog reda koneksija $A^{ij}{}_\mu$ nije nezavisna varijabla, a njen zakon transformacije sledi iz definicije (9.52) i relacija (9.55):

$$\begin{aligned}\delta_T A^{ij}{}_\mu&=-a^\rho\partial_\rho A^{ij}{}_\mu-a^\rho{}_{,\mu}A^{ij}{}_\rho\,,\\ \delta_L A^{ij}{}_\mu&=\omega^i{}_s A^{sj}{}_\mu+\omega^j{}_s A^{is}{}_\mu-\partial_\mu\omega^{ij}\,,\\ \delta_S A^{ij}{}_\mu&=\tfrac{1}{2}i\kappa\big(-\bar\varepsilon\gamma^i\psi_\mu{}^j+\bar\varepsilon\gamma^j\psi_\mu{}^i-\bar\varepsilon\gamma_\mu\psi^{ij}\big)\,.\end{aligned}$$

Poenkareova podalgebra ima standardan oblik,

$$\begin{aligned}&[\delta_T(a_1),\delta_T(a_2)]=\delta_T(a_1\cdot\partial a_2-a_2\cdot\partial a_1)\,,\\&[\delta_L(\omega),\delta_T(a)]=\delta_L(-a\cdot\partial\omega)\,,\\&[\delta_L(\omega_1),\delta_L(\omega_2)]=\delta_L(\omega^i_{2s}\omega_1^{sj}-\omega^i_{1s}\omega_2^{sj})\,.\end{aligned}\tag{9.56}$$

dok se za komutatore supersimetrije i Poenkareovih transformacija dobija

$$
\begin{aligned}
&[\delta_S(\bar\varepsilon), \delta_T(a)] = \delta_S(a\cdot\partial\bar\varepsilon)\,, \\
&[\delta_S(\bar\varepsilon), \delta_L(\omega)] = \delta_S\big(\tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\sigma\cdot\omega\big)\,.
\end{aligned}
\tag{9.57}
$$

Komutator dve supersimetrije na $b^i{}_\mu$ ima oblik

$$
[\delta_S(\bar\varepsilon_1), \delta_S(\bar\varepsilon_2)]b^i{}_\mu = [\delta_T(-a^\rho) + \delta_L(a^\rho A^{mn}{}_\rho) + \delta_S(-a^\rho\bar\psi_\rho)]b^i{}_\mu\,, \tag{9.58a}
$$

gde je $a^\rho = 2i\bar\varepsilon_1\gamma^\rho\varepsilon_2$. Rezultat se dobija iz jednakosti

$$
\begin{aligned}
-2i\bar\varepsilon_2\gamma^i D_\mu\varepsilon_1 - (\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2) &= -2i\partial_\mu(\bar\varepsilon_2\gamma^i\varepsilon_1) - 2iA^{in}{}_\mu\bar\varepsilon_2\gamma_i\varepsilon_1 \\
&= -2i\partial_\mu(\bar\varepsilon_2\gamma^\lambda\varepsilon_1)b^i{}_\lambda - 2i(\bar\varepsilon_2\gamma^\lambda\varepsilon_1)D_\mu b^i{}_\lambda\,,
\end{aligned}
$$

i definicije torzije.

Komutator dve supersimetrije na ψ_μ ima složeniji oblik:

$$
[\delta_1,\delta_2]\psi_\mu = -2i\bar\varepsilon_1\gamma^m\varepsilon_2\psi_{\mu m} + \bar\varepsilon_1\gamma^\alpha\varepsilon_2 V_{\alpha\mu\rho}F^\rho + \bar\varepsilon_1\sigma^{\alpha\beta}\varepsilon_2 T_{\alpha\beta\mu\rho}F^\rho\,, \tag{9.58b}
$$

gde su strukturne funkcije V i T date relacijama

$$
\begin{aligned}
&bV_{\alpha\mu\rho} = \tfrac{1}{4}\gamma_\alpha\eta_{\mu\rho} + \tfrac{1}{2}b\varepsilon_{\alpha\mu\rho\lambda}\gamma_5\gamma^\lambda\,, \\
&bT_{\alpha\beta\mu\rho} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\rho} + \tfrac{1}{2}\sigma_{\alpha\beta}\eta_{\mu\rho} + \tfrac{1}{2}b\varepsilon_{\alpha\beta\mu\rho}\gamma_5\,.
\end{aligned}
\tag{9.58c}
$$

Uočavamo da je prvi član istog oblika kao i na $b^k{}_\mu$,

$$
-a^\lambda\psi_{\mu\lambda} = [\delta_T(-a^\rho) + \delta_L(a^\rho A^{mn}{}_\rho) + \delta_S(-a^\rho\bar\psi_\rho)]\psi_\mu\,,
$$

dok strukturne funkcije V i T opisuju članove proporcionalne jednačinama kretanja.

Da bismo dokazali prethodnu relaciju, poći ćemo od jednakosti

$$
[\delta_1,\delta_2]\psi_\mu = i(\bar\varepsilon_1\gamma^i\psi_\mu{}^j)\sigma_{ij}\varepsilon_2 + \tfrac{1}{2}i(\bar\varepsilon_1\gamma_\mu\psi^{ij})\sigma_{ij}\varepsilon_2 - (\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2)\,,
$$

koja se dobija posle korišćenja zakona transformacije za $A^{ij}{}_\mu$. Uz pomoć Fircovog identiteta desna strana postaje

$$
D = -\tfrac{1}{2}i\big(\bar\varepsilon_1\Gamma_a\varepsilon_2\big)\,\sigma^{ij}\Gamma^a\big(\gamma_i\psi_{\mu j} + \tfrac{1}{2}\gamma_\mu\psi_{ij}\big)\,,
$$

gde je, zbog antisimetrije pri $(\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2)$, preostao samo doprinos od $\Gamma_a \in \{\gamma_m, 2i\sigma_{mn}\,|_{m<n}\}$.

Deo koji potiče od $\Gamma_a = \gamma_m$ izračunava se pogodnom transformacijom izraza $\sigma^{ij}\gamma^m\gamma_i$ i $\sigma^{ij}\gamma^m\gamma_\mu\psi_{ij}$ uz korišćenje različitih oblika jednačina kretanja za gravitino, i ima oblik

$$D_\mu^{(1)} = -2i\bar{\varepsilon}_1\gamma^m\varepsilon_2\psi_{\mu m} + i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\alpha\varepsilon_2 V_{\alpha\mu\rho}F^\rho \,.$$

Deo koji potiče od $\Gamma_a = 2i\sigma_{mn}$, ceo je proporcionalan jednačinama kretanja. Pri njegovom dobijanju transformacija izraza $\sigma^{ij}\sigma_{mn}\gamma_\mu\psi_{ij}$ dovodi do

$$D_\mu^{(2)} = \tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}_1\sigma^{mn}\varepsilon_2\big[b^{-1}\sigma_{mn}\eta_{\rho\mu} - 2\varepsilon_{\rho nm\mu}\gamma_5 + b^{-1}\gamma_n\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_m\big]F^\rho \,,$$

posle čega se, daljom transformacijom zadnjeg člana, dobija konačan rezultat (9.58b).

3.5 Pomoćna polja

Sada ćemo naći formulaciju supergravitacije sa pomoćnim poljima, u kojoj se algebra zatvara automatski — bez korišćenja jednačina kretaja.

Linearizovana teorija. Opštu ideju o strukturi pomoćnih polja daće nam razmatranje balansa bozona i fermiona. Van jednačina kretanja simetričan tenzor $\varphi_{\mu\nu}$ ima 10 komponenti, od kojih, posle primene 4 gradijentna uslova (lokalna ξ simetrija), ostaje 6 nezavisnih bozonskih stepeni slobode. S druge strane, 4 Majorana–spinora ψ_μ imaju 16 realnih komponenti, što, posle uzimanja u obzir 4 gradijentna uslova (lokalna θ simetrija), daje 12 fermionskih stepeni slobode. Prema tome, pomoćna polja se moraju izabrati tako da nadoknade manjak od 6 bozonskih stepeni slobode.

Izbor skupa pomoćnih polja nije jednoznačan. Razmotrimo konstrukciju takozvane minimalne formulacije, u kojoj se pomoćna polja realizuju kao skup od 6 bozonskih komponenti. Pretpostavićemo da ovaj skup čine skalar S, pseudoskalar P i pseudovektor A_μ, i da se ova polja pojavljuju u dejstvu kvadratično, tj. da im je dimenzija $d = 2$. Tada iz dimenzionih argumenata sledi opšti oblik novih SS transformacija:

$$\begin{aligned}
&\delta\varphi_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}i(\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\psi_\nu + \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\psi_\mu)\,,\\
&\delta\psi_\mu = -2\partial_j\varphi_{i\mu}\sigma^{ij}\varepsilon + zA_\mu\gamma_5\varepsilon + \tfrac{1}{3}i\gamma_\mu(S+\gamma_5 P)\varepsilon + c_1\gamma_\mu\gamma_5\hat{A}\varepsilon\,,\\
&\delta S = c_2 i\bar{\varepsilon}\gamma\cdot F\,,\\
&\delta P = c_3 i\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma\cdot F\,,\\
&\delta A_\mu = c_4\bar{\varepsilon}\gamma_5 F_\mu + c_5\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_\mu\gamma\cdot F\,.
\end{aligned}$$

Ove transformacije se na jednačinama kretanja za pomoćna polja ($S = P = A_\mu = 0$) svode na oblik (9.48). Konstante c_a se odredjuju iz uslova da ove transformacije, zajedno sa gradijentnim transformacijama (9.46), zatvaraju algebru.

Komutator dve SS transformacije na polju S ima oblik

$$[\delta_1,\delta_2]S = -4ic_2\bar\varepsilon_1\gamma^\rho\varepsilon_2\partial_\rho S + 4c_2(z-3c_1)[\bar\varepsilon_2\gamma_5\sigma^{\rho\lambda}\varepsilon_1 - (\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2)]\partial_\rho A_\lambda\,.$$

Odavde sledi $c_1 = z/3$, $c_2 = -1/2$. Na sličan način se iz oblika komutatora na polju P dobija uslov $c_3 = -1/2$. Najzad, komutator na polju A,

$$[\delta_1,\delta_2]A_\mu = -4ic_5 z\bar\varepsilon_1\gamma^\rho\varepsilon_2\partial_\rho A_\mu + 4iz\big(c_5+\tfrac{1}{3}c_4\big)[\bar\varepsilon_2\sigma_{\mu\rho}\partial^\rho\hat A\varepsilon_1 - (\varepsilon_1\leftrightarrow\varepsilon_2)]\,,$$

implicira $zc_5 = -1/2$, $zc_4 = 3/2$. Na taj način su odredjene sve konstante osim z, koja se redefinicijom polja A_μ može svesti na ±1.

Koristeći relaciju

$$\delta\bar\psi_\mu = 2\partial_j\varphi_{i\mu}\bar\varepsilon\sigma^{ij} + zA_\mu\bar\varepsilon\gamma_5 - \tfrac{1}{3}i\bar\varepsilon(S+\gamma_5 P)\gamma_\mu + c_1\bar\varepsilon\hat A\gamma_5\gamma_\mu$$

pri variranju $\mathcal{L}_{RS}$, dobija se

$$\delta\mathcal{L}_{RS} = -\tfrac{1}{3}i\bar\varepsilon(S+\gamma_5 P)\gamma\!\cdot\! F + z\bar\varepsilon\gamma_5(F_\mu - \tfrac{1}{3}\gamma_\mu\gamma\!\cdot\! F)A^\mu\,.$$

Iz relacije $3\delta\mathcal{L}_{RS} = \delta(S^2+P^2+z^2A^2)$ sledi, posle izbora $z=1$, da je invarijantno dejstvo oblika

$$I^L = I^L_{SG} - \int d^4x\,\tfrac{1}{3}(S^2+P^2+A^2)\,. \qquad (9.59)$$

Posle eliminacije pomoćnih polja S, P i A_μ ovo dejstvo se svodi na oblik (9.50). Navedimo i konačan oblik SS transformacija:

$$\begin{aligned}
&\delta\varphi_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}i(\bar\varepsilon\gamma_\mu\psi_\nu + \bar\varepsilon\gamma_\nu\psi_\mu)\,,\\
&\delta\psi_\mu = -2\partial_j\varphi_{i\mu}\sigma^{ij}\varepsilon + A_\mu\gamma_5\varepsilon + \tfrac{1}{3}i\gamma_\mu(S+\gamma_5 P - i\gamma_5\hat A)\varepsilon\,,\\
&\delta S = -\tfrac{1}{2}i\bar\varepsilon\gamma\!\cdot\! F\,,\\
&\delta P = -\tfrac{1}{2}i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma\!\cdot\! F\,,\\
&\delta A^\mu = \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma_5(3F^\mu - \gamma^\mu\gamma\!\cdot\! F)\,.
\end{aligned} \qquad (9.60)$$

Kompletna teorija. Rezultat analize linearizovane teorije sugeriše da će dejstvo kompletne teorije sa pomoćnim poljima imati oblik

$$I = I_{SG} - \int d^4x\,\tfrac{1}{3}b(S^2+P^2+A^2)\,. \qquad (9.61)$$

Videćemo da prisustvo faktora b, koje je prirodno sa gledišta (Poenkareove) kovarijantnosti, komplikuje konstrukciju SS transformacija, jer, pri variranju dejstva, daje dodatni doprinos $\delta b\,(S^2+P^2+A^2)$, koji nije postojao u linearizovanoj teoriji.

Iz zakona transformacije osnovnih polja $b^k{}_\mu$ i ψ_μ dobija se njihov kovarijantizovani oblik:

$$\begin{aligned}
&\delta b^k{}_\mu = i\bar\varepsilon\gamma^k\psi_\mu\,,\\
&\delta\psi_\mu = -2D_\mu\varepsilon + A_\mu\gamma_5\varepsilon + \tfrac{1}{3}i\gamma_\mu(S+\gamma_5 P - i\gamma_5\hat{A})\varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{9.62}$$

Proverimo sada, izračunavanjem komutatora dve transformacije na $b^k{}_\mu$, da li je ovaj oblik transformacija u skladu sa supersimetrijom. Doprinos člana $-2D_\mu\varepsilon$ je isti kao i ranije, dok se za doprinos pomoćnih polja dobija izraz

$$[\delta_1,\delta_2]b^i_\mu\Big|_{PP} = \big[\tfrac{2}{3}i\varepsilon_2\gamma^\rho\varepsilon_1\varepsilon^{ikm}{}_\rho A_m - \tfrac{4}{3}\bar\varepsilon_2\sigma^{ik}(S+\gamma_5 P)\varepsilon_1\big]b_{k\mu}\,,$$

koji predstavlja dodatnu Lorencovu rotaciju. Kompletan rezultat za komutator dve supersimetrije na polju $b^i{}_\mu$ postaje

$$\begin{aligned}
&[\delta_1,\delta_2] = \delta_T(-a^\rho) + \delta_L(a^\rho\hat{A}^{ik}{}_\rho) + \delta_S(-a^\rho\bar\psi_\rho)\,,\\
&\hat{A}^{ik}{}_\rho \equiv A^{ik}{}_\rho - \tfrac{1}{3}\varepsilon^{ikm}{}_\rho A_m\,,
\end{aligned} \tag{9.63}$$

gde je $a^\rho = 2i\varepsilon_1\gamma^\rho\varepsilon_2$. Algebra se zatvara bez korišćenja jednačina kretanja, kovarijantnost je u skladu sa supersimetrijom.

Zahtev kovarijantnosti transformacije pomoćnog polja S dovodi do

$$\delta S = -\tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma\cdot F + \cdots\,,$$

(slično je za P i A_μ) gde su tačkama označene moguće korekcije koje nameće supersimetrija. Proverom delovanja ove transformacije na dejstvo lako se uočava neinvarijantnost zbog člana $(\delta b)S^2$, pri čemu je $\delta b = -bb^k{}_\mu\delta h_k{}^\mu = ib\bar\varepsilon\gamma\cdot\psi$. Prema tome, u izrazu za δS mora se pojaviti dodatni član oblika $i\bar\varepsilon\gamma\cdot\psi S$, da bi se kompenzovala neinvarijantnost dejstva koja potiče od $(\delta b)S^2$ (sličan mehanizam radi i za P i A_μ).

Da bismo našli tačan oblik ovih dodatnih članova, uočićemo da se zakon transformacije za ψ_μ može napisati u obliku

$$\delta\psi_\mu = -2D^K_\mu\varepsilon\,,\qquad D^K_\mu \equiv D_\mu - \tfrac{1}{2}A_\mu\gamma_5 - \tfrac{1}{2}i\gamma_\mu\eta\,,$$

gde veličina D^K_μ predstavlja takozvani superkovarijantni izvod, koji u sebi sadrži kovarijantni izvod D_μ i dodatne članove koji *uskladjuju kovarijantnost i supersimetriju*. Definišimo, dalje, veličinu

$$F^\mu_K \equiv i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\gamma_\nu\big[D_\rho\psi_\lambda - \tfrac{1}{2}A_\rho\gamma_5\psi_\lambda - \tfrac{1}{2}i\gamma_\rho\eta\psi_\lambda\big]\,,$$

koja predstavlja superkovarijantnu ekstenziju izraza F^μ.

Transformacije pomoćnih polja ćemo odrediti na isti način kao i transformaciju polja ψ_μ: zamenom $D_\mu \to D^K_\mu$, odnosno $F^\mu \to F^\mu_K$.

Tako se dobija

$$\begin{aligned} \delta S &= -\tfrac{1}{2} i\bar\varepsilon\gamma\cdot F_K\,, \\ \delta P &= -\tfrac{1}{2} i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma\cdot F_K\,, \\ \delta A^m &= \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma_5(3F^m_K - \gamma^m\gamma\cdot F_K)\,. \end{aligned} \tag{9.64a}$$

Eksplicitna provera pokazuje da ove transformacije, zajedno sa (9.62), zaista predstavljaju simetriju dejstva (9.61). Koristeći jednakosti

$$\begin{aligned} &\gamma\cdot F_K = \gamma\cdot F + i\gamma_5 A\cdot\psi + \gamma^\lambda(S+\gamma_5 P)\psi_\lambda\,, \\ &3F^\mu_K = -\tfrac{1}{2} i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_\nu A_\rho\psi_\lambda + 2\sigma^{\mu\lambda}(S+\gamma_5 P)\psi_\lambda + i\gamma_5 A^\mu\gamma\cdot\psi - i\gamma_5\gamma^\mu A\cdot\psi\,, \end{aligned}$$

zakon transformacije pomoćnih polja se može napisati u eksplicitnijem obliku,

$$\begin{aligned} \delta S &= -\tfrac{1}{2} i\bar\varepsilon\gamma\cdot F + \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma_5 A\cdot\psi - \tfrac{1}{2} i\bar\varepsilon\gamma_\rho(S+\gamma_5 P)\psi^\rho\,, \\ \delta P &= -\tfrac{1}{2} i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma\cdot F - \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon A\cdot\psi - \tfrac{1}{2} i\bar\varepsilon\gamma_5\gamma_\rho(S+\gamma_5 P)\psi^\rho\,, \\ \delta A^m &= \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma_5(3F^m - \gamma^m\gamma\cdot F) - \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\gamma_5(S+\gamma_5 P)\psi^m \\ &\quad - \tfrac{1}{2} i\bar\varepsilon\gamma\cdot\psi A^m + \tfrac{1}{2} i\varepsilon^{mnks}(\bar\varepsilon\gamma_5\gamma_n\psi_k)A_s\,, \end{aligned} \tag{9.64b}$$

u kome se jasno vidi doprinos dodatnih članova.

Analizom demenzija pojedinih članova na desnoj strani jednačina (9.62) i (9.64), vidi se da doprinosi pomoćnih polja imaju dimenziju za jedan veću nego što je potrebno. Ovaj višak dimenzije nestaje ako se odgovarajući članovi pomnože gravitacionom konstantom κ za koju smo koristili $\kappa = 1$, a čija je dimenzija $d(\kappa) = -1$.

3.6 Opšte napomene

Interakcija supergravitacije sa materijom. Struktura interagujuće teorije supergravitacije je odredjena pravilima koja slede iz analize multipleta lokalne supersimetrije i odgovarajućeg tenzorskog računa. Supergravitacioni multiplet $(b^k{}_\mu, \psi_\mu, P, S, A^m)$ je jedan *lokalni multiplet*: on je definisan zakonima transformacije koji dovode do *lokalne SS algebre* (9.63). Lokalni multipleti polja materije definišu se zakonima transformacije koji daju istu algebru. Oni se mogu dobiti iz odgovarajućih multipleta globalne supersimetrije modifikacijama koje uskladjuju zahteve lokalne Poenkareove simetrije i supersimetrije. Tako se definišu lokalni analogoni opšteg multipleta, kiralnog multipleta, itd. Njihova konstrukcija pokazuje da je za prelaz sa globalnog na lokalni multiplet bitan korak zamena parcijalnog izvoda superkovarijantnim u zakonu transformacije. Ako se polje F transformiše u odnosu na SS transformacije po pravilu $\delta F = \bar{\varepsilon} f$, onda se superkovarijantni izvod tog polja definiše relacijom

$$D_\mu^K F = \partial_\mu F + \tfrac{1}{2}\bar{\psi}_\mu f\,.$$

U zakonu transformacije superkovarijantnog izvoda nema člana $\partial\varepsilon$. Tako je, na primer, superkovarijantni izvod komponente A kiralnog multipleta oblika $D_\mu^K A = \partial_\mu A + \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu\psi$. Posle toga se nalaze pravila kombinovanja dva multipleta u treći; struktura proizvoda $\phi_1 \cdot \phi_2$, $\phi_1 \times \phi_2$ i $\phi_1 \wedge \phi_2$ je ista kao i u slučaju globalne supersimetrije, uz zamenu $\partial_\mu \to D_\mu^K$. Zadnji korak lokalnog tenzorskog računa je dobijanje formula za invarijantne skalarne gustine, kojima se uopštavaju odgovarajuće formule globalne supersimetrije i omogućava konstrukcija dejstva. Posle toga nije teško konstruisati interakciju supergravitacije sa proizvoljnim multipletom materije, što omogućava razmatranje raznih modela.

Spontano narušenje simetrije. Iz egzaktne supersimetrije sledi da su mase bozona i fermiona u istom supermultipletu jednake. Prema tome, sve poznate elementarne čestice treba da imaju svoje supersimetrične partnere, kao što je ilustrovano u sledećoj tabeli.

Čestica	Spin	Superpartner	Spin
elektron	$\frac{1}{2}$	selektron	0
kvark	$\frac{1}{2}$	skvark	0
foton	1	fotino	$\frac{1}{2}$
gluon	1	gluino	$\frac{1}{2}$
$W^\pm, Z^0$	1	$W^\pm, Z^0$–ino	$\frac{1}{2}$
graviton	2	gravitino	$\frac{3}{2}$

Pošto takva degeneracija masa nije uočena u prirodi, za izgradnju realističnih modela neophodno je narušiti supersimetriju. Da bi se sačuvale sve korisne osobine supersimetrije, kao što je poboljšanje renormalizabilnosti kvantne teorije, simetrija se mora narušiti spontano, što znači da osnovno stanje nije invarijantno u odnosu na supersimetriju. U ovom postupku superpartneri običnih čestica postaju veoma masivni, čime se "objašnjava" njihova neopservabilnost, dok opservabilne čestice dobijaju različite mase.

U teoriji sa globalnom $N = 1$ supersimetrijom u svakom stanju sistema važi $E \geq 0$. Iz dokaza teorme o nenegativnosti energije sledi da osnovno stanje (ili familija stanja, ako ih ima više), $|\,0\rangle$, ima energiju $E_0 = 0$ samo ako ga svi operatori Q_α anihiliraju. Stanja nulte energije su supersimetrična osnovna stanja teorije. Ako je supersimetrija spontano narušena, bar jedan generator Q_α ne anihilira vakuum $|\,0\rangle$, i energija vakuuma nije nula. Globalna supersimetrija je narušena ako i samo ako je energija vakuuma veća od nule. Energija vakuuma je parametar koji meri veličinu spontanog narušenja supersimetrije. U slučaju narušene simetrije važi $\langle \delta\varphi \rangle \neq 0$ bar za neko polje φ (dokaz lako sledi iz $\delta\varphi = [\bar{\varepsilon}Q, \varphi]$).

Razmotrimo problem spontanog narušenja supersimetrije u interagujućem Ves–Zuminovom modelu. Uslov minimuma ima oblik $\langle A \rangle = m/g$ ili 0, $\langle B \rangle = 0$, dok se za $\langle A \rangle = m/2g$ dobija maksimum. U ovom slučaju $\langle F \rangle = \langle G \rangle = 0$ (polja F i G su izražena preko A i B algebarskim jednačinama kretanja). Pošto je u minimumu vrednost potencijala jednaka nuli, supersimetrija nije narušena. U ovom slučaju osnovno stanje je degenerisano, jer postoji više konfiguracija polja sa istom, minimalnom energijom.

Uvodjenje člana linearnog po ϕ u Ves–Zuminovo dejstvo dovodi do veoma jednostavnog primera spontanog narušenja simetrije, u kome je $\langle F \rangle = \lambda$. U tom slučaju posle smene varijabli $F = \lambda + F'$ zakon transformacije za ψ dobija nehomogeni član, $\langle \delta\psi \rangle = \lambda\varepsilon$, na osnovu čega zaključujemo da je ψ Goldstonov fermion, *goldstino*. Ova čestica predstavlja analogon uobičajenih Goldstonovih bozona, i njena masa je nula. Minimum potencijala je pozitivan i supersimetrija je narušena.

Činjenica da goldstino nije nadjen u prirodi predstavlja problem za teorije sa globalnom supersimetrijom. Ovaj problem se rešava u supergravitaciji u procesu spontanog narušenja simetrije. U standardnom Higsovom mehanizmu lokalna simetrija omogućava da početni bezmaseni kompenzujući bozon heliciteta ± 1 “dobije” i treće stanje heliciteta 0 na račun Goldstonovog bozona, i tako postane masivna čestica, dok istovremeno Goldstonov bozon nestaje iz teorije. Sličan super–Higsov mehanizam radi i u supergravitaciji: postoji izbor gradijentnog uslova koji eliminiše goldstino iz teorije, dok istovremeno kompenzujuće polje, gravitino ψ_μ, postaje masivno. Interesantno je da u supergravitaciji energija vakuuma može biti pozitivna, nula ili negativna, nasuprot slučaju globalne supersimetrije.

Superprostor i superpolja. U običnoj teoriji polja Poenkareove transformacije se mogu realizovati kao transformacije koordinata x^μ u Minkovskijevom prostoru M_4. Analizom ponašanja polja $\phi(x)$ u odnosu na ove transformacije dolazimo do ireducibilnih reprezentacija Poenkareove grupe, koje predstavljaju skup izvesnog broja komponenti polja i njihovih pravila transformacije. Poznavanje ireducibilnih reprezentacija Poenkareove (i Lorencove) grupe omogućava izgradnju relativistički kovarijantnih teorija polja.

Videli smo da su supermultipleti neophodni za formulaciju SS teorija. Veoma je korisno predstaviti supermultiplet kao skup komponenti *superpolja* koje je definisano u *superprostoru* sa koordinatama

$$z^M = (x^\mu, \theta_a, \bar{\theta}^{\dot{a}}) ,$$

gde su θ i $\bar{\theta}$ antikomutirajući spinori. SS transformacije se mogu reprezentovati kao transformacije u superprostoru.

Da bismo razjasnili ovaj iskaz, posmatraćemo, najpre, Poenkareove transformacije u Minkovskijevom prostoru. Neka je ϕ skalarna funkcija, i $\phi_x = g(1,x)\phi(0)$. Delovanjem Poenkareove transformacije $g(\Lambda, a)$ na ϕ_x i korišćenjem pravila kompozicije dve Poenkareove transformacije dobija se relacija $g(\Lambda, a)\phi_x = g(1, \Lambda x + a)\phi(0) = \phi_{\Lambda x+a}$. Odavde sledi da se Poenkareova transformacija $g(\Lambda, a)$ može realizovati kao transformacija koordinata $x' = \Lambda x + a$ Minkovskijevog prostora.

Na sličan način se može doći do reprezentacije supersimetrije kao koordinatne transformacije u superprostoru. Definišimo skalarno superpolje Φ u tački $(x, \theta, \bar\theta)$ preko relacije

$$\Phi_{(x,\theta,\bar\theta)} = g(x,\theta,\bar\theta)\Phi(0)\,, \qquad g(x,\theta,\bar\theta) \equiv \exp(x\cdot P - \theta Q - \bar\theta\overline{Q})\,.$$

Odavde se lako dobija $g(a,\xi,\bar\xi)\Phi_{(x,\theta,\bar\theta)} = \Phi_{(x',\theta',\bar\theta')}$, gde je

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + a^{\mu} - i(\xi\sigma^{\mu}\bar\theta - \theta\sigma^{\mu}\bar\xi)\,, \\ \theta'_a &= \theta_a + \xi_a\,, \qquad \bar\theta'_{\dot a} = \bar\theta_{\dot a} + \bar\xi_{\dot a}\,. \end{aligned}$$

Ovim relacijama SS transformacije su realizovane kao supertranslacije koordinata u superprostoru. U ovoj reprezentaciji generatori $Q, \overline{Q}$ imaju oblik

$$Q_a = \partial_a - i(\sigma^{\mu}\bar\theta)_a\partial_{\mu}\,, \qquad \overline{Q}^{\dot a} = \partial^{\dot a} + i(\theta\sigma^{\mu})^{\dot a}\partial_{\mu}\,,$$

gde je $\partial_a = \partial/\partial\theta^a\,, \partial^{\dot a} = \partial/\partial\bar\theta_{\dot a}$, dok je $P_\mu = -\partial_\mu$ kao i ranije.

Superpolja su definisana tako da nose reprezentacije super–Poenkareove grupe, na sličan način kao što obična polja nose reprezentacije Poenkareove grupe. Ona sadrži kao svoje komponente upravo ona polja koja čine supermultiplet. Upotreba superpolja omogućava elegantan razvoj tenzorskog računa i definisanje invarijantnih veličina koje služe za konstrukciju dejstva. Teorija polja definisana preko superpolja postaje veoma kompaktna u poredjenju sa formulacijom preko komponentnih polja. Superpolja su posebno značajna pri računanju kvantnih popravki, gde moć ove tehnike dolazi do punog izražaja.

Kvantni efekti. Za izračunavanja fizičkih procesa u kvantnoj teoriji polja najčešće se koristi metod perturbacije. Pri računanju perturbativnih kvantnih efekata pojavljuju se divergentni integrali čija divergencija potiče od integracije po malim rastojenjima, ili velikim energijama. “Smisao” ovih ultravioletnih (UV) divergencija u teoriji može se pronaći uz pomoć Fajnmanovih dijagrama. U renormalizabilnim teorijama problem UV divergencija se razrešava postupkom renormalizacije, koji se sastoji u redefinisanju konačnog broja fizičkih parametara, kao što su masa, naelektrisanje i slično, tako da fizičke posledice teorije budu korektne. Sam postupak nije matematički strogo zasnovan, ali ima jasnu fizičku interpretaciju i dovodi do teorijskih predvidjanja koja se veoma dobro slažu sa eksperimentima. Teorije elektro–slabih i jakih interakcija su renormalizabilne, dok su svi dosadašnji pokušaji izgradnje konzistentne, renormalizabilne kvantne teorije gravitacije bili neuspešni. Ovo je, svakako, jedan od osnovnih problema fizike osnovnih interakcija elementarnih čestica u današnje vreme.

Pored ujedinjenja bozona i fermiona, SS teorije su privlačne, jer imaju dobre osobine sa gledišta renormalizabilnosti. Najniže kvantne popravke potiču od dijagrama koji imaju oblik zatvorene petlje. Pošto su fermioni antikomutirajući objekti, fermionske petlje imaju suprotan znak od bozonskih. Ako su parametri teorije (mase, konstante interakcije, naelektrisanja) na pogodan način povezani, doprinosi fermionskih i bozonskih petlji se mogu skratiti. To se upravo dešava kod SS teorija. Jedan od impresivnih slučajeva ovakvog skraćivanja nalazimo kod $N = 4$ Jang–Milsove teorije. Ova teorija ne samo da je renormalizabilna, već je i egzaktno (u svim redovima teorije perturbacije) konačna: sve potencijalne UV beskonačnosti se medjusobno "skraćuju", u teoriji preostaju samo konačni izrazi. Sa gledišta fizike, nažalost, $N = 4$ teorija je bez značaja, jer spektar čestica, koje ona predvidja, nije u skladu sa realnošću.

Ajnštajnova teorija gravitacije je konačna na nivou jedna petlje. Analizom velikog broja različitih dijagrama na nivou dve petlje nadjeno je da je teorija divergentna (Goroff i Sagnotti, 1985; 1986). Ako je prisutna i materija, osobina renormalizabilnosti se gubi već na nivou jedna petlje.

Iskustvo sa globalno supersimetričnim teorijama ukazivalo je na mogućnost da kvantna supergravitacija bude renormalizabilna teorija. Eksplicitni računi u odredjenim modelima supergravitacije pokazali su konačnost do nivoa dve petlje, dok se na nivou tri petlje pojavljuju problemi. Mada supersimetrija znatno poboljšava osobine renormalizabilnosti gravitacije, izgleda da se u okviru supergravitacije ne može dobiti renormalizabilna kvantna teorija gravitacije.

ZADACI

1. Polazeći od relacija

$$
\begin{aligned}
&a) \qquad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = ia(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + ib(\sigma^{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} M_{\mu\nu}\,, \\
&b) \qquad [P_\mu, Q_\alpha] = c(\gamma_\mu)_\alpha{}^\beta Q_\beta\,, \\
&c) \qquad [M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = d(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta\,,
\end{aligned}
$$

   i Jakobijevih identiteta za (Q, Q, P), (P, P, Q) i (M, M, Q), redom, odrediti vrednost parametara b, c i d.
2. Dokazati da SS generator Q_α zadovoljava relacije

$$
\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = -2i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu\,, \qquad \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = -2i(C^{-1}\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu\,,
$$
$$
[M_{\mu\nu}, \bar{Q}_\alpha] = \bar{Q}_\beta (\sigma_{\mu\nu})^\beta{}_\alpha\,.
$$

3. Pokazati u slučaju $N = 1$ da deo SS algebre, koji sadrži Q_α, u dvokomponentnoj notaciji ima oblik (9.15), gde su $\sigma^{\mu\nu}$ i $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ generatori Lorencove grupe u dvodimenzionim reprezentacijama $(\frac{1}{2}, 0)$ i $(0, \frac{1}{2})$, redom.
4. *a*) Naći algebru SS transformacija (9.10) u Ves–Zuminovom modelu.
b) Pokazati da odgovarajuća Neterina struja ima oblik $J^\mu = \gamma{\cdot}\partial(A - \gamma_5 B)\gamma^\mu\psi$.
5. *a*) Pokazati da se $N = 1$ super–Poenkareova algebra ne menja u odnosu na kiralne transformacije $Q \to e^{\alpha\gamma_5}Q$.
b) Naći realizaciju kiralnih transformacija na poljima $(\mathcal{A}, \psi_-, \mathcal{F})$ u Ves–Zuminovom modelu. Kakav je oblik ovih transformacija na realnim poljima A, B, F i G?
6. Naći algebru transformacija (9.14*a*) koje karakterišu SS elektrodinamiku.
7. *a*) Pokazati da pri $m^2 > 0$ operator $X^\mu = W^\mu - \frac{1}{8}i\bar{Q}\gamma^\mu\gamma_5 Q$ zadovoljava relacije

$$
\begin{aligned}
&[X^\mu, Q_\alpha] = \tfrac{1}{2}(\gamma_5 Q)_\alpha P^\mu\,,\\
&[X^1, X^2] = -imX^3 \quad \text{itd.} \qquad \text{(u sistemu mirovanja)}\,.
\end{aligned}
$$

b) Dokazati da je $N^\mu \equiv \frac{1}{8}i\bar{Q}\gamma^\mu\gamma_5 Q = \frac{1}{8}(\bar{Q}\bar{\sigma}^\mu Q - Q\sigma^\mu\bar{Q})$.
8. Naći strukturu SS multipleta stanja: *a*) $N = 4$, $\lambda_0 = -1$; *b*) $N = 8$, $\lambda_0 = -2$.
9. *a*) Pokazati da u Klifordovom vakuumu $|\Omega\rangle$, $m^2 > 0$, u sistemu standardnog impulsa operator superspina ima istu vrednost kao i operator običnog spina: $y = j_0, y_3 = j_3$.
b) Izračunati vrednost projekcija spina i superspina (j_3, y_3) za članove onih masenih multipleta čiji vakuum $|\Omega\rangle$ ima sledeće karakteristike:
i) $y = 0, y_3 = 0$; *ii*) $y = 1/2, y_3 = 1/2$; *iii*) $y = 1/2, y_3 = -1/2$.
10. *a*) Dokazati da kompleksni oblik zakona transformacije kiralnog multipleta (9.26*a*) predstavlja realizaciju SS algebre.
b) Proveriti ekvivalentnost kompleksnog i realnog oblika zakona transformacije kiralnog multipleta.
11. *a*) Dokazati da transformacije (9.27*b*) opšteg multipleta realizuju SS algebru.
b) Naći zakon transformacije gradijentnog multipleta dV i pokazati da on zadovoljava SS algebru.
c) Pokazati da nametanjem uslova $dV = 0$ opšti, realni multiplet prelazi u kiralni multiplet ϕ_1.
12. *a*) Pokazati da simetričan proizvod $\phi_1{\cdot}\phi_2$ dva kiralna multipleta, zadat relacijom (9.30*b*), predstavlja kiralni multiplet.
b) Pokazati da simetričan proizvod $\phi_1 \times \phi_2$ dva kiralna multipleta, zadat relacijom (9.31*b*), predstavlja opšti realni multiplet.
13. Dokazati relaciju:

$$
(\bar{\varepsilon}\psi_1)(\bar{u}\psi_2) - (\bar{\varepsilon}\gamma_5\psi_1)(\bar{u}\gamma_5\psi_2) + (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) = -(\bar{\psi}_1\psi_2)(\bar{u}\varepsilon) + (\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_2)(\bar{u}\gamma_5\varepsilon)\,.
$$

14. Naći oblik Ves–Zuminovog lagranžijana za masenu, interagujuću teoriju prelazeći na varijable $\widetilde{F} = F + [mA - g(A^2 - B^2)]$, $\widetilde{G} = G + [mB - 2gAB]$. Zatim odrediti oblik SS transformacija za $\widetilde{F}$ i $\widetilde{G}$.
15. Naći Neterinu struju koja odgovara SS transformacijama za interagujući Ves–Zuminov model.
16. Dokazati ekvivalentnost raznih oblika jednačine kretanja za bezmaseno polje spina $\frac{3}{2}$ navedenih u (9.38).

17. Dokazati da su veličine $P_{\mu\nu}, L_{\mu\nu}$ i $\Lambda_{\mu\nu}$, definisane u jednačini (9.43), projektori, tj. da zadovoljavaju relacije:

$$
\begin{aligned}
&P_{\mu\nu} + L_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\,, \\
&P_{\mu\nu}L^{\nu\lambda} = 0\,, \qquad P_{\mu\nu}\Lambda^{\nu\lambda} = 0\,, \qquad L_{\mu\nu}\Lambda^{\nu\lambda} = 0\,, \\
&P_{\mu\nu}P^{\nu\lambda} = P_\mu{}^\lambda\,, \qquad L_{\mu\nu}L^{\nu\lambda} = L_\mu{}^\lambda\,, \qquad \Lambda_{\mu\nu}\Lambda^{\nu\lambda} = \Lambda_\mu{}^\lambda\,.
\end{aligned}
$$

18. Naći eksplicitan doprinos članova oblika $\mathcal{O}(f)$ u komutatoru (9.49). Rezultat uporediti sa (9.58c).
19. Proveriti uslov konzistentnosti $D_\mu F^\mu = 0$ jednačine kretanja za gravitino.
20. Pokazati da se jednačine kretanja za gravitino mogu napisati u sledećim ekvivalentnim oblicima:

$$
\begin{aligned}
&F^\mu \equiv i\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\psi_\lambda = 0\,, \\
&2ib\sigma^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} = -\gamma\cdot F\,, \\
&ib\gamma^\rho\psi_{\rho\mu} = -\big(F_\mu - \tfrac{1}{2}\gamma_\mu\gamma\cdot F\big)\,, \\
&i(\gamma_\alpha\psi_{\beta\mu} + \gamma_\mu\psi_{\alpha\beta} + \gamma_\beta\psi_{\mu\alpha}) = \varepsilon_{\rho\alpha\beta\mu}\gamma_5 F^\rho\,,
\end{aligned}
$$

gde je $\psi_{\mu\nu} \equiv D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu$.

21. Dokazati da veličina $R^i{}_{\lambda\mu} = C^i{}_{\lambda\mu} - T^i{}_{\lambda\mu}$ ima sledeće zakone transformacije:

$$
\begin{aligned}
&\delta_T R^i{}_{\lambda\mu} = -a^\rho\partial_\rho R^i{}_{\lambda\mu} - a^\rho{}_{,\mu}R^i{}_{\lambda\rho} - a^\rho{}_{,\lambda}R^i{}_{\rho\mu}\,, \\
&\delta_L R^i{}_{\lambda\mu} = \omega^i{}_s R^s{}_{\lambda\mu} + \omega^i{}_{s,\lambda}b^s{}_\mu - \omega^i{}_{s,\mu}b^s{}_\lambda\,, \\
&\delta_S R^i{}_{\lambda\mu} = i\kappa\big[-\bar\varepsilon\gamma^i(D_\mu\psi_\lambda - D_\lambda\psi_\mu) + A^{is}{}_\mu\bar\varepsilon\gamma_s\psi_\lambda - A^{is}{}_\lambda\bar\varepsilon\gamma_s\psi_\mu\big]\,.
\end{aligned}
$$

Zatim iz relacije $A^{ij}{}_\mu = \frac{1}{2}(R^{ijm} - R^{mij} + R^{jmi})b_{m\mu}$ odrediti pravila transformacije koneksije $A^{ij}{}_\mu$.

22. a) Izračunati komutator dve SS transformacije na polju $b^i{}_\mu$ u teoriji bez pomoćnih polja.
b) Koristeći rezultat (9.58b) za komutator dve SS transformacije na ψ, izračunati odgovarajući oblik komutatora $[\delta_1, \delta_2]\bar\psi$.
23. a) Naći algebru SS transformacija (9.60) linearizovane supergravitacije sa pomoćnim poljima.
b) Pokazati da je dejstvo linearizovane supergravitacije sa pomoćnim poljima dato izrazom (9.59).
U oba slučaja koristiti poznate rezultate za teoriju bez pomoćnih polja.

GLAVA X

KALUCA–KLAJNOVA TEORIJA

U Ajnštajnovoj OTR prostor i vreme su ujedinjeni u prostor–vreme, koji po svojoj matematičkoj strukturi predstavlja četvorodimenzioni Rimanov prostor V_4. Gravitacija je, u skladu sa principom ekvivalencije, efekat koji potiče od geometrije: probne čestice se kreću po geodezijskim linijama prostora V_4. Veoma brzo posle nastanka i eksperimentalne provere Ajnštajnove teorije, Kaluca (Kaluza, 1921) je predložio da se prostor–vremenu doda *peta dimenzija*, sa ciljem da se postigne jedinstven opis gravitacionih i elektromagnetnih pojava. Mada su fizički efekti gravitacije i elektromagnetizma veoma različiti (gravitaciona interakcija deluje na sva tela, dok elektromagnetna deluje samo na ona koja su naelektrisana), Kaluca je pokazao da obe interakcije mogu nastati kao manifestacija petodimenzione OTR. U ovoj teoriji čestice se kreću po geodezijskim linijama u petodimenzionom Rimanovom prostoru V_5, pri čemu se ove putanje u četvorodimenzionom prostor–vremenu vide kao putanje čestica na koje deluju i gravitaciona i elektromagnetna interakcija.

Kalucina razmatranja bila su orijentisana na konstrukciju klasične teorije gravitacije i elektrodinamike. Prve analize ove teorije sa gledišta kvantne mehanike dao je Klajn (Klein, 1926). Kasnije su istraživanja proširena na veći broj dimenzija, čemu odgovara ujedinjenje OTR i neabelovih lokalno invarijantnih teorija. Uobičajeni naziv za višedimenzione teorije gravitacije ovog tipa je Kaluca–Klajnove (KK) teorije.

U radovima Kaluce i Klajna nije bilo jasno da li je peta dimenzija fizički realna, ili je pretpostavka o njenom postojanju samo matematički pogodan način dobijanja jedinstvene teorije, posle čega se njen fizički značaj potpuno gubi. Danas je uobičajeno da se peta dimenzija shvati kao realna, a objašnjenje činjenice da ona nije direktno opažena nalazi se u pretpostavci da je prostor duž pete dimenzije "savijen u krug" tako malog poluprečnika, da se praktično ne može opaziti. Ova pretpostavka se koristi i u slučaju slabog gravitacionog polja, tako da se struktura prostora V_5 bitno razlikuje od M_5: on se može zamisliti kao prostor V_4 u čijoj je svakoj tački "prikačen" mali krug koji opisuje petu dimenziju. Dodatne komponente metričkog tenzora predstavljaju elektromagnetne potencijale, pa petodimenziona KK teorija ujedinjuje OTR i elektrodinamiku.

Interes za Kalucine ideje oživeo je ponovo u poslednjih dvadesetak godina, prateći postignuti napredak u razumevanju strukture osnovnih interakcija. Razloga za ovaj interes ima više. Prvo, pošto se elektroslaba i jaka interakcija uspešno opisuju kao lokalno invarijantne teorije, KK teorija omogućava razmatranje njihovog ujedinjenja sa gravitacijom. Zatim, postojanje osnovnog stanja, koje nema oblik Minkovskijevog prostora (nije maksimalno simetrično), može se danas lakše razumeti kao efekat spontanog narušenja simetrije. Najzad, ideja supergravitacije daje KK teoriji mogućnost geometrijskog opisa kako gradijentnih polja, tako i spinorske materije.

I pored nesumnjivog napretka, realizacije ovih ideja praćene su mnogim teškoćama, tako da ni danas, posle više od sedamdeset godina, ne postoji realistična KK teorija. Pa ipak, osećajući da je u ovim idejama sadržan deo istine o prirodi, fizičari nastavljaju sa njihovim izučavanjem, jer "teško je verovati da te relacije, čije se formalno slaganje teško može prevideti, nisu ništa drugo do primamljiva igra ćudljive prirode" (Kaluca, 1921).

1. OSNOVNE IDEJE

Izlaganje osnovnih ideja višedimenzione teorije gravitacije počećemo od teorije u pet dimenzija. Petodimenziona KK teorija ima kao osnovni motiv ujedinjenje gravitacije i elektrodinamike. Ostvarenje ovog cilja zahteva dublje shvatanje uloge osnovnog stanja u teoriji gravitacije (vidi, na primer, Orzalesi, 1981; Witten 1981*a*; Macklenburg, 1983; Bailin i Love, 1987; Freedmann i Nieuwenhuizen, 1985).

1.1 Gravitacija u pet dimenzija

Petodimenziona KK teorija ima sledeću osnovnu strukturu. Neka je V_5 petodimenzioni Rimanov prostor odredjen metrikom $\hat{g}_{MN}$ i signaturom $(+,-,-,-,-)$. Veliki latinski indeksi ($M, N, ... = 0,1,2,3,5$) predstavljaju, po konvenciji, koordinatne indekse u V_5, a grčki indeksi ($\mu,\nu,... = 0,1,2,3$) su, kao i ranije, odgovarajući indeksi u četvorodimenzionom Rimanovom prostoru V_4. Dinamika teorije je zadata Ajnštajn–Hilbertovim dejstvom,

$$I_G = -\frac{1}{2\hat{\kappa}}\int d^5z\sqrt{\hat{g}}\,\widehat{R}\,, \tag{10.1}$$

gde je $z^M = (x^\mu, y)$, $\hat{g} = \det(\hat{g}_{MN})$, $\widehat{R}$ je skalarna krivina, a $\hat{\kappa}$ gravitaciona konstanta u V_5. Mogućnost uvodjenja dodatnih polja materije biće razmatrana kasnije. Jednačine kretanja imaju oblik petodimenzionih Ajnštajnovih jednačina,

$$\widehat{R}_{MN} = 0\,.$$

Dejstvo (10.1) je invarijantno u odnosu na opšte koordintne transformacije

$$z'^M = z'^M(z)\,, \qquad \hat{g}'_{MN}(z') = \frac{\partial z^R}{\partial z'^M}\frac{\partial z^L}{\partial z'^N}\hat{g}_{RL}(z)\,.$$

Kalucin mehanizam. Da bi osigurao neopservabilnost pete dimenzije, Kaluca je uveo *pretpostavku* da u prostoru V_5 postoji koordinatni sistem u kome metrički tenzor ne zavisi od pete koordinate,

$$\partial_y \hat{g}_{MN} = 0\,, \tag{10.2a}$$

i nazvao ovaj uslov "uslovom cilindričnosti". Uslov (10.2a) nije kovarijantan, jer se njegov oblik menja pri opštim koordinatnim transformacijama. Postoji, medjutim, široka klasa koordinatnih sistema u kojima ovaj uslov važi. Iz zakona transformacije metričkog tenzora sledi da je, posle prelaza na novi koordinatni sistem, uslov (10.2a) i dalje ispunjen ako parcijalni izvodi ($\partial x'^\mu/\partial x^\lambda$, $\partial x'^\mu/\partial y$, $\partial y'/\partial x^\lambda$, $\partial y'/\partial y$) ne zavise od y. Odavde se vidi da tražene transformacije imaju oblik $x'^\mu = x'^\mu(x)$, $y' = \rho y + \varepsilon(x)$, gde je ρ proizvoljna konstanta.

Metrički tenzor $\hat{g}_{MN}$ ima 15 komponenti, koje se pri $4+1$ razlaganju mogu grupisati na sledeći način: $\hat{g}_{MN} = (\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{g}_{\mu 5}, \hat{g}_{55})$. Polazeći od ideje da će 10 komponenti $\hat{g}_{\mu\nu}$ opisivati *gravitaciju*, a 4 komponente $\hat{g}_{\mu 5}$ *elektromagnetno polje*, komponenta $\hat{g}_{55}$ se pojavljuje kao suvišan stepen slobode. Sledeći ideje iz ranog perioda razvoja teorije pretpostavićemo da se ova komponenta može eliminisati nametanjem *dodatnog uslova*:

$$\hat{g}_{55} = -1\,. \tag{10.2b}$$

Negativan znak ove veličine je povezan sa činjenicom da je peta koordinata prostornog tipa. Ovaj uslov ograničava vrednost konstante ρ u dobijenom zakonu transformacije na jedinicu:

$$x' = x'(x)\,, \qquad y' = y + \varepsilon(x)\,. \tag{10.3a,b}$$

Oblik metrike. Da bismo proverili prethodnu sugestiju o fizičkoj interpretaciji komponenti metričkog tenzora, potražićemo njihove zakone transformacija. Iz opšteg zakona transformacije metrike sledi da se, u odnosu na transformacije (10.3a), komponente $\hat{g}_{\mu\nu}$ i $\hat{g}_{\mu 5}$ trasformišu po pravilu

$$\hat{g}'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\,\hat{g}_{\lambda\rho}\,, \qquad \hat{g}'_{\mu 5} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\,\hat{g}_{\lambda 5}\,,$$

tj. kao četvorodimenzioni tenzori ranga dva i jedan, redom, što je u skladu sa našim očekivanjima. Dalje, iz (10.3b) sledi

$$\begin{aligned}
\hat{g}'_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu} - \partial_\mu\varepsilon\,\hat{g}_{\nu5} - \partial_\nu\varepsilon\,\hat{g}_{\mu5} - \partial_\mu\varepsilon\,\partial_\nu\varepsilon\,,\\
\hat{g}'_{\mu5} &= \hat{g}_{\mu5} + \partial_\mu\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Formalno, polje $\hat{g}_{\mu5}$ se transformiše kao elektromagnetni potencijal u odnosu na gradijentne transformacije. Ako se podsetimo da su gradijetne transformacije u elektrodinamici, ustvari, lokalne $U(1)$ transformacije, vidimo da identifikacija zakona transformacije polja $\hat{g}_{\mu5}$ sa lokalnom $U(1)$ transformacijom zahteva da prostor V_5 duž koordinate y ima strukturu *kruga*. Tek tada se transformacije pete, prostorne koordinate mogu interpretirati kao gradijentne transformacije u elektrodinamici. S druge strane, metrika četvorodimenzionog prostora treba da bude invarijantna u odnosu na ove transformacije, što nije slučaj sa $\hat{g}_{\mu\nu}$. Šta je onda metrika fizičkog prostora V_4? Na prvi pogled problem ne izgleda jednostavan, ali njegovo rešenje ipak nije tako komplikovano. Zaista, ako uočimo da je kombinacija

$$g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu5}\hat{g}_{\nu5}$$

invarijantna u odnosu na transformaije (10.3b), postaje jasno da je $g_{\mu\nu}$ dobar kandidat za ulogu metrike četvorodimenzionog prostora V_4. Koristeći veličine $g_{\mu\nu}$ i $\hat{g}_{\mu5} \equiv -B_\mu$, koje imaju direktnu fizičku interpretacju, polazna metrika petodimenzionog prostora dobija oblik

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - B_\mu B_\nu & -B_\mu \\ -B_\nu & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.4a}$$

Odavde se lako izračunavaju komponente inverzne metrike:

$$\hat{g}^{MN} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -B^\mu \\ -B^\nu & -1 + B_\lambda B^\lambda \end{pmatrix}, \tag{10.4b}$$

gde je $g^{\mu\nu}$ inverzna metrika od $g_{\mu\nu}$, a $B^\mu = g^{\mu\nu}B_\nu$. Indeksi četvorodimenzionih tenzora biće dizani i spuštani uz pomoć $g^{\mu\nu}$ i $g_{\mu\nu}$.

Redukovano dejstvo. Interesantno je naći oblik dejstva koristeći nove varijable $g_{\mu\nu}$ i B_μ, i uslov cilindričnosti. Izračunavanje Kristofelove koneksije $\hat{\Gamma}^M_{NR}$ dovodi do relacija

$$\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \tfrac{1}{2}\left(F^\mu{}_\nu B_\rho + F^\mu{}_\rho B_\nu\right),\\
&\hat{\Gamma}^5_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_\nu B_\rho + \nabla_\rho B_\nu\right) - \tfrac{1}{2}B^\lambda\left(F_{\lambda\nu}B_\rho + F_{\lambda\rho}B_\nu\right),\\
&\hat{\Gamma}^5_{5\rho} = -\tfrac{1}{2}B^\lambda F_{\lambda\rho}\,, \qquad \hat{\Gamma}^\mu_{5\rho} = \tfrac{1}{2}F^\mu{}_\rho\,, \qquad \hat{\Gamma}^\mu_{55} = \hat{\Gamma}^5_{55} = 0\,,
\end{aligned} \tag{10.5a}$$

gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Posle direktnog računa dobija se rezultat

$$\begin{aligned}
&\widehat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}(B_\mu \nabla_\rho F^\rho{}_\nu + B_\nu \nabla_\rho F^\rho{}_\mu) + \tfrac{1}{4}B_\mu B_\nu F^2 + \tfrac{1}{2}F^\rho{}_\mu F_{\rho\nu}\,, \\
&\widehat{R}_{\mu 5} = \tfrac{1}{2}\nabla_\rho F^\rho{}_\mu + \tfrac{1}{4}B_\mu F^2\,, \qquad \widehat{R}_{55} = \tfrac{1}{4}F^2\,,
\end{aligned} \tag{10.5b}$$

gde se $R_{\mu\nu}$ odnosi na prostor V_4, a $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Odavde sledi

$$\widehat{R} = R + \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,. \tag{10.5c}$$

Koristeći, dalje, jednakost $\sqrt{\hat{g}} = \sqrt{-g}$, vidimo da podintegralni izraz u dejstvu (10.1) ne zavisi od y. Da bi dejstvo bilo konačno, mora se pretpostaviti da je oblast definisanosti pete koordinate konačna. Jednostavan način da se ova osobina ostvari je korišćenje mnogostrukosti V_5 u kojoj oblast pete koordinete ima (topološki) strukturu *kruga*, $0 \le y \le L$, što je u skladu sa interpretacijom varijable $\hat{g}_{\mu 5}$ kao elektromagnetnog potencijala. Tako ponovo otkrivamo da prostor V_5, bar lokalno, ima strukturu $V_4 \times S_1$, gde je V_4 standardno, četvorodimenziono prostor–vreme, a S_1 krug. Tada integracija po y u (10.1) daje sledeće redukovano dejstvo četvorodimenzione teorije:

$$I_G^{(0)} = -\frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\,\left(R + \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\,, \qquad \kappa \equiv \hat{\kappa}/L\,. \tag{10.6a}$$

Iz fizičke interpretacije ovog dejstva sledi da je κ četvorodimenziona gravitaciona konstanta odredjena uslovom $\sqrt{\kappa\hbar/8\pi c^3} = 1.6 \times 10^{-33}$ cm. S druge strane, očigledno je da elektromagnetni deo dejstva nije dobro normalizovan. Činjenica da je B_μ bezdimenziona veličina dok elektromagnetni potencijal ima dimenziju mase, motiviše sledeću definiciju:

$$B_\mu = fA_\mu\,, \qquad f^2 = 2\kappa\,, \tag{10.6b}$$

gde uslov $f^2/2\kappa = 1$ osigurava standardni oblik elektromagnetnog dejstva: $-\frac{1}{4}F^2(A)$. Posmatranjem kretanja probnih čestica dobićemo informacije o veličini pete dimenzije.

Dok je početno dejstvo invarijantno u odnosu na opšte petodimenzione koordinatne transformacije, prelaz na Kalucinu metriku smanjuje ovu simetriju na oblik (10.3). Zbog uslova cilindričnosti (10.2a), sve što preostaje od pete dimenzije je povećan broj polja u $d = 4$. Tako se iz početne petodimenzione teorije dobija redukovano četvorodimenziono dejstvo koje opisuje gravitaciju i elektrodinamiku. Ovaj postupak, u kome je zavisnost dinamičkih varijabli od pete koordinate potpuno ignorisana već na nivou dejstva, naziva se *dimenziona redukcija*. Druga mogućnost se sastoji u prihvatanju pete dimenzije kao realne karakteristike dinamike. Tada sve osobine metrike, uključujući i dodatni uslov (10.2b), moraju biti dobijene iz petodimenzionih jednačina kretanja. Ovakav pristup je poznat kao *spontana kompaktifikacija*, i on daje mnogo veću prirodnost i snagu ideji višedimenzione gravitacije.

I pored izvanredno interesantnog rezultata (10.6), treba primetiti da Kalucina ideja ima i odredjene slabosti (Vasilić, 1989).

1. Fizički smisao pete koordinate nije jasan (nejasno je da li ona predstavlja fizičku realnost, ili samo matematičko sredstvo za dobijanje efektivne četvorodimenzione teorije).
2. Uslov cilindričnosti, koji omogućava neopservabilnost pete dimenzije, nema prirodno objašnjenje.
3. Komponenta metrike $\hat{g}_{55}$ je eliminisana iz teorije nametanjem uslova $\hat{g}_{55} = -1$. Ovakav postupak nije konzistentan sa gledišta polazne petodimenzione teorije, jer se time gubi jednačina kretanja $\widehat{R}_{55} = 0$ koja odgovara variranju polaznog dejstva po $\hat{g}_{55}$.
4. U geometrijsko ujedinjenje gravitacije i elektrodinamike nije uključena materija.
5. Teorija je klasična, i ne objašnjava kvantnu prirodu osnovnih interakcija.
6. U teoriji nisu opisane slabe i jake interakcije.

Primedba 6 je data sa aspekta današnjeg razumevanja prirode osnovnih fizičkih interakcija. U narednom izlaganju ćemo pokazati kako se, u okviru petodimenzione teorije, mogu otkloniti prve tri primedbe. Uključivanje slabih i jakih interakcija u jedinstvenu sliku fizičkih interakcija zahteva prelaz na teoriju sa više od pet dimenzija, i biće razmatrano u trećem odeljku ove glave. Mogućnost prevazilaženja primedbe 4 data je u supersimetrizaciji KK teorije. Pravo razjašnjenje primedbi 4 i 5 nalazi se van okvira ovog izlaganja, mada će neki aspekti problema biti usput pomenuti.

1.2 Osnovno stanje i stabilnost

Za razumavanje fizičkog sadržaja dinamičkog sistema veoma je važno naći *osnovno stanje*, ili *vakuum*. Da bi rešenje jednačina kretanja bilo osnovno stanje, ono mora biti stabilno. Tada se mnoge fizičke karakteristike mogu odrediti posmatranjem ekscitacija polja oko osnovnog stanja.

Izgleda prirodno pretpostaviti da je osnovno stanje teorije (10.1) petodimenzioni Minkovskijev prostor M_5. Medjutim, lako se vidi da takva pretpostavka ne može biti dobra, jer nas celokupno iskustvo uči da prostor u kome živimo nije ni približno oblika M_5. Osnovna ideja Kaluce i Klajna se može izraziti pretpostavkom da je pravi vakuum teorije proizvod četvorodimenzionog Minkovskijevog prostora i kruga:

$$(V_5)_0 = M_4 \times S_1 \,.$$

Pretpostavljajući da je dimenzija ovog kruga veoma mala, peta dimenzija postaje neopservabilna u standardnim eksperimentima.

U većini teorija osnovno stanje se definiše kao *stabilno* rešenje jednačina kretanja koje ima *najnižu energiju*. Napomenimo da pojam stabilnosti nije isti u klasičnoj i kvantnoj teoriji. Ova definicija, kao što ćemo videti, nije dovoljno dobra u gravitaciji. Imajući na umu važnost osnovnog stanja za fizičku interpretaciju teorije, razmotrićemo ovo pitanje sa više pažnje.

Klasičan vakuum. U klasičnoj teoriji pozitivnost energije ima veoma važnu ulogu pri razmatranju stabilnosti vakuuma. Energija obično ima oblik $E = \int d^3x\, T_{00}$, gde je $T_{00} \geq 0$ za sve konfiguracije osim za vakuum, i $T_{00} = 0$ u vakuumu. Iz očuvanja energije sledi stabilnost vakuuma: pošto je u vakuumu $E = 0$, nema druge konfiguracije u koju bi on mogao preći, poštujući zakon održanja energije. Pored vakuuma, u teoriji mogu postojati i druga klasično stabilna rešenja, koja se karakterišu uslovom da u njima energija ima *lokalni minimum*.

Dalje izlaganje biće ilustrovano razmatranjem jednostavnog primera skalarnog polja u 1+1 dimenzija: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - V(\phi)$. Hamiltonijan teorije je dat izrazom

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\tfrac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi)\right].$$

Uslov da je energija ograničena odozdo može se, bez gubitka opštosti, zameniti uslovom *pozitivnosti energije*: $E \geq 0$. Da bismo osigurali ovaj uslov, posmatraćemo teorije u kojima je $V(\phi) \geq 0$. Zahtev da energija bude *konačna*, implicira sledeće granične uslove:

$$\partial_t\phi\,,\ \partial_x\phi\,,\ V(\phi) \to 0 \qquad \text{pri} \quad x \to \pm\infty\,.$$

Drugim rečima, na beskonačnosti polje ϕ teži konstantnoj vrednosti, a granične vrednosti polja su apsolutni minimumi potencijala $V(\phi)$:

$$x \to \pm\infty\ : \qquad \phi \to \phi_\pm\,, \quad V(\phi_\pm) = 0\,.$$

Konstante ϕ_- i ϕ_+ ne moraju biti jednake.

Klasičan vakuum ϕ_0 je rešenje jednačina kretanja koje ima najnižu energiju, $E_0 = 0$. Iz oblika hamiltonijana sledi da ϕ_0 zadovoljava uslove

$$\partial_t\phi_0 = 0\,, \qquad \partial_x\phi_0 = 0\,, \qquad V(\phi_0) = 0\,.$$

Drugim rečima, ϕ_0 je konstantno polje za koje $V(\phi)$ ima apsolutni minimum. Uzimajući u obzir i granične uslove, sledi da je $\phi_0 = \phi_- = \phi_+$.

Klasični vakuum spada u stabilna rešenja jednačina kretanja. Njegov značaj i dinamička uloga postaju mnogo jasniji posle opšte analize svih stabilnih rešenja posmatrane teorije. Bez gubitka opštosti, ograničićemo se na analizu stabilnosti u skupu statičkih rešenja. *Statička rešenja* $\phi_0(x)$ jednačina kretanja su takve konfiguracije polja za koje potencijal $W[\phi] = \int dx\left[\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi)\right]$ ima ekstremum:

$$\frac{\delta W[\phi]}{\delta\phi} = -\partial_x^2\phi + V'(\phi) = 0\,.$$

Treba primetiti da je potencijal $W[\phi]$ jednak sa hamiltonijanom statičkih rešenja. Stabilna rešenja odgovaraju minimumu potencijala, tj. minimumu statičke energije.

(1) Ako $W[\phi]$ ima *jedan minimum*, tada postoji samo jedno statičko rešenje, $\phi_0(x) = v$, i ono predstavlja klasičan vakuum teorije. Ovakva situacija se realizuje u standardnoj ϕ^4 teoriji, $V(\phi) = (\lambda/4)\phi^4$, $\lambda > 0$.

(2) Interesantniji slučaj je kada $W[\phi]$ ima *više minimuma*.

a) Ako je rešenje ϕ_0 *apsolutni minimum* potencijala $W[\phi]$ (možda degenerisan), ono predstavlja klasičan vakuum teorije. Jednostavan primer je teorija zadata izrazom $V(\phi) = (\lambda/4)(\phi^2 - v^2)^2$, $\lambda > 0$. Za ovu teoriju granični uslovi imaju oblik $\phi_\pm = \pm v$. Potencijal $W[\phi]$ ima dva apsolutna minimuma, $\phi_0 = \pm v$, pa je klasičan vakuum degenerisan. Pošto nijedno od vakuumskih rešenja nije invarijantno u odnosu na simetriju lagranžijana $\phi \to -\phi$, ova situacija opisuje spontano narušenje simetrije.

b) Rešenje ϕ_0 može biti samo *lokalni minimum* potencijala $W[\phi]$. Takva rešenja su od posebnog značaja pri razmatranju kvantnih efekata. Njihova priroda se može ilustrovati na prethodnom primeru. Uočimo, najpre, da u ovom slučaju postoje četiri različita tipa graničnih uslova koje neko rešenje može zadovoljavati; označićemo ih sa $(-v, -v)$, $(+v, +v)$, $(-v, +v)$ i $(+v, -v)$, gde prva vrednost u zagradi predstavlja graničnu vrednost rešenja pri $x \to -\infty$, a druga graničnu vrednost pri $x \to +\infty$. Prema tipu graničnih uslova skup svih rešenja se može podeliti na četiri sektora. Prva dva uslova definišu sektore koji odgovaraju pravom klasičnom vakuumu ($\phi = -v$ ili $\phi = +v$ za svako x), a treći i četvrti sektore netrivijalnih statičkih rešenja. Nije teško naći eksplicitan oblik ovih rešenja, koja se nazivaju kink i antikink, redom. Ova rešenja odgovaraju lokalnom minimumu potencijala $W[\phi]$, i imaju najnižu energiju u datom sektoru (Felsager, 1981; Rajaraman, 1982).

Klasična stabilnost. Klasična stabilnost statičkog rešenja dinamički se utvrdjuje posmatranjem malih fluktuacija oko $\phi_0(x)$:

$$\phi(t,x) = \phi_0(x) + \eta(t,x)\,, \qquad |\eta(t,x)| \ll |\phi_0(x)|\,.$$

Koristeći razvoj $\eta(t,x) = \sum_k \eta_k(x)\exp(-i\omega_k t)$ po kompletnom skupu statičkih rešenja $\eta_k(x)$, jednačina kretanja za $\phi(t,x)$ postaje

$$\left[-\partial_x^2 + V''(\phi_0)\right]\eta_k(x) = \omega_k^2 \eta_k(x)\,.$$

Pošto je operator $[-\partial_x^2 + V''(\phi_0)]$ hermitski, modovi η_k su medjusobno ortogonalni, a ω_k^2 je realno. Da bi statičko rešenje bilo stabilno, potrebno je da učestanosti svih modova ω_k budu realne, tj. $\omega_k^2 \geq 0$. Zaista, pojava imaginarnih učestanosti ω_k znači pojavu eksponencijalnih faktora $\exp(\mp|\omega_k|t)$ koji za neke vrednosti vremena t postaju neograničeno veliki, čime se narušava stabilnost. Treba napomenuti da u slučaju postojanja nultih modova,

$\omega_k = 0$, prethodna analiza stabilnosti postaje nekonzistentna i mora biti izmenjena.

Uslov stabilnosti se može izraziti i kao uslov na energiju sistema. Neka je $\phi_0(x)$ statičko rešenje za koje hamiltonijan $H[\phi] = \int dx[\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi)]$ ima minimum. Pri variranju $\phi_0(x)$ u skupu statičkih funkcija, $\phi_0(x) \to \phi(x) = \phi_0(x) + \varepsilon\eta(x)$, promena energije iznosi

$$H[\phi_0] \to H[\phi] \approx H[\phi_0] + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \int dx\eta(x)\big[-\partial_x^2 + V''(\phi_0)\big]\eta(x)\,.$$

Koristeći razvoj $\eta(x)$ po ortonormiranim modovima, $\eta(x) = \sum a_k\eta_k(x)$, prethodna relacija postaje

$$\delta H[\phi_0] \approx \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_k a_k^2\omega_k^2\,.$$

Ako svi modovi zadovoljavaju uslov $\omega_k^2 > 0$, energija u stanju $\phi_0(x)$ ima lokalni minimum, odakle sledi stabilnost. Pojava nultih modova, kao što smo pomenuli, predstavlja signal za promenu metoda ispitivanja stabilnosti.

Nulti modovi su rešenja $\eta_k(x)$ sa učestanošću $\omega_k = 0$. Oni su obično povezani sa činjenicom da postoji više statičkih konfiguracija koje imaju istu energiju, a medjusobno su povezane nekom neprekidnom simetrijom. Tada deformacija osnovnog stanja $\phi_0(x)$, koja realizuje operaciju simetrije, odgovara pojavi nultog moda. Posmatrana skalarna teorija ima translacionu simetriju, iz čega sledi da konfiguracije $\phi_0(x)$ i $\phi_0(x+\varepsilon) = \phi_0(x) + \varepsilon\partial_x\phi_0(x)$ imaju istu energiju, tj. perturbacija duž $\partial_x\phi_0(x)$ ne menja energiju sistema. S druge strane, diferenciranjem jednačine kretanja za $\phi_0(x)$ po x dobija se relacija

$$\big[-\partial_x^2\phi_0(x) + V''(\phi_0)\big]\partial_x\phi_0(x) = 0\,,$$

iz koje se vidi da je $\partial_x\phi_0(x)$ zaista nulti mod.

Prethodna analiza se može uopštiti na složenije dinamičke sisteme.

Kvaziklasična nestabilnost. Direktno uopštenje klasične teorije perturbacija dovodi nas, u procesu kvantizacije, do metode *perturbativne* kvantizacije, koja daje sledeće rezultate:

– Svojstvene vrednosti energije su oblika $E_n = W[\phi_0] + (n+\frac{1}{2})\hbar\omega + \cdots$.
– Energija vakuuma je $E_0 = W[\phi_0] + \frac{1}{2}\hbar\omega + \cdots$.
– Osnovno stanje $\psi_0(x)$ je lokalizovano, u smislu da je, na primer, srednja vrednost koordinate x oblika $\langle x\rangle = \int dx|\psi_0(x)|^2 x = v + \cdots$.

Slična "aproksimacija harmonijskog oscilatora" se može primeniti i u blizini lokalnog minimuma $\phi_0(x)$. Ovakva perturbativna metoda je primenljiva

– ako je lokalni minimum $\phi_0(x)$ stabilan (ovo uključuje i razmatraje nultih modova), i
– ako je interakcija "mala".

Slika kvantne teorije, koju daje perturbativna metoda, nije uvek korektna. Kvantizacija u *kvaziklasičnoj* aproksimaciji ($\hbar \approx 0$) pokazuje da mogu postojati efekti *tuneliranja*, zbog čega se perturbativno izračunati nivoi energije u različitim minimumima menjaju. Kvantni vakuum je ono stanje koje ima najnižu kvantnu energiju. Tuneliranje je neperturbativni efekat koji se u teoriji polja najpogodnije ispituje pomoću lokalizovanih rešenja odgovarajuće euklidske teorije (instantoni) (Coleman, 1977).

U kvantnoj teoriji je, dakle, moguć prelaz iz jednog u drugi lokalni minimum; ako se to desi, govorimo o kvaziklasičnoj nestabilnosti posmatrane statičke konfiguracije.

Gravitaciona energija. Problem definisanja gravitacione energije ima dugu istoriju, i javlja se još u periodu nastanka OTR. Konfuzije oko razumevanja pojma energije nastaju iz nekoliko razloga (Abbot i Deser, 1982; Blagojević i Vasilić, 1988).

Opšta kovarijantnost (lokalna translaciona simetrija) znači da ne postoji apsolutno vreme u odnosu na koje bi hamiltonijan, pa prema tome i energija, bili definisani. Takodje, ne postoji ni apsolutni prostor, pa pojam lokalne gustine energije gubi smisao. Mada su ovi iskazi tačni, razmatranja iz glave V nas uveravaju da time, ipak, nismo sprečeni da korektno definišemo pojam gravitcione energije. Teorija je definisana ne samo jednačinama kretanja, već i graničnim uslovima. Opšta kovarijantnost opisuje simetriju dejstva, a fizičke simetrije su definisane kao simetrije dejstva i graničnih uslova (spontano narušenje simetrije). Za date granične uslove vreme se definiše preko asimptotske simetrije, što omogućava uvodjenje pojma energije za dinamičke sisteme sa kovarijantnim dejstvom.

Pošto definicija gravitacione energije zahteva odredjene granične uslove, energetski se mogu porediti samo ona rešenja koja imaju iste granične uslove.

Tako se, na primer, medjusobno mogu porediti sva rešenja koja asimptotski opisuju Minkovskijev prostor M_4, i tu moramo stati (Witten, 1981a).

Imajući u vidu prethodna ograničenja, može se razumeti pravi smisao teoreme o pozitivnosti klasične gravitacione energije. Posmatrajmo, kao tipičan primer, rešenja Ajnštajnovih jednačina koja asimptotski opisuju prostor M_4. Ako možemo dokazati da sva rešenja različita od M_4 imaju pozitivnu energiju, dok je energija od M_4 jednaka nuli, onda sledi da je rešenje koje opisuje Minkovskijev prostor stabilno. Ne ulazeći u detalje pomenućemo da za Ajnštajnovu teoriju postoji više različitih dokaza ove teoreme.

Činjenica da definicija gravitacione energije zavisi od graničnih uslova, ima veliki značaj u analizi oblika osnovnog stanja u KK teoriji. Pošto su u stanjima M_5 i $M_4 \times S_1$ granični uslovi za dinamičke varijable različiti, odgovarajuće energije se uopšte *ne mogu porediti*.

Kao jedini kriterijum za izbor osnovnog stanja u gravitaciji ostaje stabilnost.

Rešenje M_5 je klasično stabilno, pošto teorema o pozitivnosti energije važi i u $d=5$. Eksplicitna provera pokazuje da je i $M_4 \times S_1$ *klasično stabilna* konfiguracija. Postoje rezultati iz kojih sledi da je $M_4 \times S_1$ *kvaziklasično nestabilno* rešenje (Witten, 1982), što znači da postoji efekat tuneliranja. Fizička interpretacija ove situacije bila bi mnogo lakša ako bi se prethodno rešio problem energetskog poredjenja različitih, klasično stabilnih konfiguracija u gravitaciji. Pomenimo da postoji mogućnost eliminacije efekta tuneliranja uvodjenjem dodatnih polja materije.

U daljem izlaganju mi ćemo ostaviti po strani ove interesantne kvantne aspekte petodimenzione teorije, i nastaviti sa analizom njenih klasičnih karakteristika. Treba, medjutim, naglasiti da se pitanje stabilnosti osnovnog stanja mora razjasniti u svakom ozbiljnom pokušaju konstrukcije realistične KK teorije.

2. OPŠTA STRUKTURA PETODIMENZIONE TEORIJE

U prethodnom izlaganju razmotrene su osnovne ideje petodimenzione KK teorije, i osvetljena važna uloga vakuuma u procesu nastanka jedinstvene teorije gravitacije i elektrodinamike. Sada ćemo dati sistematsku analizu geometrijske i fizičke strukture ove teorije (vidi: Zee, 1981; Salam i Strathdee, 1982; Gross i Perry, 1983; Macklenburg, 1983; Duff, Nilsson i Pope, 1986; Bailin i Love, 1987).

2.1 Petodimenziona gravitacija i efektivna teorija

Razmotrićemo, najpre, strukturu petodimenzione teorije gravitacije, i njenu vezu sa odgovarajućom efektivnom teorijom u $d=4$.

Gravitacija u pet dimenzija. Neka je X_5 petodimenziona mnogostrukost sa lokalnim koordinatama z^M. U svakoj tački ove mnogostrukosti definisan je tangentni prostor T_5, a u njemu baza od pet ortonormiranih tangentnih vektora $\hat{\boldsymbol{e}}_I$, $\hat{\boldsymbol{e}}_I\hat{\boldsymbol{e}}_J = \eta_{IJ}$, gde je $\eta_{IJ} = (+,-,-,-,-)$. Skup vektora $\hat{\boldsymbol{e}}_I$ čini lokalnu Lorencovu bazu i naziva se Lorencova pentada. Indeksi $(I, J, ...)$ predstavljaju lokalne Lorencove indekse, dok su $(M, N, ...)$ koordinatni indeksi. Proizvoljan vektor lokalne koordinatne baze $\hat{\boldsymbol{e}}_M$ može se razviti po Lorencovoj bazi, $\hat{\boldsymbol{e}}_M = b^I{}_M\hat{\boldsymbol{e}}_I$, dok je inverzna relacija oblika $\hat{\boldsymbol{e}}_I = h_I{}^M\hat{\boldsymbol{e}}_M$.

U svakom tangentnom prostoru T_5 može se uvesti metrički tenzor na uobičajeni način:

$$\hat{g}_{MN} \equiv \hat{\boldsymbol{e}}_M\hat{\boldsymbol{e}}_N = b^I{}_M b^J{}_N \eta_{IJ} \,.$$

Ako je na X_5 definisana antisimetrična koneksija, $\hat{A}^{IJ}{}_M = -\hat{A}^{JI}{}_M$, teorija dobija strukturu lokalne Poenkareove teorije u $d=5$. Mnogostrukost X_5, snabdevena metrikom i antisimetričnom koneksijom, predstavlja Riman–Kartanov prostor U_5. Dizanje i spuštanje indeksa, kao i prelaz sa lokalnih Lorencovih na svetske indekse, i obratno, vrši se na uobičajen način.

Teorija gravitacije u prostoru U_5 je invarijantna u odnosu na lokalne translacije (opšte koordinatne transformacije) i lokalne Lorencove rotacije $SO(1,4)$. Od veličina $b^I{}_M$ i $\hat{A}^{IJ}{}_M$ se mogu konstruisati odgovarajuće jačine polja: torzija $\widehat{T}^I{}_{MN}$ i krivina $\widehat{R}^{IJ}{}_{MN}$. Pretpostavićemo da je dinamika petodimenzionog gravitacionog polja opisana dejstvom koje je linearno po krivini,

$$I_G = -\frac{1}{2\hat{\kappa}}\int d^5z\,\hat{b}\,\widehat{R}\,(\hat{A})\,, \tag{10.7}$$

gde je $\hat{b}=\det(b^I{}_M)=\sqrt{\hat{g}}$. Polje materije se može uvesti na uobičajen način.

Primer 1. Realno bezmaseno skalarno polje se opisuje dejstvom

$$I_S = \int d^5z\sqrt{\hat{g}}\left(-\tfrac{1}{2}\varphi\widehat{\Box}\varphi\right)\,.$$

Variranjem dejstva I_G+I_S po $\hat{A}$ dobija se $\widehat{T}^I{}_{MN}\equiv D_Mb^I{}_N - D_Nb^I{}_M = 0$. Ova jednačina kretanja je algebarska i može se eksplicitno rešiti po $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{IJ}{}_M = \Delta^{IJ}{}_M \equiv \tfrac{1}{2}\left(C^{IJK}-C^{KIJ}+C^{JKI}\right)b_{KM}\,,$$

gde je $C^I{}_{MN}=\partial_Mb^I{}_N-\partial_Nb^I{}_M$ (Δ su Ričijevi koeficijenti rotacije). Prelazom na svetske indekse ova koneksija postaje Kristofelov simbol $\hat{\Gamma}^M_{NR}$. Tako uslov $\widehat{T}=0$ pretvara prostor U_5 u Rimanov prostor V_5. Zamenom $\hat{A}=\Delta$ u dejstvo dobija se teorija ekvivalentna polaznoj (formalizam drugog reda).

Dinamika bezmasenog Dirakovog polja je odredjena izrazom

$$I_D = \int d^5z\tfrac{1}{2}i\hat{b}\,\bar{\psi}\gamma^K h_K{}^M D_M\psi \;+\; \text{k.k.}\,,$$

gde k.k. označava kompleksno konjugovan član, γ^K su petodimenzione Dirakove matrice, a $D_M\psi=(\partial_M+\frac{1}{2}A^{IJ}{}_M\sigma_{IJ})\psi$ je kovarijantni izvod. Rešenje jednačina kretanja po $\hat{A}$ ima oblik

$$\hat{A}^{IJ}{}_M = \Delta^{IJ}{}_M + K^{IJ}{}_M\,,$$

gde je K tenzor kontorzije koji je bilinearan po $\bar{\psi}$ i ψ. U ovom slučaju koneksija nije Kristofelova, i prostor ostaje U_4. Zamena $\hat{A}=\Delta$ u polazno dejstvo dala bi teoriju koja nije ekvivalentna sa polaznom. Ova teorija, posmatrana za sebe, predstavlja konzistentnu teoriju gravitacije i Dirakovog polja u Rimanovom prostoru V_5.

Osnovno stanje. Pošto korektan kriterijum za izbor *klasičnog* vakuuma u gravitaciji nije poznat, pretpostavićemo da su Kaluca i Klajn u pravu, tj. usvojićemo da je vakum petodimenzione teorije oblika

$$(U_5)_0 = M_4 \times S_1 \,, \tag{10.8a}$$

i ispitaćemo kakve su posledice ove pretpostavke na strukturu teorije.

Označićemo koordinate petodimenzionog prostora sa $z^M = (x^\mu, y)$, gde y opisuje krug, u skladu sa strukturom vakuuma. Metrika vakuuma (10.8a) ima oblik

$$\hat{g}^0_{MN} = \eta_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.8b}$$

koji je jednak sa metrikom Minkovskijevog prostora M_5, što ne treba da izaziva čudjenje: metrika opisuje lokalne karakteristike prostora, koje su kod M_5 i $M_4 \times S_1$ iste. Ova metrika predstavlja rešenje jednačina kretanja petodimenzione teorije, $\widehat{R}_{MN} = 0$. Može se pokazati da je ovo rešenje *klasično stabilno*, čime se potvrdjuje konzistentnost pretpostavke (10.8a).

Činjenica da je osnovno stanje oblika $M_4 \times S_1$ može se razumeti kao efekat spontanog narušenja simetrije. Simetrija prostora M_5 je petodimenziona Poenkareova grupa P_5, dok $M_4 \times S_1$ ima simetriju $P_4 \times U(1)$. Moguća maksimalna simetrija vakuuma P_5 je narušena u simetriju $P_4 \times U(1)$. Pošto metrika vakuuma (10.8a) zadovoljava petodimenzione jednačine kretanja, a mnogostrukost S_1 je kompaktna, pojava osnovnog stanja $M_4 \times S_1$ se naziva *spontana kompaktifikacija*.

Znamo da se OTR u $d = 5$, sa vakuumom oblika M_5, može shvatiti kao teorija zasnovana na lokalizaciji simetrije P_5. Na sličan način se KK teorija sa vakuumom $M_4 \times S_1$ može shvatiti kao teorija koja poseduje *lokalnu* $P_4 \times U(1)$ simetriju. Lokalna P_4 simetrija opisuje gravitaciju u $d = 4$, dok se lokalna $U(1)$ simetrija odnosi na elektrodinamiku. Zato KK teorija i daje ujedinjenje gravitacije i elektrodinamike.

Harmonijski razvoj. Koordinata y opisuje krug pa se može izabrati u obliku $y = r\theta$, gde je r konstanta, a θ je ugao, $0 \le \theta \le 2\pi$. Petodimenziona teorija je zadata skupom varijabli koje definišu dinamiku gravitacionog polja, kao i skupom polja materije. Svako polje $\varphi(x, y)$ se može razviti u red

$$\varphi(x, y) = \sum_n \varphi_n(x) Y_n(y) \,, \tag{10.9a}$$

gde su Y_n ortonormirane svojstvene funkcije operatora $\Box_y = -\partial_y^2$:

$$\begin{aligned} &Y_n(y) = (2\pi r)^{-1/2} e^{-iny/r} \,, \\ &\Box_y Y_n(y) = (n^2/r^2) Y_n(y) \,, \qquad \int dy Y_n^*(y) Y_m(y) = \delta_{nm} \,. \end{aligned} \tag{10.9b}$$

Ovaj razvoj u posmatranom slučaju predstavlja Furijeov razvoj funkcije $\varphi(x, y)$ kao funkcije od $y \in S_1$, pri čemu koeficijenti razvoja zavise od x.

Primer 2. Opšti značaj Furijeovog razvoja za dobijanje fizičke informacije o sistemu ilustrovaćemo na primeru polja metrike. Fizički spektar ekscitacija metrike odredjen je razvojem metrike oko vakuumskog rešenja,

$$\hat{g}_{MN}(x, y) = \eta_{MN} + h_{MN}(x, y)\,,$$

uz korišćenje jednačina kretanja. Pogodnim izborom gradijentnog uslova jednačine kretanja $\widehat{R}_{MN} = 0$ dobijaju oblik

$$\widehat{\Box}\, h_{MN}(x, y) = 0\,,$$

gde je $\widehat{\Box} \equiv \eta^{MN}\partial_M\partial_N = \Box_x + \Box_y$. Posle toga Furijeov razvoj $h_{MN}(x, y) = \sum_n h^n_{MN}(x)Y_n(y)$ daje jednačine

$$(\Box_x + n^2/r^2)h^n_{MN}(x) = 0\,,$$

pokazujući da svi modovi metrike sa $n \neq 0$ imaju (četvorodimenzionu) masu $m_n = n\hbar/rc$, koja nastaje od kinetičke energije pri kretanju duž pete dimenzije. Ako je r reda veličine Plankove dužine, $l_P = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33}$ cm, onda je $\hbar/rc \approx 10^{19}$ GeV, pa postaje jasno da se ovi modovi jako teško ekscitiraju. Ukoliko se na niskim energijama, $E \ll \hbar/rc$, zanemare viši modovi $n > 0$, onda metrika $\hat{g}_{MN}$ postaje *nezavisna od pete koordinate*. Ovo razmatranje daje jasan smisao uslovu cilindričnosti.

Da bismo kompletnu petodimenzionu teoriju izrazili u *ekvivalentnom* četvorodimenzionom obliku, potrebno je da sva polja u teoriji razvijemo u Furijeov red, i da, zatim, izvršimo integraciju po koordinati y u dejstvu.

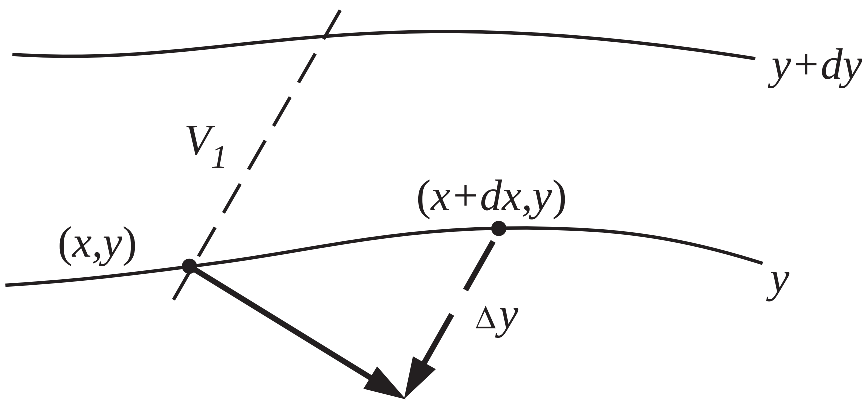
U efektivnoj četvorodimenzionoj teoriji informacija o petoj dimenziji je kompletno sadržana u prisustvu svih modova originalnih polja.

Često se, naročito u sektoru gravitacije, ograničavamo na doprinos nultog moda, koji ne zavisi od pete koordinate. Opravdanje za ovo ograničenje nalazi se u očekivanju da u oblasti malih energija najvažniji doprinos daju nulti modovi. U nekim specijalnim situacijama ovo očekivanje nije opravdano (Salam i Strathdee, 1982).

2.2 Izbor dinamičkih varijabli

Imajući na umu značaj nultih modova petodimenzione gravitacije, uvešćemo pogodne varijable tako da obična gravitacija i elektrodinamika budu direktno uključene u bezmaseni sektor efektivne četvorodimenzione teorije (Zee, 1981).

Slojevita struktura i metrika. Razmotrimo kakav je uticaj pretpostavke da je vakuum teorije oblika $M_4 \times S_1$ na opštu strukturu prostora U_5. Neka je $\hat{\boldsymbol{e}}_M = (\hat{\boldsymbol{e}}_\mu, \hat{\boldsymbol{e}}_5)$ koordinatni bazis tangetnih vektora koji



Slika 10.1 Slojevita struktura prostora U_5

odgovara lokalnim koordinatama $z^M = (x^\mu, y)$. U opštem slučaju metrika $\hat{g}_{MN} = \hat{\boldsymbol{e}}_M \hat{\boldsymbol{e}}_N$ ima oblik

$$\hat{g}_{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} \hat{g}_{\mu\nu} & \hat{g}_{\mu 5} \\ \hat{g}_{5\nu} & \hat{g}_{55} \end{pmatrix}.$$

Pretpostavićemo da prostor U_5 ima slojevitu strukturu kao što je predstavljeno na slici 10.1 : za svaku fiksnu vrednost od x^μ definisana je hiperpovrš V_1 (sloj ili fibra), pri čemu koordinata y odredjuje položaje tačaka unutar V_1. Ova pretpostavka znači da prostor U_5 ima *lokalno* strukturu *direktnog proizvoda* $U_4 \times V_1$, što ne znači, nužno, da je to tačno i globalno. Dve bliske tačke (x,y) i $(x, y+dy)$, koje se nalaze u nekom sloju V_1, definišu beskonačno mali vektor pomeranja $(0, dy) = dy\hat{\boldsymbol{e}}_5$ čija dužina iznosi $ds^2 = \hat{g}_{55}dy^2$, tj. metrika prostora V_1 je $g_{55} = \hat{g}_{55}$.

Sada ćemo definisati prostor–vreme U_4 i odrediti njegovu metriku iz zahteva da je svako pomeranje u njemu *ortogonalno* na sloj V_1. Motivacija za ovaj izbor nalazi se u mogućnosti jednostavnije fizičke interpretacije pri prelazu na efektivnu četvorodimenzionu teoriju. Posmatrajmo vektor pomeranja $(dx, 0) = dx^\mu \hat{\boldsymbol{e}}_\mu$ koji spaja dva bliska sloja duž x–koordinatne linije. Ovo pomeranje *nije ortogonalno* na $(0, dy)$ zbog $\hat{\boldsymbol{e}}_\mu \hat{\boldsymbol{e}}_5 = \hat{g}_{\mu 5} \neq 0$, pa stoga četvorodimenzioni prostor odredjen tačkama $(x, y = \text{const.})$ ne može imati ulogu fizičkog prostor–vremena. Vektor pomeranja koji je ortogonalan na sloj V_1 ima oblik $(dx, \Delta y) = dx^\mu \hat{\boldsymbol{e}}_\mu + \Delta y \hat{\boldsymbol{e}}_5$, gde se vrednost Δy odredjuje iz zahteva ortogonalnosti:

$$(dx^\mu \hat{\boldsymbol{e}}_\mu + \Delta y \hat{\boldsymbol{e}}_5)\hat{\boldsymbol{e}}_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = -g^{55}\hat{g}_{5\mu}dx^\mu .$$

Ovde smo uveli veličinu g^{55} koja je inverzna od $g_{55} = \hat{g}_{55}$, i koju treba razlikovati od $\hat{g}^{55}$. Skup vektora pomeranja $(dx, \Delta y)$ definiše lokalno fizički prostor–vreme U_4. Dužina ovog vektora iznosi

$$(dx^\mu, \Delta y)\hat{g}_{MN}(dx^\nu, \Delta y) = (\hat{g}_{\mu\nu} - g^{55}\hat{g}_{\mu 5}\hat{g}_{\nu 5})dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \,,$$

čime je definisana metrika $g_{\mu\nu}$ prostor–vremena U_4.

Ako uvedemo oznake

$$\hat{g}_{55} = \phi_{55}\,, \qquad \hat{g}_{\mu 5} = \hat{g}_{55}B^5_\mu\,,$$

a zatim, zbog jednostavnosti, izostavimo indekse 5 kod veličina ϕ_{55} i B^5_μ, metrika prostora U_5 dobija oblik

$$\hat{g}_{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi B_\mu B_\nu & \phi B_\mu \\ \phi B_\nu & \phi \end{pmatrix}, \tag{10.10a}$$

odakle se lako nalazi

$$\hat{g}^{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -B^\mu \\ -B^\nu & \phi^{-1} + B_\lambda B^\lambda \end{pmatrix}. \tag{10.10b}$$

Ovaj rezultat, kao što smo videli, izražava činjenicu da su V_1 i U_4 lokalno ortogonalni, i dovodi do sledećeg oblika intervala:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{55}(dy + B_\mu dx^\mu)(dy + B_\nu dx^\nu)\,. \tag{10.10c}$$

Slojevita struktura i pentade. Prethodna razmatranja se mogu iskazati u pogodnom obliku koristeći jezik lokalnih ortogonalnih baza. Uočimo, najpre, da prva četiri vektora lokalne Lorencove baze $(\hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_{\bar{5}})$ čine Lorencovu bazu u T_4, tangentnom prostoru od U_4. Za svaki vektor koordinatne baze $\hat{\boldsymbol{e}}_M$ ispunjena je relacija $\hat{\boldsymbol{e}}_M = b^i{}_M\hat{\boldsymbol{e}}_i + b^{\bar{5}}{}_M\hat{\boldsymbol{e}}_{\bar{5}}$. Posmatrajmo ovaj razvoj u slučaju vektora $\hat{\boldsymbol{e}}_5$ iz sloja V_1. Iz uslova lokalne ortogonalnosti V_1 i U_4 sledi da se u razvoju vektora $\hat{\boldsymbol{e}}_5$ iz V_1 ne može pojaviti nijedan od vektora $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ iz U_4:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\mu = b^i{}_\mu\hat{\boldsymbol{e}}_i + b^{\bar{5}}{}_\mu\hat{\boldsymbol{e}}_{\bar{5}}\,, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_5 = b^{\bar{5}}{}_5\hat{\boldsymbol{e}}_{\bar{5}}\,.$$

Tako uslov lokalne ortogonalnosti, na jeziku pentada, dobija oblik

$$b^i{}_5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b^I{}_M(x,y) = \begin{pmatrix} b^i{}_\mu & 0 \\ b^{\bar{5}}{}_\mu & b^{\bar{5}}{}_5 \end{pmatrix}. \tag{10.11a}$$

Odavde se lako nalazi inverzna pentada:

$$h_I{}^M(x,y) = \begin{pmatrix} h_i{}^\mu & h_i{}^5 \\ 0 & h_{\bar{5}}{}^5 \end{pmatrix}, \tag{10.11b}$$

gde je $h_i{}^\mu$ inverzna veličina od $b^i{}_\mu$, $h_{\bar 5}{}^5 b^{\bar 5}{}_5 = 1$, a $h_i{}^5$ zadovoljava uslov $b^i{}_\mu h_i{}^5 + b^{\bar 5}{}_\mu h_{\bar 5}{}^5 = 0$.

Koristeći pentade može se, na uobičajen način, konstruisati metrika prostora U_5:

$$
\begin{aligned}
\hat g_{\mu\nu} &= b^i{}_\mu b^j{}_\nu \eta_{ij} + b^{\bar 5}{}_\mu b^{\bar 5}{}_\nu \eta_{55} = g_{\mu\nu} - b^{\bar 5}{}_\mu b^{\bar 5}{}_\nu \,, \\
\hat g_{\mu 5} &= b^{\bar 5}{}_\mu b^{\bar 5}{}_5 \eta_{55} = -b^{\bar 5}{}_\mu b^{\bar 5}{}_5 \,, \\
\hat g_{55} &= b^{\bar 5}{}_5 b^{\bar 5}{}_5 \eta_{55} = -b^{\bar 5}{}_5 b^{\bar 5}{}_5 \,,
\end{aligned}
$$

koja se, posle identifikacije $B_\mu = h_{\bar 5}{}^5 b^{\bar 5}{}_\mu$, svodi na rezultat (10.10a).

Koristeći bazu $(\hat{\boldsymbol e}_i, \hat{\boldsymbol e}_{\bar 5})$ može se definisati lokalni Lorencov koordinatni sistem $(\xi^i, \xi^{\bar 5})$,

$$
\begin{aligned}
d\xi^i &= b^i{}_\mu dx^\mu \,, \\
d\xi^{\bar 5} &= b^{\bar 5}{}_5 dy + b^{\bar 5}{}_\mu dx^\mu = b^{\bar 5}{}_5 (dy + B_\mu dx^\mu) \,,
\end{aligned}
$$

u kome kvadrat intervala ima oblik $ds^2 = \eta_{ij} d\xi^i d\xi^j + \eta_{55}(d\xi^5)^2$.

Često se koristi *lokalno ortogonalna baza* $(\boldsymbol E_\mu, \boldsymbol E_5) = (b^i{}_\mu \hat{\boldsymbol e}_i, \hat{\boldsymbol e}_5)$,

$$
\hat{\boldsymbol e}_\mu = \boldsymbol E_\mu + B_\mu \boldsymbol E_5 \,, \qquad \hat{\boldsymbol e}_5 = \boldsymbol E_5 \,,
$$

koja je prirodno povezana sa osobinom lokalne ortogonalnosti sloja V_1 i prostor–vremena U_4. Ova baza definiše lokalni koordinatni sistem (X^μ, Y),

$$
dX^\mu = dx^\mu \,, \qquad dY = dy + B_\mu dx^\mu \,,
$$

u kome kvadrat intervala ima blok–dijagonalan oblik:

$$
ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + g_{55} dY^2 \,.
$$

Lokalno ortogonalna baza nije koordinatna, što utiče na način računanja raznih geometrijskih objekata (Toms, 1984).

Posle definisanja metričke strukture prostora U_5 uslovom (10.11a), odgovarajuće 4 + 1 razlaganje koneksije se svodi na razlaganje po lokalno ortogonalnoj bazi.

Preostala simetrija. Dejstvo početne teorije je invarijantno u odnosu na opšte koordinatne transformacije i lokalne Lorencove rotacije. U odnosu na opšte koordinatne transformacije $z' = z'(z)$ pentada se transformiše kao vektor; specijalno,

$$
b'^i{}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} b^i{}_\nu + \frac{\partial y}{\partial x'^\mu} b^i{}_5 \,.
$$

Ako želimo da očuvamo fundamentalni uslov $b^i{}_5 = 0$ koji definiše slojevitu strukturu prostora U_5, moramo se ograničiti na koordinatne transformacije u kojima x' ne zavisi od y:

$$x' = x'(x)\,, \qquad y' = y'(x,y)\,. \tag{10.12}$$

Interesantno je razmotriti odgovarajuće zakone transformacije komponenti $(g_{\mu\nu}, B_\mu, \phi)$ metrike $\hat{g}_{MN}$:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}\,, \qquad \phi' = \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial y'}\phi\,, \\ B'_\mu &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}B_\lambda - \frac{\partial y'}{\partial x^\lambda}\right)\,. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Ako se podsetimo izostavljenih indeksa 5 kod veličina ϕ i B_μ, ovi zakoni dobijaju jasniju interpretaciju:

a) $g_{\mu\nu}$ je tenzor u odnosu na indekse (μ,ν);

b) $\phi = \phi_{55}$ je tenzor u odnosu na indekse (55);

c) $B_\mu = B^5_\mu$ nije tenzor, jer se transformiše nehomogeno, dok u slučaju specijalnih transformacija $y' = y'(y)$ postaje tenzor po oba indeksa $(5,\mu)$.

Koordinatne transformacije (10.12) se svode na ranije dobijeni oblik (10.3), ako zahtevamo da je $\phi = \phi(x)$.

2.3 Bezmaseni sektor efektivne teorije

U dosadašnjem razmatranju mi smo definisali odredjenu geometrijsku strukturu petodimenzionog prostora, ali su komponente metrike (ili pentade) ostale funkcije svih koordinata $z^M = (x^\mu, y)$. Sada ćemo razmotriti doprinos nultih modova efektivnoj četvorodimenzionoj teoriji, pretpostavljajući da su komponente metrike nezavisne od y.

Umesto opšte dinamičke situacije u kojoj petodimenziona mnogostrukost ima strukturu Riman–Kartanovog prostora U_5, ograničićemo se na razmatranje slučaja $T = 0$, koji odgovara Rimanovom prostoru V_5. Koristeći oblik metrike (10.10), uz pretpostavku y–nezavisnosti, dobijaju se sledeći izrazi za Kristofelovu koneksiju:

$$\begin{aligned} \hat\Gamma^\mu_{\nu\rho} =& \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \tfrac{1}{2}(F^\mu{}_\nu B_\rho\phi + F^\mu{}_\rho B_\nu\phi + B_\nu B_\rho \partial^\mu\phi)\,, \\ \hat\Gamma^\mu_{5\rho} =& -\tfrac{1}{2}(F^\mu{}_\rho\phi + B_\rho\partial^\mu\phi)\,, \qquad \hat\Gamma^\mu_{55} = -\tfrac{1}{2}\partial^\mu\phi\,, \\ \hat\Gamma^5_{\nu\rho} =& \tfrac{1}{2}(\nabla_\nu B_\rho + \nabla_\rho B_\nu) + \tfrac{1}{2}B^\lambda(F_{\lambda\nu}B_\rho\phi + F_{\lambda\rho}B_\nu\phi + B_\nu B_\rho\partial_\lambda\phi) \\ & + \tfrac{1}{2}\phi^{-1}(B_\rho\partial_\nu\phi + B_\nu\partial_\rho\phi)\,, \\ \hat\Gamma^5_{5\rho} =& \tfrac{1}{2}(B^\lambda F_{\lambda\rho}\phi + B_\rho B^\lambda\partial_\lambda\phi + \phi^{-1}\partial_\rho\phi)\,, \qquad \hat\Gamma^5_{55} = \tfrac{1}{2}B^\lambda\partial_\lambda\phi\,. \end{aligned} \tag{10.14a}$$

Posle dužeg računa odavde se dobija petodimenziona krivina:

$$
\begin{aligned}
\widehat{R} =& R - \tfrac{1}{4}\phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \phi^{-1}\Box_x\phi + \tfrac{1}{2}\phi^{-2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
=& R - \tfrac{1}{4}\phi\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{2}{\sqrt{-\phi}}\Box_x\sqrt{-\phi}\,.
\end{aligned}
\tag{10.14b}
$$

Pošto izraz $\sqrt{-\hat{g}}\widehat{R}$ ne zavisi od pete koordinate, integracija po y u dejstvu (10.7), uz korišćenje relacije $\sqrt{\hat{g}} = \sqrt{-g}\sqrt{-\phi}$, dovodi do sledećeg efektivnog dejstva:

$$
I_G^{(0)} = -\frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\sqrt{-\phi}\,\left(R - \tfrac{1}{4}\phi\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\,, \qquad \kappa \equiv \hat{\kappa}/L\,, \tag{10.15}
$$

pri čemu je iz podintegralnog izraza odbačena četvorodivergencija. Rezultat (10.15) predstavlja doprinos nultog moda efektivnoj četvorodimenzionoj teoriji, i treba ga uporediti sa ranije dobijenim izrazom (10.6), koji sledi pri $\phi = -1$.

Ova teorija predstavlja jednu varijantu Brans–Dikijeve teorije gravitacije, u kojoj veličinu $\sigma \equiv \sqrt{-\phi}$ treba identifikovati sa bezmasenim skalarnim poljem koje interaguje sa elektromagnetizmom. Ovo polje, zaista, odredjuje jačinu gravitacione interakcije. Za razliku od Brans–Dikijeve teorije koja sadrži član $\omega\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma/\sigma$, gde konstanta interakcije ω zadovoljava uslov $\omega \geq 6$, ovde je $\omega = 0$. Oblik interakcije skalara σ sa materijom potpuno je odredjena iz zahteva petodimenzione kovarijantnosti, dok je u Brans–Dikijevoj teoriji ta interakcija proizvoljna (Gross i Perry, 1983).

Prisustvo multiplikativnog faktora $\sqrt{-\phi}$ u dejstvu ne odgovara standardnoj formi teorije, u kojoj je koeficijent uz $\sqrt{-g}R$ jednak konstanti. Uobičajeni oblik teorije se može postići redefinicijom osnovnih dinamičkih varijabli putem lokalnog Vajlovog reskaliranja metrike $g_{\mu\nu}$ i polja ϕ. Navedimo najpre pravilo transformacije skalarne krivine u V_4, u odnosu na Vajlovo reskaliranje metrike:

$$
g_{\mu\nu} = \lambda^{-1}\bar{g}_{\mu\nu}\,, \qquad R(g) = \lambda\left[R(\bar{g}) + 3\bar{\Box}\ln\lambda - \tfrac{3}{2}\lambda^{-2}\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\lambda\partial_\nu\lambda\right]\,.
$$

Sada se lako vidi da posle redefinicije varijabli

$$
g_{\mu\nu} = \lambda^{-1}\bar{g}_{\mu\nu} \qquad \phi = \lambda^{-1}\bar{\phi}\,, \qquad \lambda \equiv (-\bar{\phi})^{1/3}\,, \tag{10.16a}
$$

četvorodimenziono dejstvo, izraženo preko novih varijabli i uz odbacivanja još jedne divergencije, dobija uobičajeni oblik:

$$
I_G^{(0)} = -\frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\,\left(\bar{R} - \tfrac{1}{4}\bar{\phi}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{6}\bar{\phi}^{-2}\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\bar{\phi}\right)\,. \tag{10.16b}
$$

Treba uočiti da elektromagnetni deo dejstva nije korektno normalizovan. Ovo se lako ispravlja uvodjenjem novih polja

$$B_\mu = fA_\mu\,, \qquad f^2 = 2\kappa\,, \tag{10.16c}$$

gde uslov $f^2 = 2\kappa$ na konstantu interakcije osigurava da koeficijent uz $F^2(A)$ pri $\bar\phi = -1$ bude $-1/4$. Mi ćemo izabrati da f bude negativno, što nema fizičkog značaja.

Ponovimo da smo do konačnog oblika dejstva (10.16b) došli posle lokalnog Vajlovog reskaliranja varijabli $g_{\mu\nu}$ i ϕ, a time i kompletne petodimenzione metrike (10.10a):

$$\hat g_{MN}(x) = (-\bar\phi)^{-1/3}\begin{pmatrix} \bar g_{\mu\nu} + \bar\phi B_\mu B_\nu & \bar\phi B_\mu \\ \bar\phi B_\nu & \bar\phi \end{pmatrix}. \tag{10.17}$$

Ovo reskaliranje utiče i na oblik Kristofelovih simbola $\bar\Gamma$, koji se dobijaju iz (10.14a).

Iz oblika dejstva se vidi da KK teorija na niskim energijama opisuje bezmaseno skalarno polje $s = \ln(-\bar\phi)/\sqrt{6\kappa}$ u interakciji sa gravitacijom i elektromagnetnim poljem. Dok je jačina gravitacione interakcije konstantna, dotle je elektromagnetna interakcija proporcionalna sa $-\bar\phi = e^{\sqrt{6\kappa}s}$.

Podrazumevajući da je konačan oblik metrike dat jednačinom (10.17), mi ćemo u daljem izlaganju, zbog jednostavnosti, obično izostavljati pisanje crte iznad $g_{\mu\nu}$ i ϕ.

2.4 Dinamika materije i peta dimenzija

Interakcija materije sa petodimenzionim gravitacionim poljem je odredjena zahtevom invarijantnosti teorije u odnosu na opšte koordinatne transformacije i lokalne $SO(1,4)$ rotacije. Dinamičke karakteristike polja materije daju jedan novi uvid u fizički smisao petodimenzione teorije (Gross i Perry, 1983; Salam i Strathdee, 1982).

Klasična čestica. Dinamika klasične čestice u petodimenzionoj gravitaciji odredjena je dejstvom $I_M = -m\int ds$, iz koga se dobijaju geodezijske jednačine kretanja:

$$\frac{d^2 z^M}{d\tau^2} + \hat\Gamma^M_{NR}\frac{dz^N}{d\tau}\frac{dz^R}{d\tau} = 0\,.$$

Opšti oblik ovih jednačina zahteva izračunavanje Kristofelovih simbola, koji se dobijaju iz (10.14a) Vajlovim reskaliranjem. Veoma interesantne informacije o prirodi pete dimenzije mogu se dobiti ako se ograničimo na metriku u kojoj je $\phi = -1$ i $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Prvom pretpostavkom se izostavlja uticaj polja ϕ na dinamiku probne čestice, dok se drugom zanemaruje četvorodimenziona gravitacija, čiji su efekti dobro poznati. Zanemarujući, takodje, svaku y–zavisnost, dolazimo do sledećeg oblika metrike:

$$\hat{g}_{MN}(x) = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} - B_\mu B_\nu & -B_\mu \\ -B_\nu & -1 \end{pmatrix} , \qquad (10.18)$$

gde je $B_\mu = f A_\mu$. Kristofelovi simboli se lako nalaze iz relacije (10.5a). Ako se, zbog jednostavnosti izlaganja, zadržimo na linearnoj aproksimaciji po elektromagnetnoj interakciji, dobijamo

$$\begin{aligned} &\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = \mathcal{O}_2 \, , && \hat{\Gamma}^5_{\nu\rho} = \tfrac{1}{2}(\partial_\nu B_\rho + \partial_\rho B_\nu) + \mathcal{O}_2 \, , \\ &\hat{\Gamma}^\mu_{5\rho} = \tfrac{1}{2} F^\mu{}_\rho \, , && \text{ostale komponente} = \mathcal{O}_2 \, , \end{aligned}$$

gde $\mathcal{O}_2$ označava članove drugog ili višeg reda po B_μ. Koristeći ove izraze geodezijske jednačine dobijaju oblik (Vasilić, 1989)

$$\begin{aligned} &\frac{du^\mu}{d\tau} + f F^\mu{}_\rho(A) u^\rho u^5 = \mathcal{O}_2 \, , \\ &\frac{du^5}{d\tau} + \tfrac{1}{2} f (\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu) u^\mu u^\nu = \mathcal{O}_2 \, . \end{aligned}$$

Iz druge jednačine sledi da je $u^5 = (u^5)_0 + \mathcal{O}_1$, gde je konstanta $(u^5)_0$ vrednost početne brzine čestice pri kretanju duž pete dimenzije. Koristeći ovaj rezultat prva jednačina postaje

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + f (u^5)_0 F^\mu{}_\rho(A) u^\rho = \mathcal{O}_2 \, .$$

Pošto je $f = -\sqrt{2\kappa}$, ova jednačina predstavlja poznatu jednačinu za kretanje čestice naelektrisanja q u elektromagnetnom polju ako je

$$q/m = \sqrt{2\kappa}(u^5)_0 \, . \qquad (10.19a)$$

Tako dolazimo do veoma interesantnog zaključka o prirodi naelektrisanja:

> *Naelektrisanje čestice je manifestacija njenog kretanja duž pete dimenzije.*

Ako sada iskoristimo jednostavne argumente kvantne teorije, zaključićemo da je naelektrisanje *kvantovano*, tj. da je q celobrojan umnožak nekog elementarnog naelektrisanja e. Čestici impulsa $(p^5)_0 = m(u^5)_0$ može se pridružiti talas, čija je talasna dužina odredjena relacijom $(p^5)_0 = 2\pi/\lambda_5$. Iz zahteva da se talasna dužina sadrži ceo broj puta u obimu kruga $2\pi r$ sledi $(p^5)_0 = n/r$, tj.

$$q_n = ne \equiv n\big(\sqrt{2\kappa}/r\big) \, . \qquad (10.19b)$$

Ova relacija povezuje veličinu pete dimenzije sa vrednošću elementarnog naelektrisanja. Iz poznate vrednosti elementarnog naelektrisanja dobija se da je veličina pete dimenzije reda Plankove dužine:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}\,, \qquad r = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\kappa\hbar}{8\pi c^3}} \approx 3.7\times 10^{-32}\ \text{cm.},$$

što potvrdjuje neopservabilnost pete dimenzije na standardnim eksperimentalnim energijama. Ako bismo iz nekih drugih razmatranja mogli da dobijemo informaciju o veličini pete dimenzije, onda bi prethodna relacija davala mogućnost da se elementarno naelektrisanje *izračuna.* Ideja o mogućnosti izračunavanja vrednosti elementarnog naelektrisanja privlači pažnju fizičara već duže vreme, ali zadovoljavajuće rešenje ovog problema do danas nije nadjeno.

Realno skalarno polje. Fizički značaj pete dimenzije može se lepo videti i na primeru dinamike realnog, skalarnog polja $\varphi(x,y)$ u V_5. Pri transformaciji koordinata $y' = y + \varepsilon$ polje se menja po pravilu $\varphi'(x,y) = \varphi(x,y-\varepsilon)$. Koristeći Furijeov razvoj $\varphi(x,y) = \sum \varphi_n(x)Y_n(y)$, lako nalazimo odgovarajući zakon transformacije modova:

$$\varphi'_n(x) = \varphi_n(x)e^{i(n/r)\varepsilon}\,.$$

Ovo pravilo transformacije sugeriše da n–ti mod $\varphi_n(x)$ ima naelektrisanje $\sim n/r$.

Da bismo ovaj zaključak ispitali detaljnije, razmotrićemo kako $\varphi(x,y)$ interaguje sa elektromagnetnim poljem. Dejstvo slobodnog, realnog skalarnog polja u V_5 definisano je izrazom

$$I_S = \int d^5z\sqrt{\hat{g}}\Big(-\tfrac{1}{2}\varphi\hat{\Box}\varphi - \tfrac{1}{2}m^2\varphi^2\Big)\,. \tag{10.20a}$$

Koristeći metriku (10.18), dobija se $\hat{\Box} = \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu - B_\mu\partial_y)(\partial_\nu - B_\nu\partial_y) + \Box_y$. Posle razvoja polja $\varphi(x,y)$ u Furijeov red i integracije po y (uzimajući u obzir ortogonalnost baze Y_n), dejstvo postaje

$$I_S^{(0)} = \sum_n \int d^4x\sqrt{-g}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi_n^*\Big(-D_n^2 + m_n^2\Big)\varphi_n\,, \tag{10.20b}$$

gde je

$$\begin{aligned} &D_n^2 = g^{\mu\nu}(\partial_\mu - iq_nA_\mu)(\partial_\nu - iq_nA_\nu)\,,\\ &q_n = n\big(\sqrt{2\kappa}/r\big)\,, \qquad m_n^2 = m^2 + n^2/r^2\,. \end{aligned}$$

Ekvivalentna četvorodimenziona teorija sadrži jedno realno skalarno polje φ_0 mase m, i beskonačan skup kompleksnih skalarnih modova φ_n mase m_n.

Ako je polazno polje bezmaseno u $d = 5$, mase modova su $m_n = n/r$. Svaki viši mod ima naelektrisanje q_n i minimalnu elektromagnetnu interakciju. Veza naelektrisanja i veličine pete dimenzije ista je kao i pri posmatranju kretanja probne čestice po geodezijskoj liniji duž pete koordinate. U limesu $r \to 0$ samo nulti mod zadržava konačnu masu. Obično se pretpostavlja da se u takvom limesu svi viši modovi mogu zanemariti, i da je na niskim energijama nulti mod dominantan.

Dirakovo polje. Dejstvo bezmasene Dirakove čestice definisano je u primeru 1:

$$I_D = \int d^5 z \tfrac{1}{2} i\hat{b}\, \bar{\psi}\gamma^K h_K{}^M D_M \psi \ + \ \text{k.k.}\,. \tag{10.21a}$$

Uvodeći oznaku $\omega_M \equiv \frac{1}{2} A^{IJ}{}_M \sigma_{IJ}$, i koristeći eksplicitan oblik pentada iz (10.11), dejstvo postaje

$$I_D = \int d^5 z \tfrac{1}{2} i\hat{b}\, \bar{\psi}\Big[\gamma^k \big(h_k{}^\mu \partial_\mu + h_k{}^5 \partial_y + \omega_k\big) + \gamma^{\bar{5}}\big(h_{\bar{5}}{}^5 \partial_y + \omega_{\bar{5}}\big)\Big]\psi \ + \ \text{k.k.}\,.$$

Ako sada zanemarimo efekte četvorodimenzione gravitacije i stavimo $\phi = -1$, inverzna pentada dobija oblik

$$h_I{}^M(x) = \begin{pmatrix} \delta_i{}^\mu & h_i{}^5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{10.22}$$

gde je $h_i{}^5 = -\delta_i^\mu B_\mu$. Koristeći, dalje, pretpostavku $B_\mu = B_\mu(x)$ i Furijeov razvoj za polje materije, $\psi(x,y) = \sum \psi_n(x) Y_n(y)$, dejstvo posle integracije po y postaje

$$I_D^{(0)} = \sum_n \int d^4 x \tfrac{1}{2} i\, \bar{\psi}_n \Big[\gamma^k \delta_k^\mu \big(D_\mu + \omega_\mu - B_\mu \omega_5\big) + \gamma^{\bar{5}}\big(-im_n + \omega_5\big)\Big]\psi_n$$

$$+ \ \text{k.k.}\,, \tag{10.21b}$$

gde je

$$D_\mu = \partial_\mu - iq_n A_\mu\,, \qquad m_n = n/r\,.$$

Sličan rezultat se dobija i kad se uzme u obzir cetvorodimenziona gravitacija. Posmatrana petodimenziona teorija gravitacije, sa Dirakovim poljem materije, predstavlja Ajnštajn–Kartanovu teoriju; ona je definisana u Riman–Kartanovom prostoru U_5, u kome je koneksija $\hat{A}^{IJ}{}_M$ nezavisna dinamička varijabla. Jednačine kretanja za koneksiju su algebarske i imaju rešenje $\hat{A} = \Delta + K$, gde je Δ Ričijev koeficijent, a K kontorzija. Preostale jednačine kretanja se mogu dobiti iz polaznog dejstva u kome je izvršena zamena $\hat{A} = \Delta + K$, čime se efektivno prelazi na formalizam drugog reda. Prema tome, zamena $\hat{A} = \Delta$ *nije konzistentna* sa gledišta petodimenzionih jednačina kretanja. Ipak, uzimajući u obzir da je doprinos kontorzije mnogo manji od ostalih članova, interesantno je razmotriti aproksimativnu teoriju dobijenu zamenom $\hat{A} = \Delta$.

2.5 Simetrije efektivne teorije

Analiza simetrije efektivne četvorodimenzione teorije koja sadrži sve modove dinamičkih varijabli omogućava bolje shvatanje fizičkog spektra ove teorije (Dollan i Duff, 1984).

Simetrije bezmasenog sektora. Početna petodimenziona teorija je invarijantna u odnosu na opšte koordinatne transformacije i lokalne Lorencove rotacije. Videli smo da uslov lokalne ortogonalnosti potprostora V_1 i V_4, izražen relacijom (10.11a), ograničava opšte koordinatne transformacije na oblik u kome x' ne zavisi od y, pri čemu se komponente metrike $g_{\mu\nu}(x,y)$, $B_\mu(x,y)$ i $\phi(x,y)$ transformišu po pravilu (10.13). U bezmasenom sektoru teorije sve komponente metrike postaju nezavisne od y. Uslov $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ ne nameće nikakva ograničenja na koordinatne transformacije (10.12). Uslovi $B_\mu = B_\mu(x)$ i $\phi = \phi(x)$ povlače sledeća ograničenja:

$$\partial y'/\partial y \quad \text{i} \quad \partial y'/\partial x \quad \text{ne zavise od } y\,.$$

Prema tome, bezmaseni sektor gravitacije je invarijantan u odnosu na koordinatne transformacije koje imaju oblik

$$x' = x'(x)\,, \qquad y' = \rho y + \xi^5(x)\,, \tag{10.23a}$$

gde je $\rho = \text{const.}$, pri čemu je

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}\,, \qquad \phi' = \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial y'}\phi\,, \\ B'_\mu &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\rho B_\lambda - \frac{\partial \xi^5}{\partial x'^\mu}\,. \end{aligned} \tag{10.23b}$$

Sa gledišta četvorodimenzione teorije u aproksimaciji (10.15) pogodno je ove transformacije razbiti na tri podgrupe.

a) Transformacije

$$x' = x'(x)\,, \qquad y' = y\,, \tag{10.24a}$$

predstavljaju opšte koordinatne transformacije u V_4. Nije teško uveriti se da se pri ovim transformacijama $g_{\mu\nu}$, B_μ i ϕ ponašaju kao tenzor drugog reda, vektor i skalar, redom, a da je dejstvo (10.15) invarijatno. Vajlovim reskaliranjem faktorom $(-\bar{\phi})^{1/3}$ prelazi se na nove varijable $\bar{g}_{\mu\nu}$, $\bar{B}_\mu$ i $\bar{\phi}$.

Pošto je $\bar{\phi}$ skalar, pravila transformacije za nove varijable $\bar{g}_{\mu\nu}$ i $\bar{B}_\mu$ ostaju ista kao i za stare.

b) Transformacije

$$\begin{aligned} &x' = x\,, \qquad y' = y' + \xi^5(x)\,, \\ &\delta_0\phi = 0\,, \qquad \delta_0 g_{\mu\nu} = 0\,, \qquad \delta_0 B_\mu = -\partial_\mu \xi^5(x)\,, \end{aligned} \tag{10.24b}$$

predstavljaju lokalne gradijentne transformacije sa parametrom $\xi^5(x)$. Invarijantnost dejstva (10.15) se direktno vidi. Ako parametar ξ^5 odgovara promeni *periodične* pete koordinate y, ove transformacije predstavljaju lokalnu $U(1)$ simetriju. No, pošto u aproksimativnom dejstvu (10.15) nema eksplicitne zavisnosti od y, tj. ono se "ne seća" periodičnosti po y, posmatrane transformacije se mogu smatrati i kao realizacija R simetrije, koja odgovara ne periodičnoj već *realnoj* koordinati y. Posle reskaliranja zakon transformacije ostaje isti zbog $\delta_0\phi = 0$.

c) Posmatrajmo na kraju transformacije globalne dilatacije pete koordinate:

$$\begin{aligned} &x' = x\,, \qquad y' = \rho y\,, \\ &\phi' = \rho^{-2}\phi\,, \qquad B'_\mu = \rho B_\mu\,, \qquad g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{10.25}$$

Direktnom primenom dobijenih pravila transformacije na dejstvo (10.15) dobija se pomalo neočekivani rezultat da ovo dejstvo nije invarijantno. Ako se, medjutim, setimo da je četvorodimenziona konstanta κ definisana relacijom $\kappa^{-1} = \hat{\kappa}^{-1}\int dy$, postaje jasno da globalna dilatacija pete koordinate indukuje promenu $\kappa^{-1} \to \rho\kappa^{-1}$, posle čega se lako dobija invarijantnost dejstva.

Ovakav oblik transformacije simetrije, u kome se transformiše i konstanta interakcije, nije uobičajen sa gledišta četvorodimenzione teorije. Primetimo, medjutim, da dejstvo (10.15) poseduje jednu sasvim standardnu simetriju — simetriju u odnosu na globalno Vajlovo reskaliranje W:

$$\phi' = \lambda^{-4/3}\phi\,, \qquad B'_\mu = \lambda B_\mu\,, \qquad g'_{\mu\nu} = \lambda^{2/3} g_{\mu\nu}\,. \tag{10.26a}$$

Izražena preko varijabli $(\bar{\phi}, \bar{B}_\mu, \bar{g}_{\mu\nu})$, ova simetrija dobija oblik

$$\bar{\phi}' = \lambda^{-2}\bar{\phi}\,, \qquad \bar{B}_\mu = \lambda \bar{B}_\mu\,, \qquad \bar{g}'_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}\,. \tag{10.26b}$$

Geometrijski smisao W simetrije se može videti posmatranjem kvadrata intervala duž pete dimenzije, $ds_5^2 = \phi\, dy^2$: pošto je prostor $M_4 \times S_1$ ravan, on zadovoljava klasične jednačine kretanja za svaku vrednost radijusa $r\sqrt{-\phi}$.

Mada je globalno Vajlovo reskaliranje simatrija dejstva (10.15), u vakuumu je $\phi = -1$, pa ove simetrije nema. Simetrija dejstva nije simetrija vakuuma, pa je W *spontano narušena* simetrija, što dovodi do pojave Goldstonovog bozona ϕ, koji se naziva *dilaton*.

S druge strane, globalna W simetrija predstavlja simetriju samo bezmasenog sektora teorije. Posle uključivanja viših modova (i/ili kvantnih korekcija) ova simetrija nestaje, zbog čega se polje ϕ naziva pseudo–Goldstonov bozon.

Polje $\phi^0 = \phi(x)$ *je pseudo–Goldstonov bozon globalne simetrije reskaliranja.*

Može se očekivati da će u kompletnoj teoriji bezmaseni ostati samo oni modovi čija bezmasenost nije slučajna, već je povezana sa nekom simetrijom; to je slučaj sa poljima $g_{\mu\nu}(x)$ i $B_\mu(x)$. U kompletnoj teoriji polje ϕ dobija masu, a radijus kruga S_1 odredjenu vrednost. Obično se radijus odredjuje nedinamički, na osnovu poznate eksperimentalne vrednost naelektrisanja. Ako bi postojao neki dinamički mehanizam, koji bi odredjivao radijus kruga S_1, pseudo–Goldstonov bozon ne bi ni postojao, a naelektrisanje bi se moglo izračunati.

Kac–Mudijeva simetrija. Petodimenziona teorija je invarijantna u odnosu na opšte koordinatne transformacije

$$\delta z^M = \xi^M(x,y) = \sum \xi_n^M(x) u_n(\theta)\,, \qquad u_n(\theta) \equiv \sqrt{2\pi r}Y_n(y) = e^{-in\theta}\,,$$

gde smo uzeli u obzir da je, zbog topologije osnovnog stanja, $y = r\theta$.

Primećujemo da opšte koordinatne trasformacije (10.24a) i lokalne gradijentne transformacije (10.24b) direktno odgovaraju nultom modu parametra $\xi^M(x,y)$, dok globalno Vajlovo reskaliranja (10.26) nije simetrija kompletne teorije. Da bismo to pokazali, uočićemo da se W može dobiti kompozicijom i) globalnog reskaliranja petodimenzione metrike $\hat{g}'_{MN} = \lambda^{2/3}\hat{g}_{MN}$,

$$\phi' = \lambda^{2/3}\phi\,, \qquad B'_\mu = B_\mu\,, \qquad g'_{\mu\nu} = \lambda^{2/3}g_{\mu\nu}\,,$$

i ii) koordinatne transformacije dilatacije,

$$\begin{aligned} &y' = \lambda y\,, \\ &\phi' = \lambda^{-2}\phi\,, \qquad B'_\mu = \lambda B_\mu\,, \qquad g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\,. \end{aligned}$$

U odnosu na transformaciju i) dejstvo prelazi u $I'_G = \lambda I_G$, tako da jednačine kretanja ostaju invarijantne. S druge strane, transformacija ii) je sada zabranjena zbog zahteva periodičnosti koordinate y, pa sledi da W nije simetrija jednačina kretanja kompletne teorije.

U četvorodimenzionom prostoru opšta kovarijantnost, kombinovana sa lokalnim Lorencovim transformacijama, može se smatrati kao lokalna simetrija koja odgovara lokalizaciji Poenkareove grupe. Globalne Poenkareove transformacije predstavljaju specijalan slučaj opštih koordinatnih transformacija, $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$, u kojima je parametar ξ^μ ograničen na linearan oblik:

$\xi^\mu = \varepsilon^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$, $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Sada ćemo naći analogon globalne Poenkareove simetrije u petodimenzionoj teoriji, ograničavajući se na linearizaciju parametara $\xi_n^M(x)$:

$$\xi_n^\mu(x) = \varepsilon_n^\mu + \omega_n^{\mu\nu} x_\nu\,, \qquad \xi_n^5(x) = c_n r\,, \tag{10.27}$$

gde su ε_n^μ, $\omega_n^{\mu\nu}$ i c_n konstante. Neka je $\Phi(x,y)$ skalarna funkcija koja se u odnosu na (10.27) transformiše po pravilu

$$\delta_0\Phi = -\sum u_n(\xi_n^\mu \partial_\mu + \xi_n^5 \partial_y)\Phi = \sum \left(\varepsilon_n^\mu P_\mu^n + \tfrac{1}{2}\omega_n^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^n + c_n L_n\right)\Phi\,,$$

gde su P_μ^n, $L_{\mu\nu}^n$ i L_n odgovarajući generatori:

$$\begin{aligned} &P_\mu^n \equiv -u_n(\theta)\partial_\mu\,, \qquad M_{\mu\nu}^n \equiv u_n(\theta)(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,, \\ &L_n = u_n(\theta) r\partial_y = u_n(\theta)\partial_\theta\,. \end{aligned} \tag{10.28}$$

Generatori P^n i M^n i L_n definišu sledeću beskonačno parametarsku Lijevu algebru:

$$\begin{aligned} &[M_{\mu\nu}^n, M_{\lambda\rho}^m] = \eta_{\nu\lambda} M_{\mu\rho}^{n+m} - \eta_{\mu\lambda} M_{\nu\rho}^{n+m} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\lambda}^{n+m} + \eta_{\mu\rho} M_{\nu\lambda}^{n+m}\,, \\ &[M_{\mu\nu}^n, P_\lambda^m] = \eta_{\nu\lambda} P_\mu^{n+m} - \eta_{\mu\lambda} P_\nu^{n+m}\,, \qquad [P_\mu^m, P_\nu^n] = 0\,, \end{aligned} \tag{10.29a}$$

$$\begin{aligned} &[L_n, L_m] = i(n-m)L_{n+m}\,, \\ &[L_n, P_\mu^m] = -imP_\mu^{n+m}\,, \qquad [L_n, M_{\mu\nu}^m] = -imM_{\mu\nu}^{n+m}\,. \end{aligned} \tag{10.29b}$$

Jednačina (10.29a) definiše Kac–Mudijeva ekstenziju Poenkareove algebre, dok (10.29b) predstavlja Virazorovu algebru bez centralnog naboja proširenu skupom uopštenih prostorno–vremenskih generatora P_μ^n i $M_{\mu\nu}^n$. Ako se ograničimo na $n = m = 0$, dobija se konačnodimenziona podalgebra $P_4 \times U(1)$. Proširenjem ovog skupa generatora sa L_1 i L_{-1} dobija se $P_4 \times SO(1,2)$.

Tabela 10.1 Simetrije petodimenzione KK teorije

simetrija	$P_4 \times U(1)$	$P_4 \times SO(1,2)$	Kac–Mudi
parametri	$\xi_0^\mu,\ \xi_0^5$	$\xi_0^\mu, \xi_0^5, \xi_1^5, \xi_{-1}^5$	$\xi_n^\mu,\ \xi_n^5$

Algebra (10.29) opisuje simetriju kompletnog dejstva četvorodimenzione teorije, koja sadrži ne samo nulte već i sve više modove.

Spontano narušenje simetrije. Pošto vakuum teorije ima simetriju $P_4 \times U(1)$, Kac–Mudijeva simetrija (10.29) je spontano narušena. Parametri $\xi_n^\mu(x)$ i $\xi_n^5(x)$, koji su zadati relacijom (10.27), opisuju globalnu simetriju (sa beskonačno mnogo parametara). Nulti modovi ξ_0^μ i ξ_0^5 odgovaraju simetriji vakuuma, dok viši modovi ξ_n^μ i ξ_n^5, $n>0$, odgovaraju generatorima Kac–Mudijeve simetrije koji narušavaju simetriju vakuuma. Zato očekujemo da se medju višim modovima polja pojave Goldstonovi bozoni. Da bismo identifikovali Goldstonove bozone, treba naći zakone transformacije viših modova polja u odnosu na Kac–Mudijevu algebru, i pronaći ona polja koja se transformišu *nehomogeno*.

Primer 3. Da bismo ilustrovali ovo pravilo transformacije Goldstonovih bozona, vratimo se na primer II.5. Tamo je posmatran model sa tripletom skalarnih polja φ^a, u kome je dejstvo invarijantno u odnosu na trodimenzione rotacije koje deluju u prostoru komponenti polja: $\varphi^a \to R^a{}_b\varphi^b$. Ako se spontano narušenje simetrije realizuje tako da u osnovnom stanju jedino treća komponenta polja dobije nenultu vrednost, $(\varphi^3)_0 = v$, onda ćemo definisati nova polja η^a,

$$\varphi_0^1 = \eta^1\,, \qquad \varphi^2 = \eta^2\,, \qquad \varphi^3 = v + \eta^3\,,$$

čije vakuumske vrednosti iščezavaju. Zakoni transformacije novih polja u odnosu na rotaciju imaju oblik

$$\begin{aligned} &\eta^3 \to R^3{}_1\eta^1 + R^3{}_2\eta^2\,, \\ &\eta^\alpha \to R^\alpha{}_2\eta^2 + R^\alpha{}_3(v+\eta^3)\,, \qquad \alpha = 1,2\,. \end{aligned}$$

Tako vidimo da se Higsovo polje η^3 transformiše homogeno, dok se Goldstonovi bozoni η^1 i η^2 transformišu nehomogeno.

Na sličan način, polazeći od pravila transformacije veličina $g_{\mu\nu}(x,y)$, $B_\mu(x,y)$ i $\phi(x,y)$, u odnosu na opšte koordinatne transformacije u $d=5$, i oblika vakuumskog stanja, mogu se odrediti transformacione osobine polja $g^n_{\mu\nu}$, B^n_μ i ϕ^n u odnosu na (10.29), i pronaći Goldstonovi bozoni. Rezultat ove analiza je sledeći:

Polja B^n_μ i ϕ^n, $n>0$, su Goldstonovi bozoni narušene Kac–Mudijeve simetrije.

Dosadašnja analiza spektra teorije na bazi Kac–Mudijeva simetrija ukazuje da su polja B^n_μ i ϕ^n, kao i $g^0_{\mu\nu}$ i B^0_μ, bezmasena, dok je ϕ^0 masivno kao pseudo–Goldstonov bozon. Šta se dogadja sa $g^n_{\mu\nu}$? Potpuno razjašnjenje strukture spektra dobija se iz činjenice da teorija poseduje i odredjene lokalne simetrije.

Higsov mehanizam. U teoriji sa spontanim narušenjem simetrije, koja ima i lokalnu simetriju, fizički spektar se dobija na osnovu tzv. Higsovog mehanizma: potencijalni Goldstonovi bozoni nestaju kao fizički modovi — njih “gutaju” gradijentna polja, koja postaju masivna vektorska polja. Ovaj mehanizam je odgovoran i za fizički spektar KK teorije.

a) Petodimenziona teorija poseduje lokalnu simetriju opisanu parametrima $\xi^\mu_n(x)$ i gradijentnim poljima ($g^0_{\mu\nu}$; $g^n_{\mu\nu}, n>0$). Higsov mehanizam deluje na sledeći način:

— gradijentna polja $g^0_{\mu\nu}$ ostaju bezmasena, što je povezano sa simetrijom $\widetilde{P}_4$ [parametri $\xi^\mu_0(x)$];
— gradijentna polja $g^n_{\mu\nu}$ $(n > 0)$ (2 stepena slobode) "gutaju" Goldstonove bozone B^n_μ i ϕ^n (2+1=3 stepena slobode) i postaju masivna polja (2+3=5 stepeni slobode).

Ovaj mehanizam objašnjava zašto se u kompletnoj teoriji, koja je invarijantna u odnosu na opšte koordinetne transformacije, pojavljuje beskonačna kula masivnih modova.

b) Lokalna $U(1)$ simetrija osigurava da gradijentno polje B^0_μ ostane bezmaseno.

c) Globalne W transformacije ne predstavljaju simetriju kompletne teorije. Zbog toga je ϕ^0 pseudo–Goldstonov bozon, tj. masivno polje.

Tabela 10.2 Fizički spektar petodimenzione KK teorije

polja	ϕ^0	B^0_μ	$g^0_{\mu\nu}$	$g^n_{\mu\nu}$	B^n_μ	ϕ^n
stepeni slobode	1	2	2	5	–	–
tip	$m \neq 0$	$m = 0$	$m = 0$	$m \neq 0$	Gb	Gb

Prema tome, fizički spektar KK teorije sadrži masivni skalar ϕ^0, bezmaseno gradijentno polje B^0_μ, i bezmaseni mod gravitona $g^0_{\mu\nu}$ sa celom kulom masivnih viših modova $g^n_{\mu\nu}$.

3. VIŠEDIMENZIONA TEORIJA GRAVITACIJE

Kaluca i Klajn su pokazali kako se, polazeći od petodimenzione teorije gravitacije, može doći do jedinstvenog opisa gravitacije i elektrodinamike. Uopštenjem ove ideje na teoriju gravitacije u više od pet dimenzija, dobija se jedinstvena teorija gravitacije i lokalne neabelove teorije, što predstavlja dobru osnovu za ujedinjenje svih osnovnih interakcija (vidi: Zee, 1981; Salam i Strathdee, 1982; Macklenberg, 1983; Duff, Nilsson i Pope, 1986; Bailin i Love, 1987).

3.1 Opšti oblik metrike

Pri razmatranju dinamike višedimenzione teorije gravitacije pretpostavićemo, zbog jednostavnosti, da se ona ostvaruje u Rimanovom prostoru.

Osnovno stanje. Posmatrajmo d–dimenzioni Rimanov prostor V_d, $d = 4 + D$, sa koordinatama $z^M = (x^\mu, y^\alpha)$ i metrikom $\hat{g}_{MN}$ signature $(+,-,-,-,-,...)$. Pretpostavićemo da nema drugih polja osim gravitacionog, i da je dinamika sistema opisana dejstvom

$$I_G = -\frac{1}{2\hat{\kappa}} \int dz \sqrt{|\hat{g}|} \left(\widehat{R} + \Lambda \right) , \qquad (10.30a)$$

gde je Λ kosmološka konstanta. Dejstvo je invarijantno u odnosu na opšte koordinatne transformacije, a jednačine kretanja imaju oblik

$$\widehat{R}_{MN} - \tfrac{1}{2}\hat{g}_{MN}\left(\widehat{R} + \Lambda\right) = 0\,. \qquad (10.30b)$$

Jedan od glavnih problema u KK teoriji je izbor pravog vakuuma. Potražimo osnovno stanje sistema u obliku

$$(V_d)_0 = V_4 \times B_D\,, \qquad \text{tj.} \qquad \hat{g}^0_{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} g^0_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g^0_{\alpha\beta}(y) \end{pmatrix}, \qquad (10.31)$$

gde je V_4 četvorodimenzioni prostor–vreme signature $(+,-,-,-)$, a B_D D–dimenzioni prostor euklidske signature $(-,-,...)$. Standardno se pretpostavlja da je B_D kompaktan prostor. Za ovo izlaganje dovoljno je kompaktnu mnogostrukost predstaviti kao zatvoren podskup euklidskog prostora, koji ima konačan dijametar (vidi dodatak K). Pošto kompaktan prostor u $D \geq 2$ nije u opštem slučaju ravan, metrika $g^0_{\alpha\beta}$ zavisi od y. Jednačine kretanja za metriku (10.31) imaju oblik

$$R^4_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^0_{\mu\nu}(R^4 + R^D + \Lambda) = 0\,, \qquad R^D_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}g^0_{\alpha\beta}(R^4 + R^D + \Lambda) = 0\,,$$

gde su R^4 i R^D krivine prostora V_4 i B_D, redom.

Primetimo da u ovoj teoriji nije lako naći fizički prihvatljivo osnovno stanje u kome je prostor V_4 ravan. Zaista, iz $R^4_{\mu\nu} = 0$ i jednačina kretanja sledi uslov $R^D_{\alpha\beta} = 0$, koji, kao što ćemo videti, predstavlja suviše jako ograničenje na B_D.

Ako se ograničimo na četvorodimenzione prostore V_4 koji su *maksimalno simetrični*, za koje važi $R^4_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{3}\lambda(g^0_{\mu\lambda}g^0_{\nu\rho} - g^0_{\mu\rho}g^0_{\nu\lambda})$, tada ćemo imati mogućnosti koje su navedene u sledećoj tabeli (Duff, Nilsson i Pope, 1986).

Tabela 10.3 Karakteristike maksimalno simetričnih prostora u $d = 4$

λ	prostor–vreme	simetrija	$E > 0$?	SS ?
< 0	de Sitter	$SO(1,4)$	ne	ne
$= 0$	Minkovski	Poenkare	da	da
> 0	anti dS	$SO(2,3)$	da	da

Ovi prostori spadaju u grupu Ajnštajnovih prostora, jer zadovoljavaju relaciju $R^4_{\mu\lambda} = \lambda g^0_{\mu\lambda}$.

Što se tiče ekstra dimenzija, pretpostavićemo

a) da struktura prostora B_D omogućava pojavu fizički važne *lokalne neabelove simetrije*, *b*) da je B_D kompaktan, kako bi se u $d=4$ dobio *diskretan spektar*.

Medjusobna konzistentnost ovih pretpostavki mora se proveriti uz pomoć jednačina kretanja. Polazeći od uslova $R^4_{\mu\nu}=\lambda g^0_{\mu\nu}$ za V_4, iz jednačina kretanja sledi da je B_D Ajnštajnov prostor: $R^D_{\alpha\beta}=\rho g^0_{\alpha\beta}$, gde je $\rho=\lambda$. Za Ajnštajnove prostore važi sledeća teorema (Yano, 1970):

> *T. Kompaktni Ajnštajnovi prostori Euklidske signature* $(-,-,...)$ *sa* $\rho>0$ *nemaju neprekidne simetrije.*

Prema tome, da bi Ajnštajnov prostor B_D mogao da osigura pojavu neabelovih simetrija, treba da bude $\lambda\le 0$. S druge strane, da bi prostor V_4 zadovoljio teoremu o pozitivnosti energije (stabilnost) i dozvoljavao uvodjenje supersimetrije, potrebno je da bude $\lambda\ge 0$. Osnovno stanje (10.31) može zadovoljiti oba ova zahteva samo ako je $\lambda=0$, tj. $V_4=M_4$. Tada iz jednačina kretaja sledi $R^D_{\alpha\beta}=0$.

Primer jednostavnog rešenja koje zadovoljava uslov $R^D_{\alpha\beta}=0$ je D–torus: $B_D=S_1\times S_1\times\cdots\times S_1$ (D puta). Ovo rešenje, medjutim, dovodi do lokalne simetrije $U(1)\times U(1)\times\cdots\times U(1)$, koja nije relevantna za konstrukciju neabelove teorije. Najprivlačniji i najekonomičniji način dobijanja neabelove simetrije odgovara slučaju kad je B_D takozvani koset prostor neabelove rupe. Fizički interesantni prostori ovog tipa spadaju u Ajštajnove prostore sa $\rho\ne 0$, odakle sledi da V_4 ne može biti ravan.

Prema tome, pojava vakuuma oblika $M_4\times$ (koset) može se ostvariti jedino uvodjenjem dodatnih polja materije. U tom slučaju se, naravno, gubi prvobitna jednostavnost KK ideje. Detaljnije razmatranje pitanja kompaktifikacije ostavićemo za kraj ove glave.

Slojevita struktura. Da bi se pretpostavka o obliku vakuuma (10.31) na jednostavan način videla u strukturi nultih modova teorije, pogodno je kompletnu metriku prostora V_d izraziti u lokalno ortogonalnom obliku. Pretpostavićemo da V_d ima slojevitu strukturu: za svaku fiksnu vrednost koordinate x^μ definisan je sloj V_D kao D–dimenziona hiperpovrš sa koordinatama y^α (Zee, 1981; Salam i Strathdee, 1982). Ako je $\hat{\boldsymbol{e}}_M=(\hat{\boldsymbol{e}}_\mu,\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha)$ koordinatna baza tangentnih vektora prostora V_d, onda skup vektora $\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha$ definiše koordinatnu bazu sloja V_D. Neka je, dalje, $\hat{\boldsymbol{e}}_I=(\hat{\boldsymbol{e}}_i,\hat{\boldsymbol{e}}_a)$ lokalna Lorencova baza u T_d, pri čemu $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ i $\hat{\boldsymbol{e}}_a$ čine lokalne Lorencovu baze u T_4 i T_D, redom. Za svaki vektor koordinatne baze postoji razvoj $\hat{\boldsymbol{e}}_M=b^i{}_M\hat{\boldsymbol{e}}_i+b^a{}_M\hat{\boldsymbol{e}}_a$. Iz uslova lokalne ortogonalnosti prostora V_4 i V_D sledi da se u razvoju vektora $\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha$ iz V_D ne pojavljuje nijedan vektor $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ iz V_4, tako da je

$$b^i{}_\alpha=0 \quad\Longleftrightarrow\quad b^I{}_M(x,y)=\begin{pmatrix} b^i{}_\mu & 0\\ b^a{}_\mu & b^a{}_\alpha\end{pmatrix}, \tag{10.32a}$$

dok inverzna matrica $h_I{}^M$ ima oblik

$$h_I{}^M(x,y) = \begin{pmatrix} h_i{}^\mu & h_i{}^\alpha \\ 0 & h_a{}^\alpha \end{pmatrix}. \tag{10.32b}$$

Uobičajena konstrukcija metrike dovodi do rezultata

$$\hat{g}_{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi_{\alpha\beta} B^\alpha_\mu B^\beta_\nu & B^\beta_\mu \phi_{\beta\alpha} \\ \phi_{\alpha\beta} B^\beta_\nu & \phi_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{10.33a}$$

gde smo uveli oznake

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu} \equiv b^i{}_\mu b^j{}_\nu \eta_{ij}\,, \qquad \phi_{\alpha\beta} \equiv \hat{g}_{\alpha\beta} = b^a{}_\alpha b^b{}_\beta \eta_{ab}\,, \\ &B^\alpha_\mu \equiv h_a{}^\alpha b^a{}_\mu \quad \text{ili} \quad b^a{}_\mu \equiv b^a{}_\alpha B^\alpha_\mu\,. \end{aligned}$$

Odavde sledi

$$\hat{g}^{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\rho} B^\alpha_\rho \\ -B^\alpha_\rho g^{\rho\nu} & \phi^{\alpha\beta} + g^{\lambda\rho} B^\alpha_\lambda B^\beta_\rho \end{pmatrix}, \tag{10.33b}$$

gde su veličine $g^{\mu\nu}$ i $\phi^{\alpha\beta}$ inverzne od $g_{\mu\nu}$ i $\phi_{\alpha\beta}$, redom.

Oblik metrike (10.33) direktna je posledica lokalne ortogonalnosti V_4 i V_D. Veličine $g_{\mu\nu}$ i $\phi_{\alpha\beta}$ imaju jasan geometrijski smisao: $\phi_{\alpha\beta}$ odredjuje rastojanje bliskih tačaka unutar sloja V_D, dok $g_{\mu\nu}$ odredjuje medjusobno rastojanje bliskih slojeva. Smisao komponenti B^α_μ sledi iz razmatranja preostale simetrije prostora V_d.

Preostala simetrija. Opšte koordinatne transformacije u V_d koje ne narušavaju njegovu slojevitu strukturu, izraženu uslovom (10.32*a*), imaju oblik

$$x' = x'(x)\,, \qquad y' = y'(x,y)\,. \tag{10.34a}$$

Pri ovim transformacijama komponente metrike se transformišu po sledećim pravilima:

$$\begin{aligned} &g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}\,, \qquad \phi'_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\gamma}{\partial y'^\alpha}\frac{\partial y^\delta}{\partial y'^\beta}\phi_{\gamma\delta}\,, \\ &B'^\alpha_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial y'^\alpha}{\partial y^\gamma} B^\gamma_\nu - \frac{\partial y'^\alpha}{\partial x^\nu}\right). \end{aligned} \tag{10.34b}$$

Odavde sledi:

a) $g_{\mu\nu}(x,y)$ je tenzor;
b) $\phi_{\alpha\beta}(x,y)$ je tenzor;
c) $B^\alpha_\mu(x,y)$ se transformiše nehomogeno, dok u slučaju specijalnih transformacija $y' = y'(y)$ postaje tenzor;

Posebno je interesantno uočiti sledeće:

— u odnosu na transformacije $x' = x'(x)$, $y' = y$, veličine $g_{\mu\nu}, B^{\alpha}_{\mu}$ i $\phi_{\alpha\beta}$ su tenzori u odnosu na indekse μ, ν iz V_4 ($g_{\mu\nu}$ je tenzor, B^{α}_{μ} je vektor a $\phi_{\alpha\beta}$ skalar);

— u odnosu na transformacije $x' = x$, $y' = y'(x)$, veličine $g_{\mu\nu}, B^{\alpha}_{\mu}$ i $\phi_{\alpha\beta}$ su tenzori u odnosu na indekse α, β iz V_D ($g_{\mu\nu}$ je skalar, B^{α}_{μ} je vektor a $\phi_{\alpha\beta}$ tenzor);

Izometrije i harmonijski razvoj. Razmatranje simetrija prostora B_D nas dovodi do izučavanja prostora sa izometrijama (dodatak K). Poznavanje njihove strukture omogućava jednostavno dobijanje efektivne četvorodimenzione teorije uz pomoć tzv. harmonijskog razvoja, koji predstavlja uopštenje pojma Furijeovog razvoja na veći broj dimenzija.

Posmatrajmo beskonačno male transformacije koordinata na mnogostrukosti B_D, koje se mogu zapisati u obliku

$$\delta y^{\alpha} = \varepsilon^{a} E^{\alpha}_{a}(y) = \varepsilon^{a}\Gamma_{a} y^{\alpha}\,, \qquad \Gamma_{a} \equiv E^{\alpha}_{a}\partial_{\alpha}\,, \qquad a = 1, 2, ..., m \tag{10.35}$$

gde su ε^{a} konstantni parametri, Γ_a generatori ovih transformacija, a broj parametara m ne mora biti jednak dimenziji prostora B_D. U ovom odeljku latinski indeksi $(a, b, ...)$ se odnose na parametre transformacije ε^{a} (nema opasnosti da ove indekse pomešamo sa indeksima tangentnog prostora T_D, jer ove poslednje nećemo više koristiti). Posmatrane transformacije realizuju *delovanje grupe* G na B_D, ako generatori Γ_a zadovoljavaju komutacione relacije

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = f_{ab}{}^{c}\Gamma_c \quad \Longleftrightarrow \quad E^{\alpha}_{a}\partial_{\alpha}E^{\beta}_{b} - E^{\alpha}_{b}\partial_{\alpha}E^{\beta}_{a} = f_{ab}{}^{c}E^{\beta}_{c}\,, \tag{10.36a}$$

koje, ustvari, predstavljaju Lijevu algebru grupe G. Od posebne su važnosti one koordinatne transformacije pri kojima se forma metrike ne menja: $\phi'_{\alpha\beta}(y) = \phi_{\alpha\beta}(y)$. Takve transformacije se nazivaju *izometrije*. Transformacije (10.35) čine izometriju prostora B_D, ako koeficijenti $E^{\alpha}_{a}(y)$ zadovoljavaju Kilingovu jednačinu:

$$E_{a\alpha;\beta} + E_{a\beta;\alpha} = 0\,, \qquad E_{a\alpha} \equiv \phi_{\alpha\beta}E^{\beta}_{a}\,, \tag{10.36b}$$

gde ; označava kovarijantni izvod definisan pomoću Rimanove koneksije.

U KK teorijama od posebne su važnosti maksimalno simetrični prostori, koji imaju maksimalan broj Kilingovih vektora. Maksimalan broj Kilingovih vektora može biti i veći od dimenzije prostora. Tako, na primer, dvodimenziona sfera S_2 predstavlja maksimalno simetričan prostor rotacione grupe $SO(3)$, i poseduje tri Kilingova vektora.

Ako je kompaktan prostor B_D maksimalno simetričan, tada postoji kompletan, ortonormiran skup $Y_{\{n\}}(y)$ svojstvenih funkcija operatora $\Box_y$, tako da se svaka funkcija $\Phi(x,y)$ može razviti u red

$$\Phi(x,y) = \sum_{[n]} \Phi_{[n]}(x) Y_{[n]}(y)\,. \tag{10.37}$$

Ovaj razvoj je poznat kao harmonijski razvoj na B_D, i predstavlja uopštenje Furijeovog razvoja na S_1 (Salam i Strathdee, 1982; Viswanatan, 1984).

Primer 4. Posmatrajmo šestodimenzionu KK teoriju, u kojoj je prostor B_2 zadat kao dvodimenziona sfera poluprečnika r. U teoriji bezmasenog skalarnog polja Φ pojavljuje se Laplasov operator $\Box_y = (\sqrt{|\phi|})^{-1}\partial_\alpha\left(\sqrt{|\phi|}\phi^{\alpha\beta}\partial_\beta\right)$. U sfernim koordinatama (θ,φ) metrika sfere B_2 je odredjena kvadratnom formom $ds^2 = -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, pa Laplasov operator dobija oblik

$$\Box_y = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Njegove svojstvene funkcije su sferni harmonici $Y_{lm}(\theta,\varphi)$:

$$\Box_y Y_{lm} = \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}\,, \qquad (l = 0,1,2,\ldots\infty; \quad m = -l, -l+1, \ldots, +l)\,.$$

Koristeći razvoj $\Phi(x,\theta,\varphi) = \sum_{l,m}\Phi_{lm}(x)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ u dejstvu šestodimenzione teorije, i integraleći po S_2, dobija se efektivna četvorodimenziona teorija. U njoj se pojavljuje beskonačan broj modova $\Phi_{lm}(x)$ čije su mase date relacijom $m_l^2 = l(l+1)/r^2$. Modovi $\Phi_{lm}(x)$ nose reprezentaciju grupe $SO(3)$ (grupa izometrije sfere S_2).

Svaka dinamička varijabla posmatrane d–dimenzione teorije može se razviti u red oblika (10.37). Korišćenjem ovog razvoja u dejstvu (10.30) i integracijom po y (uz korišćenje uslova ortonormiranosti harmonika $Y_{[n]}$) dobija se efektivna četvorodimenziona teorija, u kojoj se efekat ekstra dimenzija vidi preko prisustva beskonačnog broja viših modova $\Phi_{[n]}$. Maseni spektar efektivne četvorodimenzione teorije zavisi od izbora prostora B_D.

3.2 Bezmaseni sektor efektivne teorije

Videli smo da se efektivna četvorodimenziona teorija dobija razvojem svih varijabli po B_D–harmonicima, i integracijom polaznog dejstva po kompaktnom prostoru B_D. Obratimo sada pažnju na sektor nultih modova, koji odredjuje osnovne fizičke karakteristike teorije.

Metrika bezmasenog sektora. Za razliku od petodimenzione teorije, sektor nultih modova se ovde ne može definisati prostim zanemarivanjem svake y–zavisnosti dinamičkih varijabli. Pokazaćemo da je ovaj sektor definisan metrikom oblika

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)\,, \qquad \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta}(y)\,, \qquad B^\alpha_\mu = E^\alpha_a(y)B^a_\mu(x)\,, \tag{10.38}$$

gde je E_a^α Kilingov vektor prostora B_D, a polja $g_{\mu\nu}(x)$ i $B_\mu^a(x)$ imaju uloge metrike fizičkog prostor–vremena i neabelovog gradijentnog polja, redom. Razmotrimo ovaj iskaz detaljnije.

1. Uslov $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ znači da su u metrici $g_{\mu\nu}(x,y)$ zanemareni svi viši modovi.

2. Ako želimo da prostor B_D ne bude ravan, metrika $\phi_{\alpha\beta}$ ne može biti konstantna, tj. mora zavisiti od y. Ovo je u skladu sa činjenicom da tenzorsko polje $\phi_{\alpha\beta}$ na proizvoljnom kompaktnom prostoru B_D $(D \geq 2)$ nije konstantno (y–nezavisno). Uslov $\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta}(y)$ znači da su zanemarene sve ekscitacije B_D–vakuuma.

3. Treći uslov odredjuje strukturu polja B_μ^α i zahteva nešto složenije objašnjenje, za koje je potrebno detaljnije poznavanje pojma simetričnih prostora.

Za prostor B_D pretpostavljamo da je maksimalno simetričan, tj. da ima maksimalan broj Kilingovih vektora E_a^α. Odavde sledi da je B_D *homogen* prostor, tj. da se u njemu svaka tačka P_1 može pomeriti u svaku drugu tačku P_2 delovanjem transformacija izometrije. U homogenim prostorima Kilingovi vektori čine bazu. Pošto maksimalan broj Kilingovih vektora može biti i veći od dimenzije prostora, u homogenim prostorima baza Kilingovih vektora može biti prekompletna.

Iz homogenosti prostora B_D sledi da se veličina B_μ^α, koja predstavlja vektor na B_D, može izraziti pomoću baze Kilingovih vektora: $B_\mu^\alpha = E_a^\alpha B_\mu^a$. Sada možemo pretpostaviti da je $B_\mu^a = B_\mu^a(x)$, čime dolazimo do poslednje relacije u jednačini (10.38). Naravno, vektorsko polje B_μ^α na proizvoljnom kompaktnom prostoru B_D $(D > 1)$ nije konstantno (y–nezavisno).

Lokalna neabelova simetrija. Jasno je da mora postojati neka veza izmedju simetrija prostora B_D i lokalne neabelove simetrije koju želimo da dobijemo. Analiza simetrije bezmasenog sektora pomoći će nam da bolje shvatimo ovu vezu, kao i smisao varijabli koje se pojavljuju u (10.38).

Posmatrajmo, najpre, beskonačno male koordinatne transformacije u B_D:

$$x'^\mu = x^\mu \,, \qquad y'^\alpha = y^\alpha + \xi^\alpha(x,y) \equiv y^\alpha + \varepsilon^a(x,y)E_a^\alpha(y) \,, \qquad (10.39a)$$

gde smo parametar $\xi^\alpha(x,y)$ razvili po Kilingovom bazisu.

1. U odnosu na ove transformacije $g_{\mu\nu}(x,y)$ je skalar: $g'_{\mu\nu}(x',y') = g_{\mu\nu}(x,y)$. Isto važi i ako pretpostavimo da je $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$, pa ovaj uslov ne nameće nikakve restrikcije na posmatrane transformacije.

2. Ako u zakonu transformacije (10.34b) za B_μ^α iskoristimo razlaganje $B'^\alpha_\mu(x',y') = E_a^\alpha(y')B'^a_\mu(x',y')$, i slično za $B_\mu^\beta(x,y)$, kao i uslov (10.39a), dobija se relacija

$$E_a^\alpha \delta_0 B_\mu^a = \big[-\partial_\mu\varepsilon^a + f_{bc}{}^a B_\mu^b\varepsilon^c + (\varepsilon^a_{,\gamma}B_\mu^c - \varepsilon^c B^a_{\mu,\gamma})E_c^\gamma\big]E_a^\alpha \,.$$

Odavde se vidi da ograničenje $B^a_\mu = B^a_\mu(x)$ povlači $\varepsilon^a = \varepsilon^a(x)$, tako da je

$$\delta_0 B^a_\mu = -\partial_\mu \varepsilon^a + f_{bc}{}^a B^b_\mu \varepsilon^c \,. \tag{10.40}$$

Prema tome, polje $B^a_\mu(x)$ predstavlja *gradijentno polje* u odnosu na koordinatne transformacije $\delta y^\alpha = E^\alpha_a(y)\varepsilon^a(x)$.

3. Metrika $\phi_{\alpha\beta}(y)$ je invarijantna u odnosu na posmatrane transformacije, jer su E^a_α Kilingovi vektori prostora B_D:

$$\delta_0 \phi_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} = -\varepsilon^a (E_{a\alpha;\beta} + E_{a\beta;\alpha}) = 0 \,.$$

Nije teško videti da koordinatne transformacije $x' = x'(x)$, $y' = y$ imaju smisao opštih koordinatnih transformacija u četvorodimenzionom prostoru V_4. Tako zaključujemo da usvojeni oblik metrike (10.38) implicira invarijantnost teorije u odnosu na redukovane koordinatne transformacije

$$x'^\mu = x'^\mu(x) \,, \qquad y'^\alpha = y^\alpha + \varepsilon^a(x) E^\alpha_a(y) \,. \tag{10.39b}$$

Polje $g_{\mu\nu}(x)$ predstavlja metriku četvorodimenzionog prostora, a $B^a_\mu(x)$ je gradijentno polje pridruženo izometrijama u B_D.

Dobijeni rezultati potvrdjuju pogodnost opšte parametrizacije metrike (10.33) sa gledišta uspostavljanja jednostavne veze izmedju nultih modova teorije i osnovnih fizičkih polja — gravitona i neabelovog gradijentnog polja.

Efektivno dejstvo. Iz oblika metrike (10.38) posle dužeg računa se dobija sledeća relacija:

$$\widehat{R} = R^4 + R^D - \tfrac{1}{4}\phi_{\alpha\beta} E^\alpha_a E^\beta_b F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} \,, \tag{10.41}$$

gde je $F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu - f_{bc}{}^a B^b_\mu B^c_\nu$, a $F^{a\mu\nu} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} F^a_{\lambda\rho}$. Koristeći, dalje, osobinu faktorizacije determinante, $\hat{g} = g\phi$, gde je $\hat{g} = \det(\hat{g}_{MN})$, $g = \det(g_{\mu\nu})$, $\phi = \det(\phi_{\alpha\beta})$, dejstvo (10.30) dobija oblik

$$I^{(0)}_G = -\frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^4x d^D y \sqrt{-g}\sqrt{|\phi|} \left(R^4 + R^D + \Lambda - \tfrac{1}{4}\phi_{\alpha\beta} E^\alpha_a E^\beta_b F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} \right) . \tag{10.42a}$$

Izaberimo sada konstante $\hat{\kappa}$ i Λ u obliku

$$\hat{\kappa} = \kappa \int d^D y \sqrt{|\phi(y)|} \,, \qquad \Lambda = -\frac{\int d^D y \sqrt{|\phi(y)|}\, R^D(y)}{\int d^D y \sqrt{|\phi(y)|}} \,,$$

gde je κ četvorodimenziona gravitaciona konstanta, a Λ je izabrana tako da posle integracije po y poništi doprinos od R^D. Ako Kilingove vektore normiramo po pravilu

$$-\frac{1}{2\hat{\kappa}} \int d^D y \sqrt{|\phi(y)|}\, \phi_{\alpha\beta} E^\alpha_a(y) E^\beta_b(y) = \delta_{ab} \,, \tag{10.43}$$

efektivno četvorodimenziono dejstvo dobija oblik

$$I_G^{(0)} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2\kappa}R^4(x) - \tfrac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(x)F^{a\mu\nu}(x)\right), \qquad (10.42b)$$

koji odgovara standardnoj teoriji gravitacije i neabelovog gradijentnog polja.

Graviton–skalar sektor. U prethodnom razmatranju smo pretpostavili da je metrika $\phi_{\alpha\beta}$ nezavisna od x. Posmatrajmo sada metriku

$$\hat{g}_{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & \phi_{\alpha\beta}(x,y) \end{pmatrix}, \qquad (10.44a)$$

u kojoj se pojavljuje x–zavisnost u $\phi_{\alpha\beta}$, dok je doprinos gradijentnih polja, zbog jednostavnosti, zanemaren. U ovom slučaju dinamika gravitona $g_{\mu\nu}$ i skalarnog polja opisana je dejstvom (Cho i Freund, 1975)

$$\begin{aligned} I_G^{(0)} = &-\frac{1}{2\hat{\kappa}}\int d^4x d^D y\sqrt{-g}\sqrt{|\phi|}\Big(R^4 + R^D + \Lambda - \phi^{\alpha\beta}D^\mu D_\mu\phi_{\alpha\beta} \\ &- \tfrac{1}{2}D^\mu\phi_{\alpha\beta}D_\mu\phi^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4}\phi^{\alpha\beta}D^\mu\phi_{\alpha\beta}\,\phi^{\gamma\delta}D_\mu\phi_{\gamma\delta} \\ &+ \tfrac{1}{4}\phi^{\alpha\beta}\phi^{\gamma\delta}D^\mu\phi_{\alpha\gamma}D_\mu\phi_{\beta\delta}\Big). \end{aligned} \qquad (10.44b)$$

Razvojem $\phi_{\alpha\beta}$ po harmonicima i integracijom po y dobija se efektivni oblik četvorodimenzionog dejstva.

Konstanta interakcije. Uslov normiranja Kilingovih vektora (10.43) odredjuje konstantu interakcije neabelovih polja. Zaista, ako Kilingovi vektori zadovoljavaju komutacione relacije (10.36a), ali nisu normirani u skladu sa (10.43), tada promena njihove norme povlači za sobom promenu konstante interakcije sadržane u ${f_{ab}}^c$:

$$E_a^\alpha \to gE_a^\alpha\,, \qquad \Longrightarrow \qquad {f_{ab}}^c \to g{f_{ab}}^c\,.$$

Primer 5. Ilustrovaćemo opisani efekat u slučaju kad je prostor B_D dvodimenziona sfera S_2. Metrika sfere S_2 u sfernim koordinatama $y^\alpha = (\theta, \varphi)$ odredjena je kvadratom intervala $ds^2 = -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\delta\varphi^2)$. Rešavanjem Kilingovih jednačina dobijaju se generatori

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sin\varphi\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\partial_\varphi\,, \\ \Gamma_2 &= \cos\varphi\partial_\theta - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\partial_\varphi\,, \\ \Gamma_3 &= \partial_\varphi\,, \end{aligned}$$

koji zadovoljavaju komutacione relacije $[\Gamma_a, \Gamma_b] = -\varepsilon_{abc}\Gamma_c$. Odavde se lako izračunava

$$\int d^2y\sqrt{|\phi|} = 4\pi r^2\,, \quad -\int d^2y\sqrt{|\phi|}\phi_{\alpha\beta}E_a^\alpha E_b^\beta = \frac{8\pi r^4}{3}\,\delta_{ab}\,,$$

pa sledi $\hat\kappa = \kappa\, 4\pi r^2$, a Kilingovi vektori imaju normu

$$-\frac{1}{2\hat\kappa}\int d^D y\sqrt{|\phi(y)|}\,\phi_{\alpha\beta}E_a^\alpha(y)E_b^\beta(y) = \frac{r^2}{3\kappa}\delta_{ab}\,.$$

Da bismo ovu relaciju uskladili sa zahtevom (10.43), moramo reskalirati Kilingove vektore i strukturne konstante:

$$E_a^\alpha \to gE_a^\alpha\,, \qquad \varepsilon_{abc}\to g\varepsilon_{abc}\,, \qquad g\equiv\frac{1}{r}\sqrt{3\kappa}\,,$$

gde je g konstanta interakcije grupe $SO(3)$ (= grupa izometrije sfere S_2). Ako konstanta interakcije g ima uobičajenu vrednost blisku jedinici, poluprečnik sfere r mora biti jako mali — reda Plankove dužine.

U slučaju kad je unutrašnji prostor D–dimenziona sfera, grupa izometrije je $SO(D+1)$, a konstanta interakcije ima vrednost

$$g=\frac{1}{r}\sqrt{\kappa(D+1)}\,. \tag{10.45a}$$

U ovom slučaju veličina $r/\sqrt{D}$ mora biti mala, što se može postići ne samo smanjenjem poluprečnika sfere r već i povećanjem dimenzije D. Ako uzmemo u obzir da je sfera S_D Ajnštajnov prostor za koji važi $R^D_{\alpha\beta}=\rho\phi_{\alpha\beta}$, gde je $\rho=-(D-1)/r^2$, dobija se

$$g=\sqrt{\kappa(-\rho)(D+1)/(D-1)}\,, \tag{10.45b}$$

pa sledi da konstanta $(-\rho)$ mora biti veoma velika.

Slična veza izmedju konstante interakcije i veličine prostora B_D postoji i u opštem slučaju (Weinberg, 1983). Ako B_D nije izotropan, u teoriji se pojavljuje više konstanti interakcije. Zadržavajući se na slučaju izotropnih prostora primećujemo da posle reskaliranja ${f_{ab}}^c\to g{f_{ab}}^c$, jačina polja dobija standardni oblik: $F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu B^a_\nu-\partial_\nu B^a_\mu - g{f_{bc}}^a B^b_\mu B^c_\nu$.

3.3 Spontana kompaktifikacija

U teoriji definisanoj dejstvom (10.30), jednačine kretanja nemaju klasična rešenja oblika $M_4\times B_D$, gde je B_D kompaktan prostor. Pokazaćemo kako se u tom slučaju kompaktifikacija prostora B_D može ostvariti dodavanjem ekstra polja materije.

Posmatrajmo teoriju u kojoj pored gravitacije postoje i dodatna polja materije:

$$I=-\frac{1}{2\hat\kappa}\int dz\sqrt{|\hat g|}\left(\widehat R+\Lambda\right)+I_M\,. \tag{10.46}$$

Gravitacione jednačine kretanja su

$$\widehat{R}_{MN} - \tfrac{1}{2}\hat{g}_{MN}\left(\widehat{R} + \Lambda\right) = \hat{\kappa} T_{MN}\,, \tag{10.47}$$

gde je tenzor T_{MN} odredjen relacijom $\delta I_M \equiv \frac{1}{2}\int dz\sqrt{|\hat{g}|}T_{MN}\delta\hat{g}^{MN}$. Ako je vakuum oblika $M_4 \times B_D$, tada iz $\widehat{R}_{\mu\nu} = 0$ sledi

$$T_{\mu\nu} = \frac{C_4}{\hat{\kappa}}\eta_{\mu\nu}\,, \qquad C_4 = -\tfrac{1}{2}(R^D + \Lambda) = \text{const.}\,.$$

Na sličan način iz zahteva da B_D bude Ajnštajnov prostor, $\widehat{R}_{\alpha\beta} = \rho\phi_{\alpha\beta}$, sledi

$$T_{\alpha\beta} = \frac{C_D}{\hat{\kappa}}\phi_{\alpha\beta}\,, \qquad C_D = -\tfrac{1}{2}(R^D + \Lambda - 2\rho) = \text{const.}\,.$$

Tada se iz jednačina kretanja dobija

$$R^D_{\alpha\beta} = (C_D - C_4)\phi_{\alpha\beta}\,, \qquad \Lambda = (D-2)C_4 - DC_D\,.$$

Odavde se vidi da uslov kompaktifikacije ima oblik

$$\rho = C_D - C_4 < 0\,. \tag{10.48}$$

Ova relacija osigurava da kompaktan prostor B_D signature $(-,-,...)$ ima neprekidnu, neabelovu grupu simetrije. Pored toga, zahtevaćemo da je $C_4 - C_D \approx 1/\kappa$, što sledi iz uslova $g \approx 1$ i (10.45*b*).

Dodavanje antisimetričnog polja. U 11–dimenzionoj supergravitaciji prirodno se pojavljuje antisimetrično polje trećeg reda A_{MNP}, čija je jačina polja $F_{KLMN} = \partial_K A_{LMN} - \partial_N A_{KLM} + \partial_M A_{NKL} - \partial_L A_{MNK}$. Na bazi ovog polja, kao polja materije, postoji interesantan mehanizam kompaktifikacije (Freund i Rubin, 1980). Dejstvo antisimetričnog polja ima oblik

$$I_M = -\tfrac{1}{48}\int dz\sqrt{|\hat{g}|}F_{KLMN}F^{KLMN}\,. \tag{10.49}$$

Jednačine kretanja polja A_{KLMN} glase $\partial_K(\sqrt{|\hat{g}|}F^{KLMN}) = 0$, dok je tenzor energije–impulsa

$$T_{IJ} = -\tfrac{1}{6}\left(F_{KLMI}F^{KLM}{}_J - \tfrac{1}{8}\hat{g}_{IJ}F_{KLMN}F^{KLMN}\right).$$

Jednačine kretanja imaju rešenje tipa

$$F^{\mu\nu\lambda\rho} = F\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}/\sqrt{-g}\,, \qquad \text{ostale komponente} = 0\,, \tag{10.50}$$

gde je F konstanta. Za ovo rešenje tenzor energije–impulsa postaje

$$T_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}F^2\eta_{\mu\nu}\,, \qquad T_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}F^2\phi_{\alpha\beta}\,.$$

Odavde sledi $C_4 = -C_D = \hat{\kappa}F^2/2$, pa je uslov kompaktifikacije (10.48) ispunjen. Pri tome kosmološka konstanta dobija vrednost $\Lambda = \hat{\kappa}(D-1)F^2$.

Treba pomenuti da ovakav mehanizam kompaktifikacije nije zadovoljavajući u 11–dimenzionoj supergravitaciji, jer u toj teoriji mora biti $\Lambda = 0$ zbog supersimetrije.

Dodavanje gradijentnih polja. Posmatraćemo teoriju u kojoj se, kao polja materije, pojavljuju gradijentna polja A^a_M. Uvodjenje ovih polja nije u skladu sa osnovnim duhom KK prilaza, u kome očekujemo da se *sva* gradijentna polja mogu dobiti iz metrike $\hat{g}_{MN}$. Razmotrićemo, ipak, ovaj slučaj kao interesantnu ilustraciju mehanizma kompaktifikacije (Luciani, 1978).

Dejstvo za eksplicitno uvedena gradijentna polja ima oblik

$$I_M = -\tfrac{1}{4}\int dz\sqrt{|\hat{g}|}F^a_{MN}F^{aMN}\,, \tag{10.51}$$

gde je F^a_{MN} standardna Jang–Milsova jačina polja, a tenzor energije–impulsa je dat izrazom

$$T_{MN} = -\left(F^a_{KM}F^{aK}{}_N - \tfrac{1}{4}\hat{g}_{MN}F^a_{KL}F^{aKL}\right).$$

Pretpostavićemo da je Jang–Milsova grupa simetrije G jednaka sa grupom izometrije prostora B_D. U tom slučaju postoji rešenje jednačina kretanja koje ima oblik

$$\begin{aligned} &A^a_\mu = 0\,, \quad A^a_\alpha = aE^a_\alpha\,, \\ &\phi^{\alpha\beta} = bE^\alpha_a E^\beta_b g^{ab}\,, \end{aligned} \tag{10.52}$$

gde su a i b konstante, E^a_α Kilingovi vektori prostora B_D, a g^{ab} Kartanova metrika grupe G. Tada su samo komponente $F^a_{\alpha\beta}$ različite od nule, pa zamena u izraz za T_{MN} dovodi do uslova

$$\frac{C_4}{\hat{\kappa}} = \tfrac{1}{4}F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}\,, \qquad \frac{C_D}{\hat{\kappa}} = \frac{C_4}{\hat{\kappa}} - \frac{1}{D}F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}\,.$$

Odavde se vidi da je uslov kompaktifikacije (10.48) zadovoljen. Veličina $F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}$ je pozitivna, a izborom konstante a može se postići da ona bude dovoljno velika.

3.4 Opšte napomene

Dimenzija prostora B_D. Prvi problem koji se pojavljuje pri konstrukciji KK teorije je izbor dimenzije prostora B_D. Ovaj broj zavisi od tipa lokalne unutrašnje simetrije koja treba da opiše slabe, elektromagnetne, i jake interakcije. Ako želimo da $(4+D)$–dimenziona teorija opiše takozvani standardni model, grupa simetrije prostora B_D mora sadržavati grupu $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Najprostiji izbor za B_D je direktni proizvod $CP^2(C)\times S_2\times S_1$: $U(1)$ je grupa simetrije kruga S_1, $SU(2)$ [ili $SO(3)$] je grupa simetrije sfere S_2, dok kompleksni projektivni prostor $CP^2(C)$ ima simetriju $SU(3)$. Ovaj prostor ima $D=7$. Interesantno je da mnogi prostori dimenzije sedam imaju simetriju $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, ali nijedan prostor, čija je dimezija manja od sedam, nema ovu simetriju. Uzimajući u obzir i četiri dimenzije prostor–vremena, zaključujemo da ukupna dimenzija KK prostora mora biti najmanje jedanaest: $d\geq 11$.

S druge strane, postoje uverljivi argumenti da je $d=11$ najveća moguća dimenzija konzistentne supergravitacije (Nahm, 1978). Ovi argumenti se zasnivaju na činjenici da u slučaju $d>11$ reprezentacije supergravitacije sadrže bezmasena polja heliciteta većeg od 2, za koja se smatra da nemaju konzistentnu interakciju sa gravitacijom. Prema tome, spoj supergravitacije i KK teorije navodi nas na zaključak da je dimenzija sveta u kome živimo jednaka *jedanaest* (Witten, 1981a).

Fermioni. Čak i ako prethodni zaključak o dimenziji prostora usvojimo bez rezerve, konstrukcija realistične KK teorija zahteva od nas rešavanje i drugih problema, kao što je uključivanje fermiona (kvarkovi i leptoni). Da bismo ilustrovali u čemu je problem, posmatrajmo bezmaseno Dirakovo polje u $d=4+D$ dimenzija. Ovo polje zadovoljava jednačinu

$$i\gamma^M D_M\Psi = i\gamma^\mu D_\mu\Psi + i\gamma^\alpha D_\alpha\Psi = 0\,.$$

Ako uvedemo svojstvene vrednosti operatora $M\equiv i\gamma^\alpha D_\alpha$, $M\Psi=\lambda\Psi$, videćemo da one imaju ulogu mase sa gledišta četvorodimenzione teorije. Na kompaktnom prostoru B_D operator M ima diskretne svojstvene vrednosti: $\lambda=0$ ili $\sim 1/r$, gde je r radijus prostora B_D. Vrednost Plankove mase $\sim 1/r$ je previše velika, pa obični kvarkovi i leptoni moraju imati $\lambda=0$.

U mnogim interesantnim slučajevima maseni operator M *nema* nulte svojstvene vrednosti. Ako je, na primer, ukupan prostor oblika $M_4\times B_D$, a B_D Rimanov, tada važi

$$M^2\Psi = (-D^2+\tfrac{1}{4}R^D)\Psi\,,\qquad D^2 = D^\alpha D_\alpha\,.$$

Operator $-D^2$ je pozitivno definitan, što se može zaključiti analizom izraza $\int d^D y\sqrt{|\phi|}\Psi^+\big(-D^2\big)\Psi$, uz pomoć parcijalne integracije i uslova $D_\alpha\phi_{\beta\gamma}=0$.

Prema tome, ako je skalarna krivina R^D pozitivna, operator M nema nulte svojstvene vrednosti (Zee, 1981). Jedna mogućnost da se ovaj negativni rezultat prevazidje, nadjena je u posmatranju unutrašnjih prostora sa torzijom (Wu i Zee, 1984). Tada, medjutim, nisu dobijeni realistični kvantni brojevi fermiona. Druga mogućnost se nalazi u uvodjenju ekstra gradijentnih polja, čime se modifikuje Dirakov operator.

Eksplicitna analiza strukture efektivne teorije Dirakovog polja pokazuje da se *narušenje parnosti* pojavljuje samo u masenom sektoru teorije. S druge strane, u većini teorija koje ujedinjuju slabe, elektromagnetne i jake interakcije, parnost jeste narušena. Prema tome, probleme nultih modova i narušenja parnosti treba rešavati istovremeno.

Nulti modovi operatora M, ako postoje, čine odredjenu reprezentaciju unutrašnje grupe simetrije G, pridružene prostoru B_D. Ove reprezentacije ne zavise od heliciteta koji nosi fermion. S druge strane, realni fermioni imaju unutrašnje kvantne brojeve koji zavise od njihovog heliciteta: fermioni levog heliciteta se transformišu po reprezentaciji grupe G koja je kompleksno konjugovana od reprezentacije za fermione desnog heliciteta, i ove dve reprezentacije su neekvivalentne. Nažalost, dobijanje ovakvih reprezentacija nije nimalo lako iz sledećih razloga:

— zahtev da kiralni nulti mod gradi kompleksne reprezentacije grupe unutrašnje simetrije implicira da dimenzija prostora B_D mora biti parna;
— u svakom prostoru parnog broja dimenzija, u kome postoji neprekidna grupa simetrije, nulti modovi Dirakovog operatora grade realne reprezentacije ako nema dodatnih gradijentnih polja (posledica indeksne teoreme).

Prema tome, tek uvodjenje ekstra gradijentnih polja daje mogućnost dobijanja kiralnih nultih modova u kompleksnim reprezentacijama od G.

Problem kiralnih fermiona se takodje može rešavati polazeći od $(D+4)$–dimenzionih kiralnih fermiona $\Psi_\pm$. Tada, naravno, levo–desna asimetrija četvorodimenzione teorije nije izvedena osobina, već posebna pretpostavka.

Slični problemi se pojavljuju i u slučaju polja spina $\frac{3}{2}$. Dobijanje realističnih fermiona predstavlja jedan od najvećih problema u konstrukciji KK teorije (Witten, 1982).

Anomalije. Važna osobina kiralnih fermiona je da njihova interakcija sa gradijentnim poljima zavisi od kiralnosti, što je posledica oblika kovarijantnog izvoda. Dobro je poznato da kiralni fermioni uzrokuju pojavu anomalije: kvantni efekti vode do narušenja klasične lokalne simetrije teorije. Teorije sa anomalijama se ne mogu kvantizirati na standardan način, zbog čega se, obično, problem rešava konstrukcijom teorija u kojima se anomalije krate. Zahtev skraćivanja anomalija nameće dodatna ograničenja na strukturu fermionskih reprezentacija. Da bi se dobile teorije bez anomalije, grupa simetrije dodatnih gradijentnih polja mora biti povećana. Kao posledica toga, u teoriji se pojavljuje mnoštvo fermiona, od kojih većina ne odgovara fizičkoj realnosti.

Super KK. U mnogim razmatranjima fermioni se u KK teoriju uvode kao dodatna polja materije. Proizvoljnost u broju i vrsti ovako unetih fermiona odudara od originalne jednostavnosti Kalucine ideje. U supersimetričnoj verziji teorije ove proizvoljnosti nestaju kao posledica strukture supersimetrije, a bozoni i fermioni imaju ravnopravne uloge. Zbog toga su, prema nekim shvatanjima, tako formulisane KK teorije najprivlačnije (Duff, Nilsson i Pope, 1986).

Kao i obična gravitacija, i supergravitacija se može formulisati u više od četiri dimenzije. Veoma je interesantna činjenica da struktura teorije daje ograničenje na dimenziju prostora: $d \leq 11$. U $d = 11$ Lorencova grupa je $SO(1,10)$, a Dirakovi spinori imaju $2^5 = 32$ komponenti, čemu odgovara *osam* četvorokomponentnih spinora u M_4. To znači da, sa gledišta četvorodimenzione teorije, postoji osam generatora supersimetrije ($N = 8$), od kojih svaki menja helicitet za $\frac{1}{2}$, pa helicitet u supersimetričnom multipletu može imati vrednosti $\lambda = -2, -\frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, 2$. Drugim rečima, iskazi *a)* $\lambda \leq 2$ (u $d = 4$), *b)* $N \leq 8$ (u $d = 4$), i *c)* $d \leq 11$ (uz $N = 1$), su medjusobno ekvivalentni.

Mada u $d < 11$ postoji nekoliko formulacija supergravitacije, teorija u $d = 11$ ima jednu posebnu osobinu: njen oblik je na jedinstven način odredjen strukturom supersimetrije (Cremmer, Julia i Scherk, 1978). U njoj postoji prirodan mehanizam spontane kompaktifikacije, koji osigurava da je $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ simetrija bezmasenog sektora. Teorija sadrži sledeća polja: graviton $b^I{}_M$, spinsku koneksiju $A^{IJ}{}_M$, gravitino Ψ_M i antisimetričan tenzor A_{MNR}. Njene simetrije su:

— opšta kovarijantnost u $d = 11$,
— lokalna $SO(1,10)$ Lorencova simetrija,
— lokalna $N = 1$ supersimetrija, i
— lokalna Abelova simetrija antisimetričnog tenzora A_{MNR}.

Prisustvo antisimetričnog polja A_{MNR} omogućava prirodnu spontanu kompaktifikaciju $d = 11$ supergravitacije u oblik $M_4 \times B_7$, gde je B_7 kompaktan (Freund i Rubin, 1980). Primećujemo da je izdvajanje *četiri* fizičke dimenzije direktna posledica postojanja četiri indeksa polja F^{MNRL}. Odgovori na važna pitanja o stepenu narušenja supersimetrije i vrednosti kosmološke konstante zahtevaju detaljnije razmatranje strukture prostora B_7.

Interesantno je da dimenziona redukcija $d = 11$ supergravitacije sa osnovnim stanjem oblika $M_4 \times T_7$, gde je $T_7 = (S_1)^7$ sedmodimenzioni torus, daje $N = 8$ supergravitaciju u $d = 4$. Dobijena teorija ima neabelove simetrije $O(8)$, $SU(8)$ i $E(7)$, koje ne postoje u $d = 11$ teoriji. To su “slučajne” simetrije bezmasenog sektora teorije, koje se narušavaju prisustvom masenih modova. Ako bi one imale važnu fenomenološku ulogu, $N = 8$ teorija bi se morala smatrati pravom četvorodimenzionom teorijom, a ne aproksimacijom $d = 11$ supergravitacije.

Kosmologija. Postojenje D kompaktnih, prostornih dimenzija u KK teoriji ima mali direktan značaj u fizici elementarnih čestica na niskim energijama. U kosmologiji situacija može biti drugačija. U ranoj fazi razvoja svemira izgleda verovatno da su *sve* prostorne dimenzije imale istu skalu, pa se postavlja pitanje kako je svemir od te rane faze došao do današnjeg oblika $V_4 \times B_D$, u kome se pojavljuju dve prostorne skale. Za razmatranje ovog problema prirodno je poći od metrike oblika

$$ds^2 = dt^2 - a(t) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - b(t) g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta\,, \quad \mu,\nu = 1,2,3; \quad \alpha,\beta \geq 5\,.$$

Postoje modeli koji ekplicitno pokazuju da su dve skale mogle nastati u procesu dinamičke evolucije sistema u vremenu. Drugim rečima, u nekoj epohi skala fizičkog troprostora $a(t)$ počela je da raste mnogo brže nego skala $b(t)$ D–dimenzionog prostora B_D. Slabost ovih modela se ispoljava u tome što se neki parametri moraju veoma precizno podesiti da bi se željeni efekat ostvario. I pored niza interesantnih efekata, značaj KK modela u kosmologiji nije dovoljno ispitan (Bailin i Love, 1987).

Umesto zaključka. KK teorija je stara preko sedamdeset godina, i za to vreme ona je u velikoj meri zadržala svoju originalnu privlačnost, mada nikada nije dala dovoljno realistična predvidjanja. Zašto je to tako? Gledajući unazad može se uočiti da je, u svoje vreme, originalna petodimenziona teorija bila *preuranjena*. Struktura osnovnih interakcija nije bila dovoljno poznata, a ideja spontanog narušenja simetrije tek je tražila svoje mesto u fizici. "Ono što ne znamo jeste da li je konačno sazrelo vreme za Kaluca–Klajnovu teoriju, da li još uvek postoje suštinske činjenice koje ne znamo, ili je, možda, ideja kompletno pogrešna. Vreme će presuditi." (Witten, 1981*b*).

ZADACI

1. *a*) Naći Kristofelovu koneksiju $\hat{\Gamma}^M_{NR}$ koja odgovaraju metrici (10.4*a*).
   b) Izračunati $\widehat{R}_{MN}$, a zatim izvesti relaciju $\widehat{R} = R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.
2. *a*) Dokazati da je determinanta $\hat{g}$ metrike (10.4*a*) nezavisna od B_μ, pa odatle izvesti jednakost $\hat{g} = -g$.
   b) Izvesti oblik redukovanog dejstva (10.6*a*).
3. Napisti jednačine kretanja koje slede iz redukovanog dejstva (10.6*a*), i uporediti ih sa jednačinama $\widehat{R}_{\mu\nu} = 0$, $\widehat{R}_{\mu 5} = 0$ i $\widehat{R}_{55} = 0$, koje se dobijaju iz početnog dejstva (10.1).
4. Posmatrajmo skalarnu teoriju polja u $1+1$ dimenzija:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \tfrac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - V(\phi)\,, \quad V(\phi) = (\lambda/4)(\phi^2 - v^2)^2\,.$$

   a) Dokazati da ekscitacije oko pravog vakuuma, $\eta(t,x) = \phi(t,x) - v$, predstavljaju fizička polja mase $m^2 = 2\lambda v^2$.
   b) Dokazati da su $\phi_K(z) = \pm v\,\mathrm{th}(z)$, $z = m(x-a)/2$, , statička rešenja jednačina kretanja koja predstavljaju kink i antikink, redom.
   c) Pokazati da oba rešenja imaju istu statičku energiju (masu): $M_K = \frac{m^3}{3\lambda}$.

d) Pokazati da je $\eta_0(z) = v/\mathrm{ch}^2(z)$ nulti mod perturbacija oko ϕ_K.

5. a) Izračunati Kristofelov simbol koji odgovara metrici (10.10a) prostora V_5.
b) Izračunati odgovarajuću skalarnu krivinu $\widehat{R}$ u slučaju kad je četvorodimenzioni prostor V_4 ravan, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Zatim izvesti opšti oblik od $\widehat{R}$.
6. Pokazati da se pri lokalnom Vajlovom reskaliranju metrike, $g_{\mu\nu} = \rho\bar{g}_{\mu\nu}$, Kristofelova koneksija d–dimenzionog Rimanovog prostora transformiše po pravilu

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \bar{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} + \tfrac{1}{2}(\delta^\mu_\nu \rho_\lambda + \delta^\mu_\lambda \rho_\nu - \bar{g}_{\nu\lambda}\rho^\mu)\,,$$

gde je $\rho_\mu = \partial_\mu \ln\rho$, $\rho^\mu = \bar{g}^{\mu\nu}\rho_\nu$. Odavde izvesti pravilo transformacije skalarne krivine:

$$R(g) = \rho^{-1}\left[R(\bar{g}) + (1-d)\rho^{-1}\bar{\Box}\rho + \tfrac{1}{4}(7d - 6 - d^2)\rho^{-2}\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\rho\partial_\nu\rho\right]\,.$$

7. a) Na osnovu rezultata dobijenog u zadatku 6 dokazati da su pri redefiniciji varijabli (10.16a) ispunjene sledeće relacije:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-g}\sqrt{-\phi}R = \sqrt{-\bar{g}}\left[\bar{R} + \bar{\Box}\,\ln(-\bar{\phi}) - \tfrac{1}{6}\bar{\phi}^{-2}\bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\bar{\phi}\right]\,,\\
&\sqrt{-g}\sqrt{-\phi}(-\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \sqrt{-\bar{g}}(-\bar{\phi})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,.
\end{aligned}$$

Koristeći ove relacije izvesti izraz (10.16b) za efektivno dejstvo.
b) Izraziti Kristofelove simbole (10.14a) preko novih varijabli.
8. Metrika prostora V_5 ima oblik (10.18).
a) Pokazati da je veličina $(B_\mu u^\mu + u^5) \equiv \hat{q}/m$ konstanta pri kretanju čestice po geodeziku.
b) Dovesti geodezijske jednačine na oblik koji odgovara kretanju naelektrisane čestice u elektromagnetnom polju.
9. a) Pokazati da je $\xi_M = \hat{g}_{M5} \equiv (\phi B_\mu, \phi)$ Kilingov vektor Rimanovog prostora sa metrikom (10.10a).
b) Dokazati da je veličina $\xi_M u^M = \phi(B_\mu u^\mu + u^5) \equiv -\hat{q}/m$, gde je $u^M = dz^M/d\tau$, konstanta pri kretanju čestice duž geodezijske linije.
b) Dovesti geodezijske jednačine na oblik koji odgovara kretanju naelektrisane čestice u elektromagnetnom polju.
10. a) Naći efektivnu četvorodimenzionu teoriju realnog skalarnog polja (10.20a) u prostoru metrike (10.10a) koja ne zavisi od y.
b) Kako izgleda dobijena teorija posle promene varijabli (10.16a)?
11. a) Naći efektivnu četvorodimenzionu teoriju Dirakovog polja (10.21a) u slučaju kad je pentada oblika (10.22). Kako izgleda deo dejstva koji sadrži modove $n = 0, \pm 1$?
b) Izračunati odgovarajuće Ričijeve koeficijente $\Delta^{IJ}{}_M$, i naći aproksimativnu teoriju koja se dobija zamenom $A = \Delta$ u efektivno dejstvo.
12. a) Izvesti Kac–Mudijevu algebru (10.29).
b) Dokazati da generatori P^0_μ, $M^0_{\mu\nu}$, L_1, L_0, i L_{-1} definišu $P_4 \times SO(1,2)$ podalgebru Kac–Mudijeve algebre.
14. Pokazati da za metriku osnovnog stanja (10.31) važi $\widehat{R} = R_4 + R_D$.
15. a) Naći vektor pomeranja $(dx, \Delta y)$ u prostoru U_4 koji je ortogonalan na sloj V_D. Zatim odrediti metriku $g_{\mu\nu}$ prostor–vremena U_4.
b) Polazeći od baze tangentnih vektora (10.32), izvesti oblik metrike (10.33).

c) Pokazati da u lokalno ortogonalnoj bazi $(\boldsymbol{E}_\mu, \boldsymbol{E}_\alpha) = (b^i{}_\mu \hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha)$ kvadrat intervala ima blok–dijagonalan oblik: $ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu + \phi_{\alpha\beta} dY^\alpha dY^\beta$. Naći vezu (X, Y) sa originalnim koordinatama (x, y).

16. *a*) Naći zakon transformacije polja B^α_μ u odnosu na koordinatne transformacije $x' = x'(x), y' = y'(x, y)$.
    b) Kako se polje B^α_μ transformiše u odnosu na beskonačno male transformacije $\delta x = 0, \delta y = \varepsilon^a(x, y) E^\alpha_a(y)$? Šta se dogadja u slučaju $\varepsilon^a = \varepsilon^a(x)$?
17. *a*) Naći Kilingove vektore dvodimenzione sfere S_2.
    b) Zatim pokazati da odgovarajući generatori zadovoljavaju algebru rotacione grupe $SO(3)$.
18. *a*) Dokazati da determinanta metrike $\hat{g}_{MN}$ ne zavisi od B^a_μ. Zatim izvesti osobinu faktorizacije determinante: $\hat{g} = g\phi$, gde je $\hat{g} = \det(\hat{g}_{MN})$, $g = \det(g_{\mu\nu})$, $\phi = \det(\phi_{\alpha\beta})$.
    b) Polazeći od metrike (10.38) u slučaju $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, naći izraz za krivinu $\widehat{R}$.
    c) Koristeći rezultat (10.41) dokazati da efektivno dejstvo bezmasenog sektora ima oblik (10.42*b*).
19. Polazeći od metrike (10.44*a*), uz uslov $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, naći dejstvo koje opisuje dinamiku skalarnog polja $\phi_{\alpha\beta}(x, y)$.
20. Dokazati da u slučaju Frojnd–Rubinove kompaktifikacije jednačine kretanja imaju rešenje oblika (10.50). Zatim proveriti uslov kompaktifikacije i naći vrednost kosmološke konstante.
21. Dokazati da u slučaju kompaktifikacije uz pomoć eksplicitno uvedenih gradijentnih polja jednačine kretanja imaju rešenje oblika (10.52). Zatim proveriti uslov kompaktifikacije i naći vrednost kosmološke konstante (Luciani, 1978).

GLAVA XI

TEORIJA STRUNA

U fizici čestica 60–tih godina otkriveno je postojanje hadronskih rezonanci koje leže na približno linearnim Redjeovim trajektorijama ($J \sim m^2$). Za opis ovih objekata i njihovih interakcija razmatrani su modeli sa beskonačno mnogo stanja. Značajnu teorijsku realizaciju ovih ideja predstavljao je Venecijanov model (Veneziano, 1968), koji opisuje rasejanje jednodimenzionih objekata — hadronskih struna. Uključivanje fermiona u teoriju stvorilo je osnove za supersimetriju (Neveu i Schwarz, 1971; Ramon, 1971).

Važan momenat u razvoju teorije struna predstavlja pokušaj da se one posmatraju ne kao model za hadrone već kao model ujedninjenja svih interakcija, uključujući i gravitaciju (Neveu i Scherk, 1972; Scherk i Schwarz, 1974). Značaj ovih ideja postao je potpuno jasan tek sredinom osamdesetih godina, kada je pokazano da neki modeli struna imaju jako dobre kvantne osobine (Green i Schwarz, 1984; 1985). U toku 1985. godine održane su tri velike medjunarodne konferencije posvećene teoriji struna (Čikago, Trst, Santa Barbara), što samo po sebi dovoljno svedoči o interesu koji su ova istraživanja pobudila.

Slučajno otkriće Venecijanovog modela uslovilo je obrnuti istorijski razvoj teorije struna u odnosu na većinu drugih teorija. Obično se, polazeći od odredjenih zahteva simetrije, konstruiše invarijantno *dejstvo* teorije, posle čega se, koristeći standardne tehnike računanja, može dati kvantitativan odgovor o prirodi fizičkih procesa. Nasuprot tome, prvi korak u teoriji struna načinjen je kada je Venecijano “pogodio” formu amplitude odredjenih fizičkih procesa. To je, u izvesnom smislu, bio odgovor za koji je tek trebalo pronaći pravo pitanje.

Posle značajnog uspeha teorije struna u konzistentnom tretiranju gravitacije, porastao je interes za dublje razumevanje principa simetrije koji se nalaze u njenoj osnovi, pa je došlo do mnogih pokušaja izgradnje *kovarijantne* formulacije teorije. Do tada su značajne fizičke teorije bile dobrim delom odredjene pomoću zahteva simetrije; takav je slučaj sa Jang–Milsovom teorijom, gravitacijom ili supergravitacijom. Prirodno je očekivati da se i u teoriji struna može postupiti na isti način, jer ona, pored ostalog, i sadrži prethodne teorije u izvesnom obliku. Polazeći od simetrije, teorija struna se lakše može shvatiti kao prirodno uopštenje teorija zasnovanih na pojmu tačkaste čestice.

Ovi pokušaji su veoma važni za dalji razvoj teorije, i to iz dva razloga. Pomenimo, najpre, da je konzistentna kvantna teorija struna definisana samo u prostoru kritične dimenzije, $D = 26$ ili 10. U procesu izgradnje efektivne četvorodimenzione teorije važnu ulogu imaju neperturbativne osobine teorije. Naše poznavanje neperturbativnih metoda bitno se oslanja na poznavanje geometrijskih i topoloških karakteristika lokalno invarijantnih teorija (solitoni, instantoni i sl.). Zato je identifikacija lokalne simetrije, koja se nalazi u osnovi teorije struna, veoma značajna za izgradnju realistične teorije. Pored toga, poznavanje simetrije će znatno olakšati razumevanje kvantnih osobina teorije.

Treba istaći da je konstrukcija kovarijantne teorije samo prvi korak u razumevanju odgovarajuće *geometrije*. Situacija je slična onoj u kojoj bi se našao fizičar koji pred sobom ima Ajnštajnovo dejstvo u kovarijantnom obliku na osnovu koga zna da napravi perturbacione račune, dok o geometriji Rimanovog prostora ne zna ništa.

U ovoj glavi biće izložen uvod u kovarijantnu teoriju polja *slobodnih bozonskih struna*, koji će pokriti osnovne aspekte klasične teorije i omogućiti shvatanje nekih otvorenih problema. Razumevanje ove strukture posebno je značajno za jasno sagledavanje kako gradijentna polja, posebno gravitaciono, nastaju iz struna. Uključivanje interakcije i supersimetrije može se ostvariti sličnim metodama, ali je tehnički dosta složenije.

1. KLASIČNA BOZONSKA STRUNA

U osnovi standardne teorije polja nalazi se pojam tačkaste čestice. Zamena tačkaste čestice jednodimenzionim objektom — strunom, dovodi do značajnih promena u našem shvatanju prirode osnovnih interakcija. Koren ovih promena naći ćemo ispitivanjem klasične dinamike struna (Scherk, 1975; Sundermeyer, 1982; West, 1986; Brink i Henneaux, 1988).

1.1 Relativistička tačkasta čestica

Da bismo upoznali metode koji se koriste pri analizi klasične teorije strune i formulaciji odgovarajuće teorije polja, razmotrićemo, najpre, jednostavniji slučaj relativističke tačkaste čestice.

Klasična mehanika. Klasična čestica u četvorodimenzionom prostoru M_4 je tačka koja opisuje trajektoriju $x^\mu = x^\mu(\tau)$, gde je τ "vreme" (parametar koji monotono raste duž trajektorije). Jednačine kretanja se dobijaju iz dejstva

$$I = -m \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \equiv \int d\tau L \,, \tag{11.1}$$

gde je $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$. Izbor vremenskog parametra τ nije jednoznačan. Zaista, reparametrizacija $\tau \to \tau' = \tau + \varepsilon(\tau)$, $\delta x^\mu = x^\mu(\tau') - x^\mu(\tau) = \varepsilon(\tau)\dot{x}^\mu$, ostavlja dejstvo invarijantnim.

Da bismo prešli na Hamiltonov formalizam, što je prvi korak u izgradnji kvantne teorije, definisaćemo, najpre, kanonski impuls:[†]

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \,, \qquad \dot{x}^2 \equiv \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \,.$$

Pošto su impulsi homogene funkcije brzina, oni zadovoljavaju vezu

$$\phi \equiv p^2 - m^2 \approx 0 \,.$$

Dalje, iz definicije kanonskog hamiltonijana sledi $H_c \equiv p_\mu \dot{x}^\mu - L \approx 0$.

Koristeći postojanje veze ϕ možemo definisati totalni hamiltonijan,

$$H_T \equiv H_c + v(\tau)\phi \approx v(\tau)\phi \,,$$

gde je $v(\tau)$ proizvoljni množitelj. Ovaj hamiltonijan, za razliku od H_c, definiše netrivijalnu dinamiku sistema pomoću osnovnih Puasonovih zagrada: $\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu$. U konzistentnoj teoriji veze moraju biti održane u toku vremena. Lako se vidi da je uslov $\dot{\phi} \equiv \{\phi, H_T\} \approx 0$ automatski zadovoljen za svako $v(\tau)$, i da u teoriji nema drugih veza.

Relacija $H_c = 0$ i pojava proizvoljnog množitelja u H_T direktno su povezani sa *reparametrizacionom simetrijom* teorije, što se jasno vidi iz oblika Hamiltonovih jednačina:

$$\begin{aligned} &\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H_T\} = 2v(\tau)p^\mu, \\ &\dot{p} = \{p^\mu, H_T\} = 0 \,. \end{aligned}$$

Prisustvo neodredjenog množitelja $v(\tau)$ uslovljava proizvoljnost u izboru vremenskog parametra [$v(\tau)$ mora biti različit od nule da bi uopšte postojalo kretanje].

Reparametrizaciona invarijantnost se može lako narušiti ako nametnemo neki uslov na izbor τ. Takav je, na primer, uslov $\Omega \equiv x^0(\tau) - \tau \approx 0$. Iz konzistentnosti ovog uslova odredjuje se množitelj $v(\tau)$,

$$\dot{\Omega} \equiv \{\Omega, H_T\} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = 2v(\tau)p^0 - 1 = 0 \,,$$

[†] Treba zapaziti da se ovako definisan kanonski impuls razlikuje po znaku od fizičkog impulsa.

posle čega Hamiltonove jednačine više nemaju reparametrizacionu invarijantnost.

Prva kvantizacija. Prelaz sa klasične na *kvantnu* mehaniku ostvaruje se na sledeći način (Dirac, 1964):

a) osnovne dinamičke varijable postaju operatori:
$$x(\tau) \to \hat{x}(\tau), \quad p(\tau) \to \hat{p}(\tau);$$

b) PZ prelaze u komutatore sa dodatnim faktorom $-i$:
$$\{A, B\} \to -i[\hat{A}, \hat{B}];$$

c) veze prve klase prelaze u uslove na vektor stanja:
$$\hat{\phi} \mid \psi\rangle = 0;$$

d) vektor stanja zadovoljava "Šredingerovu jednačinu":
$$i\frac{\partial}{\partial\tau} \mid \psi\rangle = \hat{H}_T \mid \psi\rangle.$$

Veza ϕ je jedina veza u teoriji i, pošto komutira sa samom sobom, ona je prve klase. Odgovarajući kvantni uslov na vektor stanja ima oblik

$$\hat{\phi} \mid \psi\rangle \equiv (\hat{p}^2 - m^2) \mid \psi\rangle = 0\,. \tag{11.2}$$

Pošto je H_T proporcionalan sa $\hat{\phi}$, desna strana "Šredingerove jednačine" daje nulu, iz čega sledi da stanje $\mid \psi\rangle$ ne zavisi eksplicitno od vremena τ. Treba napomenuti da nezavisnost stanja od vremena ne znači da dinamike nema, da je "zamrznuta". Dinamički sadržaj nose osnovne varijable $\hat{x}(\tau)$ i $\hat{p}(\tau)$ koje zadovoljavaju Hajzenbergove jednačine kretanja.

Klasična teorija polja. Prelaz od kvantne mehanike na klasičnu teoriju polja (TP) realizuje se tako što se talasna funkcija $\langle x \mid \psi\rangle$ proglašava za klasično polje $\psi(x)$, koje ne zavisi eksplicitno od vremena τ i zadovoljava Klajn–Gordonovu jednačinu (11.2). Odgovarajuće dejstvo slobodne TP ima oblik

$$I = \int d^4x \psi^+(x)(-\Box - m^2)\psi(x)\,. \tag{11.3}$$

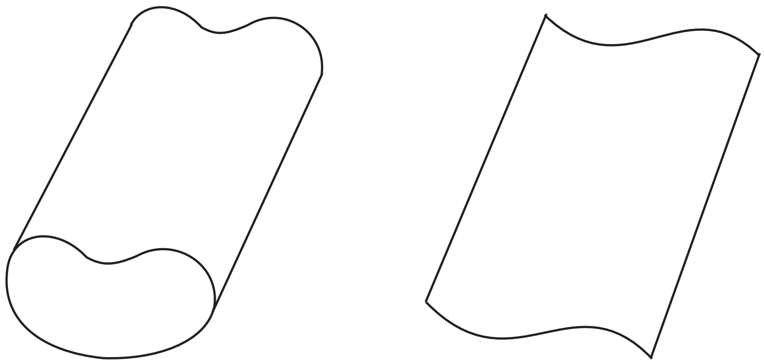
Klasična TP predstavlja beskonačan sistem klasičnih čestica, koje se nalaze u svakoj tački $\boldsymbol{x}$ trodimenzionog prostora. Interesantno je uočiti da je reparametrizaciona invarijantnost klasične mehanike prisutna u TP samo preko uslova (11.2), koji, ustvari, predstavlja jednačinu kretanja polja.

Druga kvantizacija. Kanonska dinamika klasične TP (11.3), ili nekog njenog uopštenja koje uključuje i interakciju polja, ostvaruje se u faznom prostoru $(\,\psi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x})\,)$. Kao i svaka klasična teorija, i ova se može kvantizirati na prethodno opisani način. Ovaj postupak se iz očiglednih razloga naziva druga kvantizacija, a odgovarajuća *kvantna* TP opisuje beskonačan sistem kvantnih čestica.

U narednom izlaganju ćemo videti kako se prethodni postupak prve i druge kvantizacije može ostvariti u teoriji strune.

1.2 Dejstvo bozonske strune

Bozonska struna u D–dimenzionom Minkovskijevom prostoru M_D je jednodimenzioni objekat (linija) koji u toku vremena opisuje dvodimenzionu površ Σ (svetska površ): $x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma)$, gde su $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$ koordinate na Σ. Linija $x^\mu(\sigma)$ može biti otvorena ili zatvorena (otvorena ili zatvorena struna, slika 11.1), a prostorna koordinata σ u oba slučaja, po konvenciji, uzima vrednosti iz intervala $[0, \pi]$.



Slika 11.1 Svetske površi zatvorene i otvorene strune

Nambu je predložio dejstvo koje je proporcionalno veličini površi Σ (Nambu, 1970),

$$I = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-\gamma} \equiv \int d^2\xi \mathcal{L}\big(x(\xi), \dot{x}(\xi)\big)\,, \qquad (11.4a)$$

gde je α' konstanta dimenzije $[m^{-2}]$, a γ je determinanta metrike $\gamma_{\alpha\beta}$ indukovane na Σ, $\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \equiv \partial_\alpha x \cdot \partial_\beta x$.

Često se koristi drugi oblik dejstva,

$$I' = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x \cdot \partial_\beta x\,, \qquad (11.4b)$$

gde je metrika $g_{\alpha\beta}$ nezavisna dinamička varijabla (Polyakov, 1981). Ovaj izraz je, za razliku od I, kvadratičan po varijablama x^μ, što olakšava kvantizaciju teorije u funkcionalnom formalizmu. On se može interpretirati kao dejstvo koje opisuje D bezmasenih, skalarnih polja $x^\mu(\xi)$ u dve dimenzije, u gravitacionom polju metrike $\gamma_{\mu\nu}$. Dejstvo I' je klasično ekvivalentno sa I. Zaista, jednačina koja se iz I' dobija variranjem po $g_{\alpha\beta}$ ima oblik

$$\gamma_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, g^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta} = 0\,.$$

Iz ove jednačine se dobija relacija za determinante, $\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta}$, koja, kad se vrati u I', daje tačno I.

Dejstvo I' poseduje sledeće *simetrije*:

a) globalnu Poenkareovu simetriju u M_D:

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \\ &\delta\xi^\alpha = 0, \qquad \delta g_{\alpha\beta} = 0\,; \end{aligned} \tag{11.5a}$$

b) lokalnu reparametrizacionu simetriju u Σ:

$$\begin{aligned} &\delta\xi^\alpha \equiv \xi'^\alpha - \xi^\alpha = -\varepsilon^\alpha(\xi)\,, \\ &\delta x^\mu = 0 \qquad (\delta_0 x^\mu = \varepsilon^\alpha\partial_\alpha x^\mu)\,, \\ &\delta_0 g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varepsilon^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta\varepsilon^\gamma g_{\alpha\gamma} + \varepsilon^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\,; \end{aligned} \tag{11.5b}$$

c) simetriju Vajlovog reskaliranja metrike:

$$\begin{aligned} &\delta g_{\alpha\beta} = \Lambda(\xi) g_{\alpha\beta}\,, \\ &\delta x^\mu = 0, \qquad \delta\xi^\alpha = 0\,. \end{aligned} \tag{11.5c}$$

Simetrija Vajlovog reskaliranja je specifična karakteristika dvodimenzione teorije struna, i gubi se pri razmatranju višedimenzionih objekata, kao što su membrane. Videćemo da njeno postojanje ima važne posledice, koje bitno utiču na strukturu teorije.

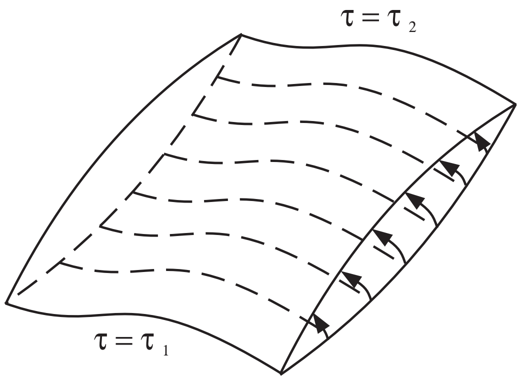
U daljem izlaganju koristićemo dejstvo (11.4*a*), mada se svi standardni rezultati mogu dobiti i iz (11.4*b*).

Posmatrajmo dejstvo I u kome je početni i krajnji položaj strune (u $\tau = \tau_1$ i $\tau = \tau_2$) fiksiran, i neka je $0 \le \sigma \le \pi$ (slika 11.2). Ako uvedemo oznake

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\,, \qquad \pi_\mu^{(\sigma)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'^\mu}\,,$$

gde je $\dot{x} = dx/d\tau, x' = dx/d\sigma$, onda variranje dejstva po $x^\mu(\tau,\sigma)$ daje rezultat

$$\begin{aligned} \delta I = &\int_0^\pi d\sigma \pi_\mu \delta x^\mu \big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \pi_\mu^{(\sigma)} \delta x^\mu \big|_0^\pi \\ &- \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \big(\partial_\tau \pi_\mu + \partial_\sigma \pi_\mu^{(\sigma)}\big)\delta x^\mu = 0\,. \end{aligned}$$



Slika 11.2 Variranje svetske površi Σ otvorene strune

U tačkama koje ne leže na granici površi strune δx^μ je proizvoljno, pa se iz zadnjeg člana dobijaju *jednačine kretanja*:

$$\partial_\tau \pi_\mu + \partial_\sigma \pi_\mu^{(\sigma)} = 0\,. \tag{11.6}$$

Konzistentnost varijacionog principa zahteva iščezavanje "površinskih" članova, i postiže se nametanjem odredjenih graničnih uslova. Pošto je struna fiksirana u $\tau = \tau_1, \tau_2$, tj. $\delta x^\mu(\tau_1, \sigma) = 0 = \delta x^\mu(\tau_2, \sigma)$, prvi član u δI je jednak nuli. Pri posmatranju drugog graničnog člana treba razlikovati slučaj zatvorene i otvorene strune.

i) Ako je struna *zatvorena*, tj.

$$x^\mu(\tau, 0) = x^\mu(\tau, \pi)\,, \tag{11.7a}$$

onda je $\delta x^\mu(\tau, 0) = \delta x^\mu(\tau, \pi)$, $\pi_\mu^{(\sigma)}(\tau, 0) = \pi_\mu^{(\sigma)}(\tau, \pi)$, pa drugi član u δI daje nulu.

ii) Za *otvorenu* strunu situacija je nešto složenija. Ako su $\delta x^\mu(\tau, 0)$ i $\delta x^\mu(\tau, \pi)$ nezavisne varijacije, prirodno je nametniti *granični uslov*

$$\pi_\mu^{(\sigma)} = 0 \qquad \text{u} \quad \sigma = 0, \pi\,. \tag{11.7b}$$

Ovaj uslovi fizički znači da je fluks impulsa kroz krajeve strune jednak nuli.

I tako, Lagranžove jednačine kretanja važe i za zatvorenu i za otvorenu strunu uz pogodan izbor graničnih uslova.

1.3 Hamiltonov formalizam i simetrije

Klasična teorija strune poseduje simetriju u odnosu na reparametrizaciju koordinata $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$ na dvodimenzionoj površi Σ, pa se može očekivati da će broj neodredjenih množitelja u totalnom hamiltonijanu biti dva.

Hamiltonijan i veze . Zapazićemo, najpre, da su kanonski impulsi

$$\pi_\mu(\sigma) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu(\sigma)} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\dot{x}_\mu x'^2 - x'_\mu(\dot{x}\cdot x')}{\sqrt{-\gamma}}\,,$$

homogene funkcije brzina. Oni zadovoljavaju dve primarne veze:

$$\begin{aligned} G_0(\sigma) &\equiv \pi^2 + x'^2/(2\pi\alpha')^2 \approx 0\,, \\ G_1(\sigma) &\equiv \pi\cdot x' \approx 0\,. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Kanonski hamiltonijan iščezava, $H_c = \int d\sigma[\pi_\mu(\sigma)\dot{x}^\mu(\sigma) - \mathcal{L}] \approx 0$, a totalni sadrži dva neodredjena množitelja,

$$H_T = \int d\sigma\big[v^0(\sigma)G_0(\sigma) + v^1(\sigma)G_1(\sigma)\big]\,, \tag{11.9}$$

kao što smo i očekivali.

Koristeći osnovne PZ, $\{x^\mu(\sigma), \pi_\nu(\sigma')\} = \delta^\mu_\nu\delta$, gde je $\delta \equiv \delta(\sigma,\sigma')$, može se utvrditi da su veze G_0 i G_1 prve klase, jer zadovoljavaju algebru

$$\begin{aligned} \{G_0(\sigma), G_0(\sigma')\} &= \frac{1}{(\pi\alpha')^2}[G_1(\sigma) + G_1(\sigma')]\partial_\sigma\delta\,, \\ \{G_1(\sigma), G_0(\sigma')\} &= [G_0(\sigma) + G_0(\sigma')]\partial_\sigma\delta\,, \\ \{G_1(\sigma), G_1(\sigma')\} &= [G_1(\sigma) + G_1(\sigma')]\partial_\sigma\delta\,. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Uslovi konzistentnosti ovih veza su automatski zadovoljeni, pa se u teoriji ne pojavljuju nove veze.

Prisustvo neodredjenih množitelja $v^0(\sigma)$ i $v^1(\sigma)$ u H_T je povezano sa proizvoljnošću u izboru koordinata $\xi = (\tau,\sigma)$ na Σ.

Konformni gradijentni uslov . Reparametrizaciona invarijantnost se može narušiti nametanjem nekog uslova na koordinate ξ. U slučaju strune postoji kovarijantan način da se to uradi, što je posebno interesantno za izgradnju kovarijantne teorije polja.

Hamiltonove jednačine kretanja imaju oblik

$$\dot{x}^\mu \equiv \{x^\mu, H_T\} = 2v^0\pi^\mu + v^1 x'^\mu\,, \tag{11.11a}$$

$$\dot{\pi}^\mu \equiv \{\pi^\mu, H_T\} = \frac{2}{(2\pi\alpha')^2}\partial_\sigma(v^0 x'^\mu) + \partial_\sigma(v^1\pi^\mu)\,. \tag{11.11b}$$

Odavde se dobija relacija

$$\ddot{x}^\mu = 2\dot{v}^0\pi^\mu + 2v^0\dot{\pi}^\mu + \dot{v}^1 x'^\mu + v^1\dot{x}'^\mu\,,$$

koja, izborom množitelja

$$v^0 = -\pi\alpha' , \qquad v^1 = 0 , \tag{11.12}$$

prelazi u dobro poznatu kovarijantnu talasnu jednačinu:

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0 . \tag{11.13}$$

Sa gledišta simetrije jasno je da zadavanje oblika neodredjenih množitelja u H_T predstavlja ograničenje na reparametrizacionu invarijantnost. Posle izbora uslova (11.12), skup transformacija koordinata ξ koji predstavlja simetriju jednačina kretanja znatno je ograničen. Da bismo videli šta je od simetrije ostalo, napisaćemo, najpre, prvu jednačinu kretanja u obliku

$$\pi^\mu = -\dot{x}^\mu / 2\pi\alpha' . \tag{11.14}$$

Kombinujući ovu jednačinu sa vezama G_0 i G_1 dobijaju se relacije

$$\begin{aligned} \gamma_{00} + \gamma_{11} &\equiv \dot{x}^2 + x'^2 \approx 0 , \\ \gamma_{01} &\equiv \dot{x}\cdot x' \approx 0 , \end{aligned}$$

koje daju sledeći izraz za interval na dvodimenzionoj površi:

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \gamma_{00}(d\tau^2 - d\sigma^2) . \tag{11.15}$$

Posle nametanja uslova (11.12) moguće je vršiti samo one transformacije koordinata koje ostavljaju formu intervala (11.15) invarijantnom, a to su *konformne transformacije* na Σ. Tako vidimo da fiksiranje parametara u H_T ne odredjuje potpuno koordinate na Σ. Usvajanjem uslova (11.12) totalni hamiltonijan dobija prostiji oblik:

$$H_T = -\pi\alpha' \int d\sigma G_0(\sigma) . \tag{11.16}$$

Izbor koordinata koje dovodi do intervala (11.15) naziva se konformna ili ortonormalna parametrizacija, i on je po obliku kovarijantan. Napomenimo da su uslovi (11.12) u skladu sa $x'^2 < 0$, $\dot{x}^2 > 0$, što se vidi poredjenjem jednačine (11.14) sa definicijom impulsa.

Poenkareova simetrija . Teorija strune poseduje ne samo reparametrizacionu već i globalnu Poenkareovu simetriju (11.5a). U odnosu na transformacije koordinata ξ u Σ veličine $x^\mu(\xi)$ ($\mu = 0, 1, ..., D-1$) predstavljaju D skalarnih polja. Globalne Poenkareove transformacije deluju na indeks μ, i sličnije su, u ovom kontekstu, transformacijama neke unutrašnje simetrije, nego transformacijama prostorno–vremenske simetrije u standardnoj teoriji polja.

Na osnovu poznatog oblika Poenkareove simetrije mogu se naći održane struje, kao i odgovarajući naboji P^μ i $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$. Oni imaju oblik

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int d\sigma \pi^\mu(\sigma)\,, \\ M^{\mu\nu} &= \int d\sigma [x^\mu(\sigma)\pi^\nu(\sigma) - x^\nu(\sigma)\pi^\mu(\sigma)]\,, \end{aligned} \tag{11.17}$$

i zadovoljavaju algebru Poenkareove grupe, što se lako proverava pomoću osnovnih PZ.

Dimenzija. U prethodnim razmatranjima dimenzija D prostora M_D, u kome se struna kreće, bila je proizvoljna. Interesantno je da zahtevi konzistentnosti kvantne teorije dovode do uslova $D = 26$. Prelaz na efektivnu teoriju u $D = 4$ ostvaruje se spontanom kompaktifikacijom, i predstavlja jedan od težih problema u izgradnji realistične teorije struna.

2. OSCILATORNI FORMALIZAM

Pogodan način razmatranja dinamičkog sadržaja strune je razvoj u Furijeov red (Scherk, 1975; Schwarz, 1982). Ovaj razvoj će kasnije, u teoriji polja, poslužiti da se nadje direktna veza sa uobičajenim poljima tačkastih čestica.

2.1 Otvorena struna

Pri razmatranju otvorene strune moramo voditi računa o graničnim uslovima (11.7*b*). U slučaju konformne parametrizacije ovaj uslov, uz pomoć jednačina kretanja, prelazi u

$$x'_\mu = 0 \quad \text{u} \quad \sigma = 0, \pi\,. \tag{11.18}$$

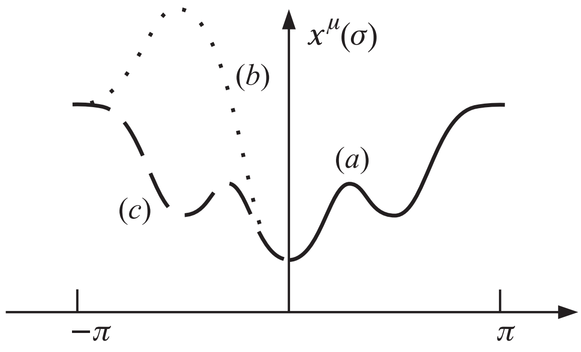
Zadatak koji imamo pred sobom je nalaženje Furijeovog razvoja funkcije $x^\mu(\tau, \sigma)$, zadane u intervalu $0 \leq \sigma \leq \pi$ za fiksno τ, koja zadovoljava granične uslove (11.18). Ovaj zadatak je moguće rešiti na više ekvivalentnih načina (slika 11.3):

a) razviti $x^\mu(\tau, \sigma)$ u Furijeov red u intervalu $0 \leq \sigma \leq \pi$, po $\cos 2n\sigma$ i $\sin 2n\sigma$;

b) najpre proširiti definiciju strune na interval $-\pi \leq \sigma \leq \pi$, vodeći računa o graničnim uslovima, a zatim izvršiti razvoj po $\cos n\sigma$ i $\sin n\sigma$;

c) u prethodnom slučaju proširenje izvršiti na *simetričan* način, a zatim razviti samo po $\cos n\sigma$;

d) antisimetrično proširenje definicje strune ne može se izvršiti ako je $x(\tau, 0) \neq 0$.



Slika 11.3 Različiti načini zadavanja otvorene strune

Jasno je da je tehnički najjednostavniji način c). Furijeov red funkcije strune $x(\tau,\sigma)$ simetrične u intervalu $[-\pi,\pi]$ ima oblik (L.3),

$$x^\mu(\tau,\sigma) = \sum_n x_n^\mu e^{in\sigma} = x_0^\mu + 2\sum_{n\geq 1} x_n^\mu \cos n\sigma\,, \tag{11.19a}$$

gde je, zbog simetričnosti, $x_n^\mu = x_{-n}^\mu \quad (x_{-n}^\mu = x_n^{\mu *})$. Simetričnoj struni $x(\tau,\sigma)$ odgovara simetričan impuls $\pi(\tau,\sigma)$:

$$\pi^\mu(\tau,\sigma) = \sum_n \pi_n^\mu e^{in\sigma} = \pi_0^\mu + 2\sum_{n\geq 1} \pi_n^\mu \cos n\sigma\,, \tag{11.19b}$$

gde je $\pi_n^\mu = \pi_{-n}^\mu \quad (\pi_{-n}^\mu = \pi_n^{\mu *})$. Vremenska zavisnost koeficijenta x_n^μ i π_n^μ biće odredjena kasnije.

Puasonove zagrade osnovnih dinamičkih varijabli $x(\sigma)$ i $\pi(\sigma)$ (eksplicitno pisanje vremenskog parametra τ je izostavljeno) imaju oblik

$$\{x^\mu(\sigma), \pi_\nu(\sigma')\} = \delta_\nu^\mu \delta(\sigma,\sigma')\,. \tag{11.20a}$$

Pošto su $x(\sigma)$ i $\pi(\sigma)$ periodične funkcije, izraz $\delta(\sigma,\sigma')$ je definisan kao periodična δ–funkcija (dodatak L). Ako je osnovni interval $[-\pi,\pi]$, onda je $\delta(\sigma,\sigma') = \delta_S(\sigma,\sigma')$, jednačina ($L$.7). Mi ćemo radije posmatrati izraze (11.19a,b) na intervalu $[0,\pi]$; u tom slučaju mora se promeniti normalizacija δ–funkcije, pa imamo

$$\delta(\sigma,\sigma') = 2\delta_S(\sigma,\sigma')\,.$$

Odavde sledi

$$\{x_n^\mu, \pi_m^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\frac{1}{2\pi}(\delta_{n,m} + \delta_{n,-m})\,. \tag{11.20b}$$

Definišimo sada veličinu

$$\Pi^\mu(\sigma) \equiv \pi^\mu + \frac{x'^\mu}{2\pi\alpha'}\,, \qquad -\pi \leq \sigma \leq \pi\,. \tag{11.21a}$$

Interesantno je uočiti da dve veze, $G_0(\sigma)$ i $G_1(\sigma)$, na intervalu $[0,\pi]$, mogu biti ujedinjene u jednu vezu na intervalu $[-\pi,\pi]$:

$$\Pi^2(\sigma) = G_0(\sigma) + G_1(\sigma)/\pi\alpha' ,$$

gde je $G_0(-\sigma) = G_0(\sigma)$, $G_1(-\sigma) = -G_1(\sigma)$. Furijeov razvoj veličine Π^μ ima oblik

$$\Pi^\mu(\sigma) = \frac{-1}{\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_n a_n^\mu e^{in\sigma} , \tag{11.21b}$$

gde je

$$-a_n^\mu = \Big(\pi_n^\mu + \frac{in}{2\pi\alpha'} x_n^\mu\Big)\pi\sqrt{2\alpha'} ,$$

ili, ekvivalentno,

$$\begin{aligned} -\pi_n^\mu &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{2}(a_n^\mu + a_{-n}^\mu) , \\ x_n^\mu &= \frac{i\sqrt{2\alpha'}}{n} \frac{1}{2}(a_n^\mu - a_{-n}^\mu) . \end{aligned}$$

Osnovna PZ izražena preko veličina a_n postaje

$$\{a_n^\mu, a_{-m}^\nu\} = in\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu} \qquad (n,m>0) , \tag{11.22}$$

iz čega je jasno da će u kvantnoj teoriji a_n i $a_m^* = a_{-m}$ $(n,m \ge 0)$ imati uloge *operatora anihilacije i kreacije* modōvā strune (do na faktore $\sqrt{n}$, $\sqrt{m}$, redom).

Vremensku zavisnost rešenja odredjuje jednačina kretanja (11.13):

$$\ddot{x}_n^\mu + n^2 x_n^\mu = 0 .$$

Iz relacije $\pi_n = -\dot{x}_n/2\pi\alpha'$ i definicije a_n sledi

$$a_n(\tau) = a_n(0)e^{-in\tau} \qquad (n \ne 0) ,$$

dok je vremenska zavisnost nultog moda linearna:

$$x_0^\mu = x^\mu + p^\mu\tau , \qquad \pi_0^\mu = -p^\mu/2\pi\alpha' ,$$

gde varijable (x^μ, p^μ) opisuju kretanje centra masa, i zadovoljavaju uslov $\{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu}(2\alpha')$. Posle toga rešenje za otvorenu strunu dobija oblik

$$\begin{aligned} x^\mu(\sigma) &= x_0^\mu + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\ge1} \frac{1}{n}\Big[a_n^\mu(0)e^{-in\tau} - a_{-n}^\mu(0)e^{in\tau}\Big]\cos n\sigma , \\ \pi^\mu(\sigma) &= \pi_0^\mu - \frac{\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'} \sum_{n\ge1} \Big[a_n^\mu(0)e^{-in\tau} + a_{-n}^\mu(0)e^{in\tau}\Big]\cos n\sigma . \end{aligned} \tag{11.23}$$

2.2 Zatvorena struna

Furijeov razvoj zatvorene strune na intervalu $[0,\pi]$ dat je izrazima

$$
\begin{aligned}
x^\mu(\sigma) &= x_0^\mu + \sum_{n\geq 1}\Big(x_n^\mu e^{2in\sigma} + x_n^{\mu\star} e^{-2in\sigma}\Big) = \sum_n x_n^\mu e^{2in\sigma}\,,\\
\pi^\mu(\sigma) &= \pi_0^\mu + \sum_{n\geq 1}\Big(\pi_n^\mu e^{2in\sigma} + \pi_n^{\mu\star} e^{-2in\sigma}\Big) = \sum_n \pi_n^\mu e^{2in\sigma}\,.
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

Ovde je $x_n \neq x_{-n}$ i $\pi_n \neq \pi_{-n}$, za razliku od slučaja otvorene strune (ali je, kao i ranije, $x_{-n} \equiv x_n^*, \pi_{-n} \equiv \pi_n^*$).

Osnovne PZ imaju oblik $(11.20a)$, gde je periodična δ–funkcija data izrazom $(L.8)$, iz čega sledi

$$
\{x_n^\mu, \pi_{-m}^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\frac{1}{\pi}\delta_{n,m}\,.
$$

Po analogiji sa izrazima $(11.21a, b)$, definisaćemo na intervalu $[0,\pi]$ veličine

$$
\begin{aligned}
\Pi^\mu &\equiv \pi^\mu + \frac{x'^\mu}{2\pi\alpha'} = \frac{-1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_n 2a_n^\mu e^{2in\sigma}\,,\\
\tilde\Pi^\mu &\equiv \pi^\mu - \frac{x'^\mu}{2\pi\alpha'} = \frac{-1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_n 2b_n^\mu e^{2in\sigma}\,.
\end{aligned}
\tag{11.25}
$$

Ovde je

$$
\begin{aligned}
-\,2a_n^\mu &= \Big(\pi_n^\mu + \frac{in}{\pi\alpha'}x_n^\mu\Big)\pi\sqrt{2\alpha'}\,,\\
-\,2b_{-n}^\mu &= \Big(\pi_n^\mu - \frac{in}{\pi\alpha'}x_n^\mu\Big)\pi\sqrt{2\alpha'}\,,
\end{aligned}
$$

$(a_{-n} = a_n^*,\ b_{-n} = b_n^*)$ odnosno

$$
\begin{aligned}
-\pi_n^\mu &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}(a_n^\mu + b_{-n}^\mu)\,,\\
x_n^\mu &= \frac{i\sqrt{2\alpha'}}{2n}(a_n^\mu - b_{-n}^\mu)\,.
\end{aligned}
$$

U slučaju otvorene strune bilo bi $a_n = b_n$.

Osnovna PZ, izražena preko a_n i b_n, postaje

$$
\begin{aligned}
&\{a_n^\mu, a_{-m}^\nu\} = in\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu} = \{b_n^\mu, b_{-m}^\nu\} \qquad (n,m\geq 0)\,,\\
&\{a_r^\mu, b_s^\nu\} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{11.26}
$$

iz čega se jasno vidi da zatvorena struna ima dve vrste modova.

Vremenska zavisnost rešenja data je izrazima

$$
\begin{aligned}
&a_n(\tau) = a_n(0)e^{-2in\tau}\,, &&b_n(\tau) = b_n(0)e^{-2in\tau} &&(n \neq 0)\,,\\
&x_0^\mu = x^\mu + p^\mu\tau\,, &&\pi_0^\mu = -p^\mu/2\pi\alpha'\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu}(2\alpha')$. Posle toga se u izrazu (11.24) mogu izdvojiti levi i desni talasi:

$$
\begin{aligned}
x^\mu(\sigma) &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\Big[a_n^\mu(0)e^{2in(\sigma-\tau)} - b_n^\mu(0)e^{-2in(\sigma+\tau)}\Big]\,,\\
\pi^\mu(\sigma) &= \pi_0^\mu - \frac{\sqrt{2\alpha'}}{2\pi\alpha'}\sum_{n\neq 0}\Big[a_n^\mu(0)e^{2in(\sigma-\tau)} + b_n^\mu(0)e^{-2in(\sigma+\tau)}\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{11.27}
$$

2.3 Klasična Virazorova algebra

Reparametrizaciona simetrija klasičnog dejstva strune ogleda se u postojanju veza prve klase $G_0(\sigma)$ i $G_1(\sigma)$, koje zadovoljavaju algebru (11.10). Posle fiksiranja proizvoljnih množitelja, kao u (11.12), simetrija teorije se svodi na *konformnu simetriju* u dve dimenzije. Ova simetrija ima izvanredno važnu ulogu u izgradnji kovarijantne teorije polja. Pogledajmo kako se konformna simetrija opisuje u oscilatornom formalizmu.

Otvorena struna. Videli smo da se u slučaju otvorene strune dve veze, $G_0(\sigma)$ i $G_1(\sigma)$, na intervalu $[0,\pi]$, mogu ujediniti u jednu vezu, $\Pi^2(\sigma)$, na intervalu $[-\pi,\pi]$. Furijeove komponente veze $\Pi^2(\sigma)$, u trenutku $\tau = 0$, date su izrazom

$$
L_n \equiv -\frac{\pi\alpha'}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f_n^*(\sigma)\Pi^2(\sigma)d\sigma\,, \tag{11.28a}
$$

gde je $f_n(\sigma) = \exp(in\sigma)$. Skup koeficijenata L_n potpuno odredjuje vezu $\Pi^2(\sigma)$, i obratno. Znajući algebru veze $G_o(\sigma)$ i $G_1(\sigma)$ lako se može dobiti algebra veličina L_n:

$$
\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m}\,. \tag{11.29}
$$

Koeficijenti L_n se nazivaju *Virazorovi generatori* (Virasoro, 1970), a njihova algebra definiše konformnu grupu u dve dimenzije.

Koristeći razvoj (11.21) Virazorovi generatori se mogu izraziti preko Furijeovih koeficijenata strune a_n u $\tau = 0$:

$$
L_n = -\tfrac{1}{2}\sum_r a_r\cdot a_{n-r}\,. \tag{11.28b}
$$

Iz ovog izraza se opet može dobiti klasična Virazorova algebra (11.29), uz pomoć (11.22).

Totalni hamiltonijan H_T je linearna kombinacija veza, pa se u opštem slučaju može predstaviti kao linearna kombinacija Virazorovih generatora. Zaista, izraz (11.9) za H_T se može zapisati u obliku

$$H_T = \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma v(\sigma)\Pi^2(\sigma)\,, \qquad 2v(\sigma) \equiv v^0(\sigma) + \pi\alpha' v^1(\sigma)\,,$$

gde je $v^0(-\sigma) = v^0(\sigma)$, $v^1(-\sigma) = -v^1(\sigma)$. Posle toga Furijeov razvoj $v(\sigma) = (\pi\alpha'/2)\sum_n v_n e^{-in\sigma}$ vodi direktno do željenog rezultata:

$$H_T = \sum_n v_n L_n\,. \tag{11.30a}$$

U slučaju konformnog gradijentnog uslova, $v(\sigma) = -\pi\alpha'/2$, prethodni izraz postaje

$$H_T = L_0\,. \tag{11.30b}$$

Interesantno je uočiti da se L_0 može izraziti pomoću “broja pobudjenja” N:

$$L_0 = -\tfrac{1}{2}a_0\cdot a_0 - \sum_{r\geq 1} a_r^\star\cdot a_r = -\tfrac{1}{2}a_0\cdot a_0 + N\,, \tag{11.31}$$

gde je

$$a_0^\mu = -\pi_0^\mu \pi\sqrt{2\alpha'} = p^\mu/\sqrt{2\alpha'}\,.$$

Treba primetiti da je $N = \sum_r N_r$, gde je $N_r = r\times$ (broj pobudjenja tipa a_r), zbog faktora $\sqrt{r}$ u normalizaciji koeficijenta a_r. Zato N nije jednak stvarnom broju pobudjenja strune. No, za pobudjenja do prvog nivoa, tj. za $r = 0, 1$, na kojima ćemo se najviše zadržati, ova činjenica nema značaja.

U klasičnoj teoriji koeficijenti a_n medjusobno komutiraju i zadovoljavaju PZ (11.22). U kvantnoj teoriji oni prestaju da komutiraju, pa ćemo tamo morati da vodimo računa i o *uredjenju* operatora.

Zatvorena struna. U slučaju zatvorene strune imamo dve vrste Virazorovih generatora,

$$\begin{aligned} L_n &= -\frac{\pi\alpha'}{4}\int_0^{\pi} f_{2n}^*(\sigma)\Pi^2(\sigma)d\sigma = -\tfrac{1}{2}\sum_r a_r\cdot a_{n-r}\,, \\ \tilde{L}_n &= -\frac{\pi\alpha'}{4}\int_0^{\pi} f_{2n}^*(\sigma)\tilde{\Pi}^2(\sigma)d\sigma = -\tfrac{1}{2}\sum_r b_r\cdot b_{n-r}\,, \end{aligned} \tag{11.32}$$

koji čine dve nezavisne klasične Virazorove algebre:

$$\begin{aligned} &\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m}\,, \\ &\{\tilde{L}_n, \tilde{L}_m\} = -i(n-m)\tilde{L}_{n+m}\,, \\ &\{L_n, \tilde{L}_m\} = 0\,. \end{aligned} \tag{11.33}$$

Totalni hamiltonijan se može izraziti kao linearna kombinacija L_n i $\tilde{L}_n$. Zaista, iz

$$H_T = \int_0^\pi d\sigma [v\Pi^2 + \tilde{v}\tilde{\Pi}^2]\,,$$

gde je $2v = v^0 + \pi\alpha' v^1$, $2\tilde{v} = v^0 - \pi\alpha' v^1$, koristeći $v = -(\pi\alpha'/4)\sum_n v_n e^{2in\sigma}$, i slično za $\tilde{v}$, sledi

$$H_T = \sum_n (v_n L_n + \tilde{v}_n \tilde{L}_n)\,. \tag{11.34a}$$

U slučaju konformnog gradijentnog uslova ovaj izraz se svodi na

$$H_T = 2(L_0 + \tilde{L}_0)\,. \tag{11.34b}$$

Uvodeći brojeve pobudjenja N i $\tilde{N}$ za pobudjenja tipa a_n i b_n, redom, dobija se

$$\begin{aligned} L_0 &= -\tfrac{1}{2}a_0^2 - \sum_{r\geq 1} a_r^\star \cdot a_r = -\tfrac{1}{2}a_0^2 + N\,, \\ \tilde{L}_0 &= -\tfrac{1}{2}b_0^2 - \sum_{r\geq 1} b_r^\star \cdot b_r = -\tfrac{1}{2}b_0^2 + \tilde{N}\,, \end{aligned} \tag{11.35}$$

gde je

$$a_0^\mu = b_0^\mu = p^\mu / 2\sqrt{2\alpha'}\,.$$

Zatvorena struna ima jednu dodatnu simetriju, koja se ogleda u postojanju slobode *globalnih translacija parametra* σ. Generator ovih translacija je sledeća veza prve klase:

$$L_0 - \tilde{L}_0 \approx 0\,. \tag{11.36}$$

Postojanje nezavisnih pobudjenja tipa a_n i b_n (desni i levi talasi) čini zatvorenu strunu *orijentisanom*, u opštem slučaju. No, ako, po analogiji sa otvorenom strunom, posmatramo rešenja koja su simetrična u odnosu na zamenu $a_n \leftrightarrow b_n$, zatvorena struna postaje *neorijentisana*. Neorijentisanost se može definisati zahtevom simetrije u odnosu na $\sigma \to -\sigma$.

3. PRVA KVANTIZACIJA

Izgradnja kvantne mehanike teorije struna je prvi korak u dobijanju odgovarajuće klasične teorije polja. Razmotrićemo ovaj postupak sledeći uobičajeni metod kanonske kvantizacije sistema sa vezama (West, 1985).

3.1 Kvantna mehanika strune

Prelaz na kvantnu mehaniku strune vrši se slično kao i u slučaju tačkaste čestice. Zadržimo se najpre, zbog jednostavosti, na slučaju otvorene strune.

a) Osnovne dinamičke varijable $x(\tau,\sigma)$ i $\pi(\tau,\sigma)$ prelaze u operatore:

$$x(\tau,\sigma) \to \hat{x}(\tau,\sigma)\,, \qquad \pi(\tau,\sigma) \to \hat{\pi}(\tau,\sigma)\,.$$

b) PZ prelazi u $(-i)\times$ (komutator). Tako osnovna PZ postaje

$$[\hat{x}^\mu(\sigma), \hat{\pi}_\nu(\sigma')] = i\delta^\mu_\nu \delta(\sigma,\sigma')\,, \qquad \delta(\sigma,\sigma') = 2\delta_S(\sigma,\sigma')\,, \tag{11.37a}$$

što se u x–reprezentaciji realizuje zamenom $\hat{x}^\mu \to x^\mu$, $\hat{\pi}_\nu \to -i\dfrac{\delta}{\delta x^\nu}$. Prelaz na oscilatorni formalizam daje

$$\begin{aligned} &[\hat{x}^\mu_n, \hat{\pi}^\nu_m] = \eta^{\mu\nu}\frac{i}{2\pi}\big(\delta_{n,m} + \delta_{n,-m}\big)\,, \\ &[\hat{a}^\mu_n, \hat{a}^{\nu+}_m] = -n\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu} \qquad (n,m \geq 0)\,. \end{aligned} \tag{11.37b}$$

Realizacija u x_n–reprezentaciji ima oblik

$$\hat{x}^\mu_n \to x^\mu_n\,, \qquad \hat{\pi}_{n\nu} \to -\frac{i}{2\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\nu_n} + \frac{\partial}{\partial x^\nu_{-n}}\Big)\,,$$

odakle se lako dobija odgovarajući izraz za $\hat{a}^\mu_n$.

c) Veze prve klase L_n prelaze u Virazorove uslove na vektore stanja:

$$\begin{aligned} &(A) \qquad && (\hat{L}_0 - \alpha_0) \mid \psi\rangle = 0\,, \\ &(B) && \hat{L}_n \mid \psi\rangle = 0 \qquad (n \geq 1)\,. \end{aligned}$$

d) Vektor stanja zadovoljava "Šredingerovu jednačinu" :

$$i\frac{\partial}{\partial\tau} \mid \psi\rangle = H_T \mid \psi\rangle \approx 0\,. \tag{11.38}$$

Desna strana ove jednačine je nula zbog $H_T \approx 0$, pa sledi da vektor stanja ne zavisi eksplicitno od vremena (vremensku zavisnost nose dinamičke varijable).

Oblik Virazorovih uslova (A) i (B) je nešto promenjen u odnosu na oblik odgovarajućih klasičnih veza, što zaslužuje nekoliko komentara.

— Pri prelazu na kvantnu mehaniku definicija Virazorovih generatora se mora dopuniti pravilom uredjenja operatora a_n. Ova neodredjenost se pojavljuje samo kad a_r i a_{n-r}, u izrazu za L_n, ne komutiraju, a to se dogadja pri $n = 0$. U tom slučaju, usvojićemo da je $\hat{L}_0$ definisan tako da bude *normalno uredjen*:

$$\hat{L}_0 = -\tfrac{1}{2}\sum_r :a_r^+ \cdot a_r: = -\tfrac{1}{2}\sum_r a_r^+ \cdot a_r + \alpha_0\,. \tag{11.39}$$

Konstanta α_0 predstavlja konstantu normalnog uredjenja.

— Može se pokazati da zahtevi kozistentnosti kvante teorije bozonske strune dovode do uslova koji odredjuju dimenziju prostora D i vrednost parametra α_0 (Goddard, Goldstone, Rebi i Thorn, 1973; Scherk, 1975):

$$\alpha_0 = 1\,, \qquad D = 26\,. \tag{11.40}$$

— U jednačini (B) se ne zahteva $L_n \mid \psi\rangle = 0$ za svako n, jer bi to protivrečilo kvantnoj Virazorovoj algebri, kao što ćemo uskoro videti. No, iz (B) sledi

$$\bar{L}_n \equiv \langle\psi \mid \hat{L}_n \mid \psi\rangle = 0$$

za svako $n \neq 0$ (pošto je $\hat{L}_{-n} = \hat{L}_n^+$), pa tako u klasičnom limesu srednje vrednosti operatora $\hat{L}_n$ iščezavaju, što je u skladu sa klasičnim uslovima (11.8). Relacija (B) je analogna Gubta–Blojlerovom uslovu kvantizacije elektrodinamike.

Videćemo da Virazorovi uslovi (A) i (B) imaju neobično bogat sadržaj, koji bi se teško mogao unapred očekivati.

U slučaju zatvorene strune, osnovne komutacione relacije u oscilatornom formalizmu imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}_n^\mu, \hat{\pi}_{-m}^\nu] = \eta^{\mu\nu}\frac{i}{\pi}\delta_{n,m}\,,\\
&[\hat{a}_n^\mu, \hat{a}_m^{\nu+}] = [\hat{b}_n^\mu, \hat{b}_m^{\nu+}] = -n\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu} \qquad (n, m \geq 0)\,,
\end{aligned}$$

dok je $[\hat{a}_n^\mu, \hat{b}_m^{\nu+}] = 0$. One se u x_n–reprezentaciji realizuju zamenom

$$\hat{x}_n^\mu \to x_n^\mu\,, \qquad \hat{\pi}_{-n\nu} \to -\frac{i}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_n^\nu}\,.$$

3.2 Kvantna Virazorova algebra

U kvantnim Virazorovim uslovima veličinu $\hat{L}_0$ treba shvatiti kao normalno uredjen izraz. Ovakav izbor unosi promene i u Virazorovu algebru (11.29). Pri računanju komutatora $[\hat{L}_n, \hat{L}_m]$ pojaviće se problem normalnog uredjenja samo ukoliko rezultat sadrži član $\hat{L}_0$, tj. pri $n = -m$. Posmatrajmo zato izraz

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_{-n}] = -\tfrac{1}{2}\sum_r \big[(n-r)a_r \cdot a_{-r} + r a_{-n+r} \cdot a_{n-r}\big]\,.$$

Da bismo izvršili normalno uredjenje na desnoj strani ove jednačine, koristićemo regularizovanu definiciju Virazorovih operatora (Peskin, 1985),

$$\hat{L}_n = \lim_{\Lambda\to\infty} -\tfrac{1}{2} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} :a_m \cdot a_{n-m}:$$

i izvršiti normalno uredjenje pre uzimanja limesa $\Lambda \to \infty$. Uzimajući da suma u izrazu za komutator ide od $-\Lambda$ do Λ, promena indeksa sumiranja u drugom članu ($m = -n + r$) utiče i na granice sumiranja, pa se posle normalnog uredjivanja dobija

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_{-n}] = 2n\hat{L}_0 + nD\sum_{1}^{\Lambda} r - \tfrac{1}{2}D \sum_{\Lambda-n+1}^{\Lambda} (r+n)r\,.$$

Ovde je $\hat{L}_0$ normalno uredjen, dimenzija prostor–vremena D se pojavila pri kontrakciji izraza δ^μ_ν, a na kraju računa treba uzeti limes $\Lambda \to \infty$. Sredjivanjem prethodnog izraza dobija se rezultat koji ne zavisi od Λ:

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_{-n}] = 2n\hat{L}_0 + \frac{D}{12}n(n^2-1)\,.$$

U opštem slučaju lako nalazimo

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n-m)\hat{L}_{n+m} + \frac{D}{12}\,n(n^2-1)\delta_{n,-m}\,. \tag{11.41}$$

Novi član na desnoj strani ove relacije, tzv. *centralni naboj* u algebri, nastao je kao posledica normalnog uredjenja, i predstavlja tipičan kvantni efekat.

Vratimo se, sada, zahtevu (B) na vektor stanja. Nije teško videti da uslov $\hat{L}_n \mid \psi\rangle = 0$ ne može biti ispunjena za svako n, jer bi tada iz algebre (11.41) sledilo $\mid \psi\rangle = 0$, zbog postojanja centralnog člana.

3.3 Prostor stanja

U "koordinatnoj" reprezentaciji vektor stanja kvantnomehaničke strune u Hilbertovom prostoru ima oblik *funkcionala* $\psi[x(\sigma)]$ (ψ je preslikavanje funkcija $x(\sigma)$ u kompleksne brojeve). Skalarni proizvod se uvodi preko funkcionalnog integrala

$$\langle\psi_1 \mid \psi_2\rangle = \int \mathcal{D}x(\sigma)\, \psi_1^*[x(\sigma)]\psi_2[x(\sigma)]\,,$$

sa pogodno izabranom merom.

Razmotrićemo sada prelaz na oscilatorni formalizam. Pošto "Šredingerova jednačina" izražava samo vremensku nezavisnost stanja, najveći deo dinamike kvantne teorije strune sadržan je u Virazorovim uslovima (A) i (B), odnosno u obliku Virazorovih generatora. Koristeći jednakost $a_0^\mu = p^\mu = i\partial^\mu$, i relaciju (11.31), nalazimo (u jedinicama $2\alpha' = 1$):

$$\begin{aligned} &2(\hat{L}_0 - 1) = -p^2 + \mathcal{M}^2\,, \\ &\mathcal{M}^2 = 2(N-1)\,, \end{aligned} \tag{11.42}$$

gde je $N \equiv -\sum_{m\geq 1} a_m^+ \cdot a_m$. Veličina $\mathcal{M}^2$ ima ulogu operatora kvadrata mase, i ima svojstvene vrednosti $2(n-1)$. Stanje nivoa $n = 0$ ima $\mathcal{M}^2 < 0$, i naziva se *tahion*, dok su stanja nivoa $n = 1$ bezmasena, $\mathcal{M}^2 = 0$. Tahionsko osnovno stanje bozonske strune predstavlja problem, koji se razrešava u teoriji superstrune.

Na sličan način se, uz pomoć jednakosti $a_0^\mu = b_0^\mu = p^\mu/2$, za zatvorenu strunu dobija :

$$\begin{aligned} &4[(\hat{L}_0 - 1) + (\hat{\tilde{L}} - 1)] = -p^2 + \mathcal{M}^2\,, \\ &\mathcal{M}^2 = 4(N + \tilde{N} - 2)\,. \end{aligned} \tag{11.43}$$

Ovde je $n = \tilde{n} = 0$ stanje tahiona, dok $n = \tilde{n} = 1$ predstavlja bezmaseno stanje.

Medju stanjima $\psi[x(\sigma)]$ posebno su interesantna svojstvena stanja masenog operatora $\mathcal{M}^2$. Ova stanja se karakterišu odredjenim brojem zaposednuća modova strune. Ona se mogu dobiti standardnom tehnikom harmonijskog oscilatora.

Definisaćemo, najpre, *osnovno stanje* $\Phi^{(0)}$, u kome je broj zaposednuća modova jednak nuli:

$$a_m \Phi^{(0)} = 0 \qquad (m \geq 1)\,. \tag{11.44}$$

Koristeći x_m–reprezentaciju za a_m nalazi se

$$\Phi^{(0)} = \prod_{m\geq 1} c_m \exp\Big(\frac{m x_m^2}{2\alpha'}\Big)\,.$$

Stanje $\Phi^{(0)}$ ne sadrži $x = x(0)$, nulti mod od $x(\sigma)$. Delujući na osnovno stanje proizvodima operatora a_m^+ $(m \geq 1)$, dobijaju se razna svojstvena stanja operatora $\mathcal{M}^2$. Koristeći ova stanja kao bazis, svaki funkcional $\psi[x(\sigma)]$ se može izraziti u obliku (West, 1986; Banks i Peskin, 1986)

$$\begin{aligned} \psi[x(\sigma)] = \big[\phi(x) - iA_\mu(x) a_1^{\mu +} - h_{\mu\nu}(x) a_1^{\mu +} a_1^{\nu +} - \cdots \\ - iB_\mu(x) a_2^{\mu +} - l_{\mu\nu}(x) a_2^{\mu +} a_2^{\nu +} - \cdots\big]\,\Phi^{(0)}\,, \end{aligned} \tag{11.45}$$

gde se zavisnost od nultog moda x nalazi u koeficijentnim funkcijama $\phi(x)$, $A_\mu(x)$, ... Naglasimo da operatori a_n^+ predstavljaju operatore kreacije modova strune (ili operatore prelaza strune iz jednog u drugo pobudjeno stanje), a ne operatore kreacije fizičkih čestica. Veza sa fizičkim česticama biće uspostavljena kasnije. Relacija (11.45) predstavlja reprezentaciju stanja $\psi[x(\sigma)]$ u Fokovom prostoru broja zaposednuća modova strune. Koeficijentne funkcije se odredjuju iz Virazorovih uslova (A) i (B), i jednačina kretanja (11.38).

U slučaju zatvorene strune uslov translacione invarijantnosti po σ dobija oblik

$$(L_0 - \tilde{L}_0)\psi[x(\sigma)] = (n - \tilde{n})\psi[x(\sigma)] = 0\,. \tag{11.46}$$

4. KOVARIJANTNA TEORIJA POLJA

Da bi se opisala interakcija izmedju tačkastih čestica, obično sa kvantne mehanike prelazimo na klasičnu (i kvantnu) TP. Analogno se može postupiti i u slučaju teorije strune.

Klasična TP struna se izgradjuje na sledeći način:

— Kvantno–mehaničku funkciju stanja strune $\psi[x(\sigma)]$ proglašavamo za *klasično polje* $\psi[x(\sigma)]$, koje zadovoljava iste jednačine kao i funkcija stanja, tj. $\psi[x(\sigma)]$ ne zavisi eksplicitno od τ i zadovoljava Virazorove uslove.

— Zatim se konstruiše dejstvo iz koga slede tražene jednačine polja. Ovaj korak, kao što ćemo videti, nije nimalo jednostavan, čak ni u teoriji slobodne strune, za razliku od teorije čestica.

— Kad se nadje zadovoljavajuće dejstvo slobodne teorije, onda se uvodi i interakcija, u skladu sa odredjenim fizičkim principima.

Posle toga možemo nastaviti sa izgradnjom *kvantne* TP:

— Razvija se kanonska formulacija klasične TP, tj. definišu se impulsi $\pi[x(\sigma)]$, nalaze se veze, hamiltonijan i jednačine kretanja.

— Konačno se vrši *druga kvantizacija*: klasične varijable $\psi[x(\sigma)]$ i $\pi[x(\sigma)]$ postaju operatori čiji je komutator odredjen kanonskom strukturom Puasonovih (ili Dirakovih) zagrada klasične teorije, a jednačine polja postaju operatorske jednačine. Operator $\hat{\psi}[x(\sigma)]$, delujući na osnovno stanje teorije, kreira ili uništava čitave strune u konfiguraciji $x(\sigma)$.

Centralna tačka u narednom izlaganju biće nalaženje kovarijantnog dejstva *klasične TP slobodnih struna*. U toku rešavanja ovog problema otkrićemo neke osnovne principe simetrije teorije, posle čega će uvodjenje interakcije postati znatno razumljivije (West, 1985; Peskin, 1985; Banks i Peskin, 1986). S druge strane, umesto kanonske kvantizacije može se koristiti i tehnika funkcionalnog integrala, za koju je neophodno poznavati klasično dajstvo i njegove simetrije. Razmatranje interakcije struna i pravih kvantnih efekata ostaje van okvira ovog izlaganja.

4.1 Lokalna simetrija

Smisao Virazorovih uslova. Da bismo olakšali konstrukciju dejstva, razmotrimo smisao Virazorovih uslova u teoriji polja otvorene strune:

$$
\begin{aligned}
&(A) \qquad && (L_0 - 1)\psi[x(\sigma)] = 0\,, \\
&(B) \qquad && L_n \psi[x(\sigma)] = 0 \qquad (n \geq 1)\,,
\end{aligned}
$$

gde, zbog jednostavnosti, pišemo L umesto $\hat{L}$. Za funkcional $\psi[x(\sigma)]$ ćemo koristiti reprezentaciju (11.45) u Fokovom prostoru strune, gde komponente $\phi(x)$, $A_\mu(x)$, $h_{\mu\nu}(x)$, ... predstavljaju uobičajena polja rastućeg spina. Tako se direktno uspostavlja kontakt sa uobičajenom teorijom čestica.

Iz uslova (A) sledi da je polje $\phi(x)$ tahion, $A^1_\mu(x)$ je *bezmaseno polje*, $h_{\mu\nu}(x)$ je polje mase $(\alpha')^{-1/2}$, itd. Ovaj uslov predstavlja jednačinu Klajn–Gordonovog tipa za svaku koeficijentnu funkciju.

Da bismo shvatili značenje uslova (B), vratićemo se na definiciju Virazorovih generatora za $n = 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= -\big(a_0 \cdot a_1 + a_1^+ \cdot a_2 + a_2^+ \cdot a_3 + \cdots\big)\,, \\
L_2 &= -\big(a_0 \cdot a_2 + \tfrac{1}{2} a_1 \cdot a_1 + a_1^+ \cdot a_3 + \cdots\big)\,,
\end{aligned}
$$

gde je $a_0^\mu = p^\mu = i\partial^\mu$. Odavde se lako nalazi

$$
\begin{aligned}
L_1 \psi[x(\sigma)] &= \big[ip^\mu A_\mu + (2p^\mu h_{\mu\nu} + iB_\nu)a_1^{\nu+} + \cdots\big]\Phi^{(0)}\,, \\
L_2 \psi[x(\sigma)] &= \big[2ip^\mu B_\mu - h^\nu{}_\nu + \cdots\big]\Phi^{(0)}\,,
\end{aligned}
$$

posle čega (B) daje sledeće uslove na komponentna polja:

$$
\begin{aligned}
&\partial^\mu A_\mu = 0, \quad 2\partial^\mu h_{\mu\nu} + B_\nu = 0\,, \\
&2\partial^\mu B_\mu + h^\nu{}_\nu = 0\,, \quad \cdots
\end{aligned}
\tag{11.47}
$$

> *Na bezmasenom nivou Virazorovi uslovi daju standardni gradijentni uslov $\partial^\mu A_\mu = 0$.*

Ovaj rezultat je zaista neočekivan. U klasičnoj mehanici strune Virazorovi uslovi su nastali kao izraz reparametrizacione simetrije dejstva; posle zadavanja ortonormalnog uslova u teoriji preostaje konformna simetrija; konačno, vidimo da u teoriji polja ova simetrija ima veze sa uobičajenim gradijentnim uslovima za komponentna polja.

Teorija polja, koja bi bila zasnovana na Virazorovim uslovima (B), predstavljala bi teoriju sa fiksiranom lokalnom simetrijom. Naša je želja da nadjemo dejstvo koje će realizovati kompletnu lokalnu simetriju, za koju će uslovi (B) predstavljati jedan mogući, ali ne i nužan, način fiksiranja simetrije, dok će (A) biti jednačina kretanja.

Lokalna simetrija teorije polja. Posle zaključka da Virazorovi uslovi (B) predstavljaju gradijentne uslove na bezmasenom nivou, postavlja se prirodno pitanje: kako izgledaju odgovarajuće gradijentne transformacije na nivou funkcionala polja?

Posmatraćemo, najpre, otvorenu strunu. Pošto smo ispitivanjem Virazorovih uslova (B) videli smisao operatora L_n $(n \geq 1)$, nameće se misao da lokalna simetrija može imati oblik

$$(C) \qquad \delta\psi = -L_{-n}\Lambda \qquad (n \geq 1)\,,$$

gde je Λ funkcional koji ima ulogu "parametra" gradijentne transformacije:

$$\Lambda[x(\sigma)] = \big[\lambda(x) + i\lambda_\mu(x)a_1^{\mu +} + i\varepsilon_\mu(x)a_2^{\mu +} + ...\big]\Phi^{(0)}\,.$$

Pri $n = 1, 2$, koristeći izraze

$$\begin{aligned} -L_{-1} &= \big(a_1^+ \cdot a_0 + a_2^+ \cdot a_1 + a_3^+ \cdot a_2 + \cdots\big)\,, \\ -L_{-2} &= \big(a_2^+ \cdot a_0 + \tfrac{1}{2}a_1^+ \cdot a_1^+ + a_3^+ \cdot a_1 + \cdots\big)\,, \end{aligned}$$

dobija se

$$\begin{aligned} -L_{-1}\Lambda &= \big(p_\mu \lambda a_1^{\mu +} + ip_\mu\lambda_\nu a_1^{\mu +}a_1^{\nu +} - i\lambda_\mu a_2^{\mu +} + \cdots\big)\Phi^{(0)}\,, \\ -L_{-2}\Lambda' &= \big(p_\mu\lambda' a_2^{\mu +} + \tfrac{1}{2}\lambda' a_1^+ \cdot a_1^+ + \cdots\big)\Phi^{(0)}\,. \end{aligned}$$

Iz ovih izraza, i jednačine (C), može se pročitati zakon transformacija komponentnih polja. Osnovno stanje (tahion) je gradijentno invarijantno,

$$\delta\phi(x) = 0\,. \tag{11.48a}$$

Vektorsko bezmaseno polje se transformiše kao

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu\lambda\,, \tag{11.48b}$$

što predstavlja linearnizovani zakon transformacije gradijentnog polja. Na sledećem nivou mase dobija se

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= \partial_{(\mu}\lambda_{\nu)} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\lambda'\,, \\ \delta B_\mu &= \lambda_\mu - \partial_\mu\lambda'\,. \end{aligned} \tag{11.48c}$$

Transformacije (C), na bezmasenom nivou, predstavljaju upravo one lokalne simetrije koje smo i tražili.

Na višim nivoima one daju i mnoge druge lokalne simetrije, čije se postojanje teško moglo očekivati. Slična situacija će biti i u slučaju zatvorene strune.

Lokalne simetrije na nivou funkcionala $\psi[x(\sigma)]$ imaju jednostavan oblik (C), koji je veoma koristan za dublje razumevanje geometrijske strukture teorije. S druge strane, izražene pomoću komponentnih polja ove simetrije postaju jako složene, ali je njihova fizička interpretacija, na nivou bezmasenih polja, veoma jednostavna.

Prethodna razmatranja su pokazala smisao Virazorovih uslova (A) i (B) u teoriji polja otvorene strune, i ukazala na oblik lokalne simetrije (C), koju kompletna, kovarijantna formulacija treba da ima. Sada ćemo pokušati da ove rezultate realizujemo izgradnjom odgovarajućeg dejstva.

4.2 Dejstvo slobodne teorije polja

Dejstvo teorije polja slobodnih struna tražićemo u obliku

$$I = -\tfrac{1}{2} \int \mathcal{D}x(\sigma) \psi^\star[x(\sigma)]\, K\, \psi[x(\sigma)] \equiv -\tfrac{1}{2}(\psi, K\psi)\,. \tag{11.49}$$

Zahtev invarijantnosti u odnosu na lokalne transformacije simetrije

$$\delta\psi = i \sum c_n L_{-n} \Lambda$$

dovodi do uslova

$$\delta I = -\frac{i}{2} \sum c_n(\psi, K L_{-n}\lambda) \,+\, \text{k. k.} = 0\,.$$

Tražićemo, takodje, da Virazorov uslov (A) bude ispunjen kao jednačina kretanja.

Verma–modul. Konstrukcija operatora K se znatno olakšava poznavanjem nekih rezultata vezanih za strukturu Virazorove algebre (Goddard i Olive, 1986).

Virazorova algebra je izraz konformne simetrije teorije, i ima beskonačan broj generatora. Iz oblika algebre (11.41) lako se vidi da je L_0 jedini operator komutirajuće podalgebre. Posmatraćemo unitarne reprezentacije algebre, u kojima su ispunjeni sledeći uslovi: *a*) $L_n^+ = L_{-n}$, *b*) postoji pozitivno definitan skalarni proizvod, i *c*) L_0 je *pozitivno definitna* veličina,

$$L_0 \geq 0\,.$$

Neka je funkcional $H[x(\sigma)]$ svojstveno stanje od L_0 sa svojstvenom vrednošću h. Tada iz relacije

$$L_0 L_n = L_n(L_0 - n)$$

sledi da L_n, delujući na $H[x(\sigma)]$, *smanjuje* svojstvenu vrednost od L_0 za n. Iz uslova pozitivne definitnosti operatora L_0 sledi da mora postojati stanje ψ_0 na kome se ovaj proces zaustavlja:

$$\begin{aligned} L_n\psi_0 &= 0 \qquad (n \geq 1)\,, \\ L_0\psi_0 &= h\psi_0\,. \end{aligned}$$

U stanju ψ_0 svojstvena vrednost od L_0 je najmanja, pa je najmanja i vrednost $\mathcal{M}^2$, ili N. Ovo stanje se naziva stanjem *nivoa* 0. Sa gledišta simetrije u stanju ψ_0 zadati su svi gradijentni uslovi, pa se ono često naziva i fizičko stanje.

Polazeći od datog stanja ψ_0 može se izgraditi ireducibilna reprezentacija Virazorove algebre delovanjem operatora L_{-n}, koji podižu vrednost od L_0 za n jedinica. Zato opis strune, na konačnom nivou ekscitacije modova, zahteva samo konačan broj generatora.

Stanja *nivoa* 1 su ona koja nastaju delovanjem operatora L_{-1} na ψ_0, stanja *nivoa* 2 su $L_{-2}\psi_0$ i $L_{-1}L_{-1}\psi_0$, itd. Prostor svih stanja, koja su konstruisana iz datog ψ_0, naziva se *Verma–modul*. Stanja na različitim nivoima Verma–modula imaju različite svojstvene vrednosti od L_0, i medjusobno su ortogonalna, npr. $(L_{-1}\psi_0, \psi_0) = (\psi_0, L_1\psi_0) = 0$. Dekompozicija prostora funkcionala $\psi[x(\sigma)]$ na nivoe je ortogonalna dekompozicija.

Konstrukcija dejstva. Uslov invarijantnosti dejstva može biti zadovoljen ako nadjemo operator K za koji važi

$$KL_{-n}\Lambda = 0 \qquad (n \geq 1)\,.$$

Stanje $L_{-n}\Lambda$ je bar nivoa n, pa se ovaj uslov lako zadovoljava ako je K proporcionalno projektoru P na stanje nivoa 0:

$$K = K_0 P\,.$$

Način konstrukcije projektora je poznat iz matematike (Feigin i Fuchs, 1982). Iz zahteva da Virazorov uslov (A) važi i za najniže stanje, dobija se da je K_0 proporcionalan sa $L_0 - 1$, tako da konačno nalazimo

$$K = 2(L_0 - 1)P\,. \tag{11.50}$$

Dejstvo definisano jednačinama (11.49) i (11.50) rešava postavljeni zadatak. Ono definiše kovarijantnu teoriju koja poseduje lokalnu simetriju (C), na osnovu koje se Virazorovi uslovi (B) mogu nametnuti kao gradijentni uslovi. Na taj način, konformna simetrija strune prelazi u teoriji polja u lokalnu simetriju, iz koje će, na bezmasenom nivou, nastati elektrodinamika i gravitacija.

4.3 Elektrodinamika

Stanja nivoa 1 otvorene strune difinisana su kao

$$\psi_1 = L_{-1}\Phi^{(0)}\,.$$

Uslov $L_1\psi_1 = 0$ nije zadovoljen, jer je $L_1\psi_1 = [L_1, L_{-1}]\Phi^{(0)} = 2L_0\Phi^{(0)} \neq 0$, ali važi $L_1^2\psi_1 = L_2\psi_1 = L_2L_1\psi_1 = \cdots = 0$.

Projektor P, do na prvi pobudjeni nivo, ima oblik

$$P_{(1)} = 1 - \tfrac{1}{2}L_{-1}L_0^{-1}L_1\,.$$

Zaista,

$$P_{(1)}\Phi^{(0)} = \Phi^{(0)}\,, \qquad P_{(1)}\psi_1 = \psi_1 - \tfrac{1}{2}L_{-1}L_0^{-1}\cdot 2L_0\Phi^{(0)} = 0\,.$$

Operator K postaje (sa istom tačnošću)

$$K_{(1)} = 2(L_0-1)P_{(1)} = 2(L_0-1) - L_{-1}L_1\,.$$

Obratimo sada pažnju na lokalnu transformaciju

$$\delta\psi = -L_{-1}\Lambda_0\,, \tag{11.51a}$$

gde je $L_{-1}\Lambda_0$ istog nivoa kao ψ_1, tj. Λ_0 je nivoa 0 u odnosu na ekscitacije tipa 1, $L_1\Lambda_0 = 0$ (nije nužno zahtevati $L_2\Lambda_0 = \cdots = 0$). Invarijantnost dejstva

$$I_{(1)} = -\tfrac{1}{2}\int \mathcal{D}x(\sigma)\,\psi^*[x(\sigma)]K_{(1)}\psi[x(\sigma)] \tag{11.52a}$$

u odnosu na ove transformacije može se eksplicitno proveriti na osnovu relacije

$$\begin{aligned} K_{(1)}L_{-1}\Lambda_0 &= (2L_0L_{-1} - 2L_{-1} - L_{-1}L_1L_{-1})\Lambda_0 \\ &= (2L_0L_{-1} - 2L_{-1} - L_{-1}\cdot 2L_0)\Lambda_0 = 0\,, \end{aligned}$$

pošto je $L_1\Lambda_0 = 0$. Na jeziku komponentnih polja Fokovog prostora, lokalna simetrija se svodi na običnu *Abelovu lokalnu simetriju*:

$$\delta\phi = 0, \qquad \delta A_\mu = -\partial_\mu\lambda\,. \tag{11.51b}$$

Kakav je sadržaj dejstva $I_{(1)}$ po nivoima, tj. kakva je njegova zavisnost od komponentnih polja $\phi(x), A_\mu(x), \ldots$? Na najnižem nivou

$$K_{(1)}\psi\,\big|_0 = \left(-p^2 + m^2\right)\phi\Phi^{(0)}\,,$$

gde je $m^2 = -2$ (tahion). Koristeći izraz

$$K_{(1)} = -p^2 + 2\big(N-1\big) - p_\mu p_\nu a_1^{\mu+} a_1^\nu + \cdots\,,$$

na prvom pobudjenom nivou (bezmaseni nivo) dobija se

$$\begin{aligned} K_{(1)}\psi\,\big|_1 &= \big(-p^2 - p_\mu p_\nu a_1^{\mu+} a_1^\nu\big)\big(-iA_\lambda a_1^{\lambda+}\big)\Phi^{(0)} \\ &= ip^2\Pi_{\mu\nu}A^\mu a_1^{\nu+}\Phi^{(0)}\,, \end{aligned}$$

gde je $\Pi_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/p^2$. Definišimo meru u dejstvu pomoću mere po modovima, tako da je

$$\int \mathcal{D}x(\sigma)\,\Phi^{(0)*}\Phi^{(0)} = \int d^Dx \prod_{n\geq 1} \mathcal{D}x_n\,\Phi^{(0)\star}\Phi^{(0)} = \int d^Dx\,.$$

Tada na bezmasenom nivou dobijamo

$$I_{(1)} = -\tfrac{1}{2}\int d^Dx\, A^\mu p^2 \Pi_{\mu\nu} A^\nu = -\tfrac{1}{4}\int d^Dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \tag{11.52b}$$

gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Ovo nije ništa drugo do dejstvo za slobodnu elektrodinamiku, što se moglo i očekivati na osnovu oblika lokalne simetrije (11.51).

Postupak izgradnje kovarijentne teorije polja može se nastaviti i na višim nivoima. Već na drugom nivou srećemo se sa pojavom *nelokalnosti teorije*, koja se prirodno može otkloniti uvodjenjem *dodatnih polja* (ilustraciju ove opšte pojave videćemo na prvom nivou teorije zatvorene strune). Uz pomoć ovih polja postupak izgradnje *lokalnog* kovarijantnog dejstva se može dovesti do kraja, no, taj problem se nalazi van okvira ovog izlaganja.

4.4 Gravitacija

U prethodnom izlaganju smo videli da kovarijantna teorija polja *otvorene strune*, na bezmasenom nivou, sadrži elektrodinamiku. Sada ćemo pokazati da analogna razmatranja u teoriji *zatvorene strune* vode do linearizovane Ajnštajnove teorije gravitacije.

Pogledaćemo, najpre, *smisao Virazorovih uslova* u teoriji zatvorene strune. Zatvorena struna ima dvostruko veći spektar normalnih modova, i dva skupa Virazorovih generatora, L_n i $\tilde{L}_n$, koji medjusobno komutiraju. Reprezentacija polja u Fokovom prostoru ima oblik

$$\psi[x(\sigma)] = \big[\phi(x) + t_{\mu\nu}(x)a_1^{\mu+}b_1^{\nu+} + \cdots\big]\Phi^{(0)}\,,$$

gde smo koristili uslov $n - \tilde{n} = 0$, a $\Phi^{(0)}$ je ovde osnovno stanje za oba tipa pobudjenja. Polje ϕ je tahion, $t_{\mu\nu}$ je *bezmaseno polje*, itd., što se vidi iz oblika $\mathcal{M}^2$. Virazorovi uslovi postaju

$$(A') \qquad (L_0 - 1)\psi = (\tilde{L}_0 - 1)\psi = 0\,,$$

$$(B') \qquad L_n\psi = \tilde{L}_n\psi = 0 \qquad (n \geq 1)\,.$$

Na bezmasenom nivou uslovi (B') prelaze u gradijentni uslov

$$\partial^\mu t_{\mu\nu} = \partial^\nu t_{\mu\nu} = 0\,. \tag{11.53}$$

Koristeći slične argumente kao i u slučaju otvorene strune, dobija se sledeći rezultat:

— kovarijantno dejstvo u slučaju zatvorene strune ima oblik

$$I = -\tfrac{1}{2}(\psi, K\psi)\,, \qquad K \equiv 4[(L_0 - 1) + (\tilde{L}_0 - 1)]P\tilde{P}\,, \tag{11.54}$$

gde su P i $\tilde{P}$ projektori na nivo 0 za pobudjenja tipa a_n i b_n, redom;

— ovo dejstvo ima *lokalnu simetriju*

$$(C') \qquad \delta\psi = -L_{-n}\tilde{\Lambda} - \tilde{L}_{-n}\Lambda \qquad (n \geq 1)\,.$$

Razmotrićemo oblik ove simetrije na bezmasenom nivou $(n = \tilde{n} = 1)$

$$\psi_{1\bar{1}} = L_{-1}\tilde{L}_{-1}\Phi^{(0)}\,.$$

Koristeći jednakosti $2a_0^\mu = 2b_0^\mu = p^\mu = i\partial^\mu$, i postupajući kao pri razmatranju otvorene strune, dobija se

$$\delta t_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\big(\partial_\mu\tilde{\lambda}_\nu + \partial_\nu\lambda_\mu\big)\,. \tag{11.55a}$$

Razložimo tenzor $t_{\mu\nu}$ na simetričan i antisimetričan deo, $t_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}$, čiji su zakoni transformacije

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= -\tfrac{1}{4}\big(\partial_\mu\lambda_\nu^S + \partial_\nu\lambda_\mu^S\big)\,, \qquad \lambda_\mu^S \equiv \lambda_\mu + \tilde{\lambda}_\mu\,, \\ \delta b_{\mu\nu} &= -\tfrac{1}{4}\big(\partial_\mu\lambda_\nu^A - \partial_\nu\lambda_\nu^A\big)\,, \qquad \lambda_\mu^A \equiv \tilde{\lambda}_\mu - \lambda_\mu\,. \end{aligned} \tag{11.55b}$$

Ako simetrično polje $h_{\mu\nu}$ identifikujemo sa gravitonom, njegov zakon transformacije predstavlja linearizovanu *opštu koordinatnu transformaciju*, dok je izraz za $\delta b_{\mu\nu}$ prirodna lokalna simetrija teorije antisimetričnog polja.

Dobijanje dejstva za komponentna polja $b_{\mu\nu}$ i $h_{\mu\nu}$ nije složeno. Najpre ćemo uočiti da je na nivou $n = \tilde{n} = 1$ ispunjen uslov

$$K_{(1\bar{1})}t_{\mu\nu}a_1^{\mu+}b_1^{\nu+}\Phi^{(0)} = -p^2\Pi^{\lambda\mu}\Pi^{\rho\nu}t_{\mu\nu}a_{1\lambda}^+b_{1\rho}^+\Phi^{(0)}\,.$$

Ovaj se rezultat lako dobija uz pomoć relacija

$$
\begin{aligned}
&P a_1^{\mu+}\Phi^{(0)}\big|_1 = \Pi^{\lambda\mu} a_{1\lambda}^{+}\Phi^{(0)}\,, \qquad \tilde{P} b_1^{\nu+}\Phi^{(0)}\big|_1 = \Pi^{\rho\nu} b_{1\rho}^{+}\Phi^{(0)}\,, \\
&4[(L_0-1)+(\tilde{L}_0-1)]\big|_{1\bar{1}} \to -p^2\,.
\end{aligned}
$$

Zatim ćemo zapisati dejstvo za $t^{\mu\nu}$ u obliku

$$
\begin{aligned}
I_{(1)} &= -\tfrac{1}{2}\big(t^{\sigma\tau} a_{1\sigma}^{+} b_{1\tau}^{+}\Phi^{(0)}\,, K_{(1\bar{1})}\, t^{\mu\nu} a_{1\mu}^{+} b_{1\nu}^{+}\Phi^{(0)}\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\int d^D x\, t_{\lambda\rho}\, p^2 \Pi^{\lambda\mu}\Pi^{\rho\nu}\, t_{\mu\nu}\,,
\end{aligned}
\tag{11.56}
$$

koristeći normalizaciju $\int \mathcal{D}x(\sigma)\,\Phi^{(0)*}\Phi^{(0)} = \int d^D x$.

Deo dejstva kvadratičan po antisimetričnom polju (slobodno dejstvo za $b_{\mu\nu}$) lako se dobija iz prethodnog izraza:

$$
I(b) = \tfrac{1}{6}\int d^D x\, H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}\,,
\tag{11.57}
$$

gde je $H_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_\mu b_{\nu\lambda} + \partial_\lambda b_{\mu\nu} + \partial_\nu b_{\lambda\mu}$ potpuno antisimetrična veličina, koja predstavlja jačinu polja za $b_{\mu\nu}$. Tenzor $H_{\mu\nu\lambda}$ je invarijantan u odnosu na lokalnu simetriju (11.55).

Dobijanje dela dejstva kvadratičnog po $h_{\mu\nu}$ je nešto složenije. Napisaćemo, najpre,

$$
I(h) = \int d^D x\, h_{\lambda\rho}\, p^2 \big(\Pi^{\lambda\mu}\Pi^{\rho\nu} + \Pi^{\rho\mu}\Pi^{\lambda\nu}\big)\, h_{\mu\nu}\,.
$$

Zatim ćemo dodati i oduzeti pogodno izabran član:

$$
I(h) = \int d^D x\, h_{\lambda\rho}\, p^2 \big[\big(\Pi^{\lambda\mu}\Pi^{\rho\nu} + \Pi^{\rho\mu}\Pi^{\lambda\nu}\big) - 2\Pi^{\lambda\rho}\Pi^{\mu\nu} + 2\Pi^{\lambda\rho}\Pi^{\mu\nu}\big]\, h_{\mu\nu}\,.
$$

Prva tri člana u ovom izrazu predstavljaju Pauli–Fircovo dejstvo za bezmaseno polje heliciteta ± 2:

$$
I_{PF} = \int d^D x\,\big(\tfrac{1}{2} h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\nu,\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\sigma,\nu} + h_{\mu\sigma}{}^{,\sigma} h^{,\mu} - \tfrac{1}{2} h_{,\sigma} h^{,\sigma}\big)\,,
\tag{11.58a}
$$

gde je $h = h^{\nu}{}_{\nu}$. Ovo dejstvo nije ništa drugo, nego linearizovano dejstvo *Ajnštajnove teorije gravitacije*:

$$
I_A(h) = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d^D x\, \sqrt{-g}\, R\,,
\tag{11.58b}
$$

gde je R skalarna krivina Rimanovog prostora metrike $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}$ (glava VIII).

Koristeći $R = 2\lambda(\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \Box h) = 2\lambda p^2 \Pi^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, poslednji član u $I(h)$ se može napisati kao *nelokalno* dejstvo:

$$I_{NL} = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d^D x\, R\,\frac{1}{\Box}\,R\,. \tag{11.59a}$$

Ovo dejstvo se može učiniti lokalnim uvodjenjem *dodatnog skalarnog polja* $\varphi(x)$. Zaista, ako se u izrazu

$$I_S = \int d^D x\, \left(\tfrac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \lambda^{-1}\varphi R\right) \tag{11.59b}$$

polje φ eliminiše uz pomoć jednačina kretanja $\Box\varphi + \lambda^{-1}R = 0$, dobija se ponovo I_{NL}.

Tako smo za ukupno dejstvo dobili izraz

$$I_{(1)} = I(b) + I_A(h) + I_S(\varphi, h)\,. \tag{11.60}$$

Na bezmasenom nivou zatvorena struna sadrži antisimetrično polje $b_{\mu\nu}$, graviton $h_{\mu\nu}$ i skalarno polje φ, što je u skladu sa lokalnom simetrijom teorije.

Polje φ je ušlo u teoriju indirektno, posle eliminacije nelokalnosti iz dejstva. Pojava nelokalnog dejstva je opšta karakteristika svih viših nivoa teorije (otvorene i zatvorene) strune. Sve nelokalnosti se mogu eliminisati uz pomoć dodatnih polja, koja su, inače, potrebna za kompletiranje čestičnog sadržaja teorije.

5. OPŠTE NAPOMENE

Imajući u vidu opšti i uvodni karakter izlaganja u ovoj glavi, korisno je pomenuti još neke teme koje su od značaja za izgradnju realistične teorije struna.

Superstruna. Bozonska struna ne može biti zadovoljavajuća teorija iz dva razloga: prvo, ona ne sadrži fermione, i drugo, u njenom spektru postoji tahionsko stanje. Uzrok pojave tahiona je pozitivnost parametra α_0, koja je povezana sa normalnim uredjenjem Virazorovih generatora $\hat{L}_0$. Zato je prirodno potražiti supersimetrično uopštenje teorije, u kojoj se, zbog skraćivanja efekata bozona i fermiona, može očekivati rezultat $\alpha_0 = 0$.

Postoje dva načina uvodjenja supersimetrije u teoriju struna.

a) Bozonska struna se može shvatiti kao dvodimenziona teorija polja koja opisuje D skalarnih polja $x^\mu(\xi)$ u interakciji sa gravitacijom $g_{\alpha\beta}(\xi)$.

Teorija ima simetriju u odnosu na opšte koordinatne transformacije na dvodimenzionoj svetskoj površi strune, koja se može uopštiti u lokalnu supersimetriju u dve dimenzije (Neveu i Schwarz, 1971; Ramon, 1971). Kritična dimenzija za ovu teoriju je $D = 10$, a parametar α_0 ima vrednost $\frac{1}{2}$ (Neveu–Schwarz) ili 0 (Ramon), u zavisnosti od graničnih uslova. Potencijalni problem tahionskog osnovnog stanja se izbegava uvodjenjem odredjene restrikcije na stanja u teoriji (Gliozzi, Scherk i Olive, 1976).

b) Teorija bozonske strune poseduje globalnu Poenkareovu simetriju u M_D, koja se može uopštiti u globalnu supersimetriju. Tako nastaje druga varijantna supersimetrične strune (Green i Schwarz, 1982; 1984), čija je kvantna verzija konzistentna samo u $D = 10$.

Interesantno je da prva formulacija superstrune, posle uvodjenja pomenutih restrikcija na stanja, postaje ekvivalentna sa drugom. Dok u prvoj varijanti teorije postojanje globalne supersimetrije prostor–vremena nije evidentno, u drugoj varijanti ostaje nejasna priroda lokalne supersimetrije na svetskoj površi. Ne postoji formulacija u kojoj bi obe supersimetrije bile eksplicitne. Stepen važenja četvorodimenzione prostorno–vremenske supersimetrije zavisi od načina kompaktifikacije.

Pokazalo se da je za dobijanje realistične teorije superstruna, koja sadrži neabelove simetrije potrebne za opis elektroslabe i jake interakcije, potrebno kombinovati elemente bozonske i supersimetrične strune. Tako je nastala najuspešnija teorija struna, heterotična struna (pojam ‘heterosis’ označava “povećanu životnu energiju ukrštenih biljaka i životinja”) (Gross, Harvey, Martinec i Rohm, 1985; 1986)

Kovarijantna kvantizacija. U ovoj glavi su izložene neke osnovne karakteristike teorije polja neinteragujućih bozonskih struna koristeći stari (kanonski) kovarijantni pristup, u kome se jednostavno uočava uloga lokalnih simetrija, i veza sa teorijom tačkastih čestica.

Istorijski je teorija struna, najpre, razvijena koristeći gradijentni uslov svetlosnog konusa (Scherk, 1975; Schwarz, 1982). U ovom pristupu se radi samo sa fizičkim varijablama (teorija je eksplicitno unitarna), i on je pogodan za većinu perturbativnih računa u ravnom prostor–vremenu M_D. Zahtev relativističke kovarijantnosti dovodi do pojave kritične dimenzije ($D = 26$ ili 10), a osobine lokalne simetrije, kao i veza sa teorijom tačkastih čestica, manje su jasne.

Osnovna karakteristika kanonskog kovarijantnog metoda je jaka intuitivna veza sa teorijom tačkastih čestica. Pošto su polja tačkastih čestica komponente funkcionala $\psi[x(\sigma)]$ u Fokovom prostoru strune, metod je, u izvesnom smislu, “koordinatno” orijentisan. Razumevanje geometrije struna zahteva direktnu geometrijsku interpretaciju “vektora” $\psi[x(\sigma)]$.

Kao snažan podsticaj za razvoj geometrijskog razumevanja teorije strune pokazao se moderan kovarijantni pristup — BRST formalizam (Kugo i Uehara, 1982; Kato i Ogawa, 1983; Hwang, 1983; Siegel, 1985; Siegel i Zwiebach, 1986; Itoh, Kugo, Kunimoto i Ooguri, 1986), zasnovan na metodu koji je prethodno razvijen u teoriji neabelovih lokalnih teorija. U ovom pristupu unitarnost teorije se osigurava ne direktnim zadavanjem gradijentnog uslova, već dodavanjem novih polja, "duhova", čija je uloga poništavanje neželjenih efekata nefizičkih polja u teoriji. Snaga ovog metoda posebno dolazi do izražaja pri izgradnji kvantne teorije polja, gde je on, praktično, nezamenljiv.

U cilju razjašnjenja nekih problema kovarijantne kvantizacije superstruna, često se analiziraju jednostavniji modeli superčestica.

Efektivno dejstvo. Teorija struna u ravnom prostor–vremenu M_D može se uopštiti na slučaj zakrivljenog prostor–vremena V_D. Iz razmatranja u M_D znamo da je za strukturu teorije od suštinske važnosti postojanje konformne simetrije. Poznato je da se u M_D javlja anomalija, zbog čega je konformna simetrija u kvantnoj teoriji dobra simetrija samo pri $D = 26$ ili 10 (Polyakov, 1981). Prirodno je očekivati da će problem konformne anomalije u krivoj geometriji V_D postati još ozbiljniji. Interesantna je činjenica da uslov konformne invarijantnosti ovakve teorije, koji se može izraziti zahtevom iščezavanja svih β–funkcija, dovodi do jednačina koje opisuju dinamiku zakrivljenog prostora. Ove jednačine se, na nivou jedne petlje, podudaraju sa Ajnštajnovim i Jang–Milsovim jednačinama (Fradkin i Tseytlin, 1985; Callan, Friedan, Martinec i Perry, 1985). Postoji efektivno dejstvo iz koga se ove jednačine dobijaju kao jednačine kretanja.

Ako sada *identifikujemo* polja, koja opisuju zakrivljenu geometriju V_D, sa bezmasenim poljima strune, prethodni rezultat se može smatrati izvodjenjem efektivnog dejstva za bezmaseni sektor strune, u kome se nalazi i gravitacija. Tako konformna simetrija, kao uslov konzistentnosti teorije, daje dinamičke jednačine za bezmasena polja. Sa gledišta kompletne teorije struna moć ovog pristupa je zagonetna. Zaista, dobijene jednačine su samo uslovi konzistentnosti dinamike struna, a ne prave jednačine kretanja. Smisao dobijanja lokalne invarijantnosti tačkastih polja, iz zahteva konformne simetrije teorije struna, nije dovoljno jasan. Za nalaženje jasnog odgovora na ova pitanja izgleda prirodno povezati metod efektivnog dejstva sa razmatranjima u kvantnoj teoriji polja. O toj vezi malo se zna.

Teorija polja. Značaj konzistentne kvantne teorije polja struna zasniva se na uverenju da ona može predstavljati kvantnu teoriju svih osnovnih interakcija. Pri tom se, naravno, u razmatranje mora uključiti i interakcija struna. Ranija izučavanja teorije polja struna bila su, uglavnom, zasnovana na korišćenju gradijentnog uslova svetlosnog konusa (Kakku i Kikkawa, 1974; Cremmer i Jervais, 1974, 1975). Mada je ova formulacija teorije potpuno prihvatljiva, postoje pitanja na koja ona ne daje jasne odgovore. Nadamo se da će poznavanje kovarijantne teorije polja omogućiti shvatanje neperturbativnih efekata, koji mogu biti od značaja u procesu kompaktifikacije. U kovarijantnoj formulaciji principi koji se nalaze u osnovi teorije postaju evidentni. Kao i obično, dejstvo se konstruiše polazeći od nekih principa simetrije. Posle razmatranja slobodne teorije (Banks i Peskin, 1986; Siegel i Zwiebach, 1986; Neveu, Schwarz i West, 1985; Neveu i West, 1985), nadjene su i formulacije interagujuće teorije (Hata, Itoh, Kugo, Kunimoto i Ogawa, 1986; Neveu i West, 1986; Witten, 1986). Razvoj ovih istraživanja predstavlja važan korak u izgradnji realistične teorije struna.

Anomalije i kompaktifikacija. I pored impresivne strukture koju teorija struna poseduje, izgradnja realistične teorije nije nimalo jednostavna. Na nivou jedne petlje obično se u teoriji pojavljuju anomalije, koje kvare simetrije klasične teorije i dovode do problema pri kvantizaciji. Nadjeno je da jedino teorije sa unitrašnjom simetrijom $SO(32)$ ili $E_8 \times E_8$ nemaju anomalije (Schwarz, 1985*a*). Ovim rezultatom je motivisana heterotična teorija strune.

Najzad, dolazimo do važnog problema konstrukcije efektivne teorije u četiri dimenzije polazeći od $D = 10$ dimenzija prostora u kome "živi" struna. Problem se rešava kompaktifikacijom, tj. nalaženjem osnovnog stanja koje je "zakrivljeno" u šest dimenzija (koje, u niskoenergetskom limitu teorije, postaju neopservabilne), tako da fizički prostor–vreme ima efektivno $10 - 6 = 4$ dimenzije. Pri analizi ovog zadatka susrećemo se sa činjenicom da postoji na hiljade mogućih osnovnih stanja, što dovodi do problema prevelike neodredjenosti pri pokušaju izgradnje realistične teorije.

Membrane. Interesantno je, na kraju, pomenuti i pokušaje razmatranja netačkastih objekata dimenzije veće od $d = 1$ (dimenzija strune), kao što su membrane ($d = 2$), itd. Problem je matematički mnogo složeniji zbog nelinearnosti jednačina (Collins i Tucker, 1976; Howe i Tucker, 1978; Taylor, 1976; Kikkawa i Yamasaki, 1986).

ZADACI

1. Dejstvo relativističke čestice ima oblik

$$I[x, g, R] = -\int d\tau [R_\mu \dot{x}^\mu - \tfrac{1}{2} g(R^2 - m^2)] \,.$$

a) Pokazati da se, posle eliminacije varijable R uz pomoć jednačina kretanja, ovo dejstvo svodi na $I[x, g] = -\frac{1}{2} \int d\tau [g^{-1} \dot{x}^2 + g m^2]$. Zatim, eliminacijom g dobiti $I[x] = -m \int d\tau \sqrt{\dot{x}^2}$.
b) Izvršiti kanonsku analizu dejstva $I[x, g, R]$, pa onda naći generatore simetrije i pokazati da su odgovarajuće transformacije simetrije τ reparametrizacije: $\delta x^\mu = \varepsilon R^\mu$, $\delta g = \dot{\varepsilon}$, $\delta R = 0$.
c) Istu analizu uraditi za $I[x, g]$.

2. Pokazati da održane struje, koje odgovaraju globalnoj Poenkareovoj simetriji strune, imaju oblik $j^\alpha_\mu = (\pi_\mu, \pi^{(\sigma)}_\mu)$ (translacije) i $j^\alpha_{\mu\nu} = 2x_{[\mu} j^\alpha_{\nu]}$ (Lorencove transformacije), a zatim naći odgovarajuće naboje P_μ i $M_{\mu\nu}$. Proveriti održanje ovih naboja koristeći jednačine kretanja i granične uslove.

3. Naći eksplicitan izraz za $\pi_\mu^{(\sigma)}$, a zatim izvesti relacije

$$(\pi^{(\sigma)})^2 + \dot{x}^2/(2\pi\alpha')^2 = 0\,, \qquad \pi^{(\sigma)}\cdot\dot{x} = 0\,.$$

Pokazati, koristeći granične uslove za otvorenu strunu, da se krajevi strune kreću brzinom svetlosti, i to ortogonalno na položaj strune.

4. *a*) Pokazati da je ravna, otvorena struna u M_4, koja ravnomerno rotira u ravni x^1x^2 oko svog središta u koordinatnom početku, opisana jednačinama

$$\begin{aligned} x^0 &= \tau\,, & x^3 &= 0\,,\\ x^1 &= A(\sigma-\pi/2)\cos\omega\tau\,, & x^2 &= A(\sigma-\pi/2)\sin\omega\tau\,, \end{aligned}$$

gde je $\frac{1}{2}\pi\omega A = 1$.
b) Pokazati da svetlosni signal putuje od jednog do drugog kraja strune za konačno vreme.
c) Izračunati fizičke vrednosti mase M i ugaonog momenta J strune, a zatim izvesti relaciju $J = \alpha' M^2$.

5. *a*) Izvesti oblik Virazorovih generatora otvorene strune u Fokovom prostoru pobudjenja, i proveriti Virazorovu algebru. Zatim naći oblik impulsa i ugaonog momenta.
b) Isto uraditi za zatvorenu strunu.

6. Posmatrajmo Virazorovu algebru sa centralnim članom:

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n-m)\hat{L}_{n+m} + C(n)\delta_{n,-m}\,.$$

a) Pokazati da je $C(-n) = -C(n)$.
b) Dokazati relaciju $C(3n) + 5C(n) - 4C(2n) = 0$ koristeći Jakobijev identitet pri $n = 2m$.
c) Ako je $C(n)$ polinom, onda mora biti $C(n) = c_1 n + c_3 n^3$. Dokazati.
d) Izračunati c_1 i c_3 direktno iz vrednosti $[\hat{L}_n, \hat{L}_{-n}]$ u Fokovom vakuumu, za $n = 1, 2$.

7. U slučaju gradijentnog uslova svetlosnog konusa, hamiltonijan ima oblik koji se dobija iz (11.28*b*) zamenom $\eta_{\mu\nu} \to -\delta_{\alpha\beta}$: $H = \frac{1}{2}\sum_r a_r^\alpha a_{-r}^\beta \delta_{\alpha\beta}$, gde je $\alpha, \beta = 1, 2, ..., D-2$.
a) Pokazati da važi relacija $H = {:}H{:} - \alpha_0$, gde je $\alpha_0 \equiv -\frac{1}{2}(D-2)\sum_{r>0} r$.
b) Koristeći definiciju Rimanove ζ funkcije naći regularizovanu vrednost sume $\sum_{r>0} r$. Pokazati da iz $D = 26$ sledi $\alpha_0 = 1$.

8. Pokazati da je $[\hat{L}_n, M^{\mu\nu}] = 0$ koristeći reprezentaciju Fokovog prostora.

9. Neka je $T(\sigma_0) = \exp[2\sigma_0(L_0 - \tilde{L}_0)]$. Naći smisao transformacije $T(\sigma_0)$ izračunavanjem izraza $T(\sigma_0)x(\sigma)T(-\sigma_0)$ u kvantnoj mehanici zatvorene strune.

10. Dokazati da je uslov $\hat{L}_n\psi = 0$, za svako n, u konfliktu sa komutacionim relacijama Virazorove algebre.

11. Dato je stanje $\psi = -i\varepsilon\cdot a_1^+\Phi^{(0)}(p)$, gde je $\Phi^{(0)}(p)$ Furijeov transform Fokovog vakuuma. Dokazati:
a) Norma stanja ψ je negativna ako je $\varepsilon^2 > 0$.
b) Iz uslova $L_1\psi = 0$ sledi $\varepsilon\cdot p = 0$.
c) Iz uslova $(L_0 - \alpha_0)\psi = 0$ sledi da stanje ψ ima negativnu normu ako je $\alpha_0 > 1$.

12. Neka je $\psi = [a_1^+ \cdot a_1^+ + \beta a_0 \cdot a_2^+ + \gamma(a_0 \cdot a_1^+)^2]\Phi^{(0)}(p)$.
    a) Koristeći Virazorove uslove i $\alpha_0 = 1$ naći vrednosti veličina p^2, β i γ.
    b) Izračunati normu stanja ψ, i pokazati da je ona negativna pri $D > 26$.
13. *a*) Pokazati da Virazorovi uslovi (B) za otvorenu strunu pri $n = 1, 2$ imaju oblik (11.47).
    b) Pokazati da odgovarajuće transformacije simetrije imaju oblik (11.48).
14. Naći izraz za $K\psi$ na prvom pobudjenom nivou otvorene strune, pa odatle izvesti dejstvo za elektrodinamiku.
15. Izvesti gradijentne uslove (11.53) i transformacije simetrije (11.55) u teoriji zatvorene strune.
16. Izvesti oblik dejstva zatvorene strune (11.56), a zatim dokazati da se ono može napisati u obliku (11.60).

DODATK

A. TEORIJA LOKALNIH UNUTRAŠNJIH SIMETRIJA

U ovom dodatku su izložene neke karakteristike teorija sa lokalnom unutrašnjom simetrijom, koje su posebno interesantne sa gledišta uopštenja na lokalne prostorno–vremenske simetrije (Utijama, 1956; Kibble, 1961; Abers i Lee, 1973).

Lokalizacija unutrašnjih simetrija. Posmatrajmo višekomponentno polje materije $\phi(x)$ koje se transformiše po nekoj reprezentaciji Lijeve grupe unutrašnjih simetrija G:

$$\begin{aligned}&\phi'(x) = \phi(x) + \delta_0\phi(x),\\ &\delta_0\phi(x) = \theta^a T_a\phi(x) \equiv \theta\phi(x) \qquad (a = 1, 2, ..., n)\,.\end{aligned} \tag{A.1}$$

Ovde su θ^a beskonačno mali *konstantni* parametri, T_a su generatori grupe koji zadovoljavaju komutacione relacije

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c\,, \tag{A.2a}$$

a strukturne konstante $f_{ab}{}^c$ zadovoljavaju Jakobijev identitet:

$$f_{ae}{}^m f_{bc}{}^e + (a, b, c) = 0\,, \tag{A.2b}$$

gde (a, b, c) označava članove dobijene cikličnom permutacijom. Pošto su parametri θ^a konstantni, izvod polja se transformiše po istom zakonu kao i samo polje,

$$\delta_0\partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\delta_0\phi(x) = \theta\partial_\mu\phi(x)\,,$$

jer operacije variranja forme polja i diferenciranja po x komutiraju. Dinamiku polja $\phi(x)$ odredjuje dejstvo $I = \int d^4x \mathcal{L}_M(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$. Invarijantnost dejstva u odnosu na posmatrane transformacije je izražena uslovom

$$\delta_0 \mathcal{L}_M \equiv \mathcal{L}_M(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}_M(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = 0\,,$$

koji, zbog nezavisnosti parametara θ^a, daje n identiteta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} T_a \phi + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \phi} T_a \partial_\mu \phi = 0\,. \tag{$A.3$}$$

Ovi uslovi, uz korišćenje jednačina kretanja

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \phi} = 0\,,$$

dovode do zakona održanja kanonske struje:

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0\,, \qquad J_a^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \phi} T_a \phi\,. \tag{$A.4$}$$

Ako sada posmatramo transformacije (A.1a) sa parametrima koji su *funkcije* koordinata, $\theta^a = \theta^a(x)$, uslov invarijantnosti dejstva nije ispunjen, jer se menja zakon transformacije izvoda polja:

$$\delta_0 \partial_\mu \phi = \theta \partial_\mu \phi + \theta_{,\mu} \phi\,.$$

Zaista, direktan račun daje

$$\delta_0 \mathcal{L}_M = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu \phi} \theta_{,\mu} \phi = -\theta^a_{,\mu} J_a^\mu\,.$$

Problem neinvarijantnosti u odnosu na lokalne transformacije može se rešiti odredjenom modifikacijom početne teorije. Uvedimo novi lagranžijan

$$\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M(\phi, D_\mu \phi)\,, \tag{$A.5$}$$

gde je $D_\mu \phi$ *kovarijantni izvod* koji se transformiše na isti način u odnosu na lokalne transformacije kao običan izvod u odnosu na globalne:

$$\delta_0 D_\mu \phi = \theta D_\mu \phi\,. \tag{$A.6$}$$

Sada se lako vidi, uz pomoć uslova (A.3), da je lagranžijan $\mathcal{L}'_M$ invarijantan u odnosu na lokalne transformacije:

$$\delta_0 \mathcal{L}'_M = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \phi} \theta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\mu \phi} \theta D_\mu \phi = 0\,.$$

Kovarijantni izvod se konstruiše uvodjenjem *kompenzacionih polja* (gradijentnih potencijala) A_μ,

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi\,, \qquad A_\mu \equiv T_a A^a{}_\mu\,, \tag{A.7}$$

čiji je zakon transformacije odredjen uslovom (A.6):

$$\delta_0 A^a_\mu = \big(-\theta_{,\mu} + [\theta, A_\mu]\big)^a = -\theta^a_{,\mu} + f_{bc}{}^a\theta^b A^c{}_\mu\,. \tag{A.8}$$

Komutator dva kovarijantna izvoda ima oblik

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = F^a{}_{\mu\nu}T_a\phi \equiv F_{\mu\nu}\phi\,,$$

gde je $F_{\mu\nu}$ *jačinu polja*,

$$\begin{aligned} F^a{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + f_{bc}{}^a A^b{}_\mu A^c{}_\nu \\ &= \big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\big)^a\,, \end{aligned} \tag{A.9}$$

koja se transformiše po pravilu

$$\delta_0 F^a{}_{\mu\nu} = f_{bc}{}^a\theta^b F^c{}_{\mu\nu} = [\theta, F_{\mu\nu}]^a\,.$$

Oblik kovarijantnog izvoda $D_\mu\phi$ je odredjen zakonom transformacije $\delta_0\phi$. Analogono se, na osnovu zakona transformacije za $F_{\mu\nu}$, definiše odgovarajući kovarijantni izvod:

$$D_\lambda F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\lambda F^a{}_{\mu\nu} + f_{bc}{}^a A^b{}_\lambda F^c{}_{\mu\nu} \equiv \big(\partial_\lambda F_{\mu\nu} + [A_\lambda, F_{\mu\nu}]\big)^a\,.$$

Polazeći od Jakobijevog identiteta za komutator kovarijantnih izvoda dobija se Bjankijev identitet za $F_{\mu\nu}$:

$$D_\lambda F^a{}_{\mu\nu} + D_\nu F^a{}_{\lambda\mu} + D_\mu F^a{}_{\nu\lambda} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad D_\mu{}^* F^a{}_{\mu\nu} = 0\,,$$

gde je ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$ dualni tenzor od $F_{\mu\nu}$.

Uvodjenjem gradijentnih potencijala postignuta je lokalna invarijantnost lagranžijana materije. Sledeći korak u izgradnji kompletne teorije je konstruisanje slobodnog lagranžijana $\mathcal{L}_F(A, \partial A)$ za nova polja A_μ, koji, takodje, treba da bude lokalno invarijantan. Ako u uslovu invarijantnosti

$$\delta_0\mathcal{L}_F = \frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial A^a{}_\mu}\delta_0 A^a{}_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial A^a{}_{\mu,\nu}}\delta_0 A^a{}_{\mu,\nu} = 0\,,$$

koeficijente uz $\theta^b, \theta^b_{,\mu}$ i $\theta^b_{,\mu\nu}$ izjednačimo sa nulom, dobijaju se identiteti

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^a{}_\mu} f_{bc}{}^a A^c{}_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^a{}_{\mu,\nu}} f_{bc}{}^a A^c{}_{\mu,\nu} = 0\,, \tag{A.10a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^b{}_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^a{}_{\mu,\nu}} f_{bc}{}^a A^c{}_\nu = 0\,, \tag{A.10b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^b{}_{\mu,\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^b{}_{\nu,\mu}} = 0\,. \tag{A.10c}$$

Iz zadnjeg identiteta sledi da izvod od A_μ figuriše u $\mathcal{L}_F$ samo u antisimetričnoj kombinaciji $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Uslov $(A.10b)$ daje tačan oblik te kombinacije u formi jačine polja $F_{\mu\nu}$. Iz istog uslova se može zaključiti da je $\partial\mathcal{L}_F/\partial A_\mu = 0$ kad je $F_{\mu\nu}$ =const., što znači da nema druge zavisnosti od A_μ osim preko $F_{\mu\nu}$. Prvi identitet znači da je $\mathcal{L}_F$ invarijantna funkcija od $F_{\mu\nu}$. Zaista, nakon eliminacije $\partial\mathcal{L}_F/\partial A_\mu$ uz pomoć (A.10b) i korišćenja Jakobijevog identiteta (A.2b), iz relacije (A.10a) sledi

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial F^a{}_{\mu\nu}} f_{cb}{}^a F^b{}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial F^a{}_{\mu\nu}} \delta_0 F^a{}_{\mu\nu} = 0\,.$$

Ako zahtevamo da jednačine kretanja ne sadrže izvode više od drugog reda, onda je $\mathcal{L}_F$ kvadratična invarijanta,

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4g^2} g_{ab} F^a{}_{\mu\nu} F^{b\mu\nu}\,, \tag{A.11}$$

gde je g je konstanta interakcije, a g_{ab} Kartanova metrika Lijeve algebre grupe G, kao što ćemo uskoro pokazati. Faktor g^{-2} se može lako eliminisati reskaliranjem gradijentnih polja $A^a{}_\mu \to gA^a{}_\mu$, ali se onda konstanta g pojavljuje u kovarijantnom izvodu.

Na osnovu oblika lagranžijana $\mathcal{L}'_M$ u (A.5), jednačine kretanja za polje materije ϕ mogu se napisati u obliku

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial \phi} - D_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial D_\mu \phi} = 0\,,$$

gde se kovarijantni izvod od $K^\mu \equiv \partial\mathcal{L}_M/\partial D_\mu\phi$ definiše na osnovu činjenice da se K^μ transformiše kontravarijantno u odnosu na ϕ: $\delta_0 K^\mu = -\theta K^\mu$. Koristeći ove jednačine, uslov invarijantnosti (A.8) daje "zakon održanja" *kovarijantne struje* J'^μ_a:

$$\begin{aligned} & D_\mu J'^\mu_a \equiv \partial_\mu J'^\mu_a + f_{ab}{}^c A^b{}_\mu J'^\mu_c = 0\,, \\ & J'^\mu_a \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial D_\mu \phi} T_a \phi = -\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial A^a{}_\mu}\,. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Naravno, ovaj uslov ne predstavlja pravi zakon održanja, za koji je potrebno da obična četvorodivergencija neke veličine bude jednaka nuli. Kovarijantna struja se transformiše kontravarijantno, tj. po pravilu

$$\delta_0 J'^{\mu}_a = f_{ab}{}^c \theta^b J'^{\mu}_c \,,$$

na osnovu čega je i definisan njen kovarijantni izvod.

Kompletan lagranžijan teorije $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}'_M$ daje sledeću jednačinu kretanja za A_μ:

$$D_\mu F_a{}^{\mu\nu} = J'^{\nu}_a \,. \qquad (A.13)$$

Ovde je $F_a \equiv g_{ab} F^b$, a zbog jednostavnosti smo stavili $g = 1$. Ako se ova jednačina napiše u obliku

$$\partial_\mu F_a{}^{\mu\nu} = J'^{\nu}_a + j^{\nu}_a \,, \qquad j^{\nu}_a \equiv -f_{ab}{}^c A^b{}_\mu F_c{}^{\mu\nu} \,,$$

vidi se, zbog antisimetrije $F^{\mu\nu}$, da važi *pravi* zakon održanja:

$$\partial_\nu (J'^{\nu}_a + j^{\nu}_a) = 0 \,.$$

Pošto j^{ν}_a nije kovarijantna veličina, pravi zakon održanja je dobijen na račun kovarijantnosti održane struje.

Konstrukcija invarijantnog lagranžijana. Sada ćemo pokazati kako se konstruiše kvadratična invarijanta od jačine polja F^a. Pomenimo, najpre, dve činjenice iz teorije Lijevih algebri, koje se često koriste u teoriji lokalnih simetrija. Prvo, iz Jakobijevog identiteta za generatore T_a,

$$[T_a, [T_b, T_c]] + (a, b, c) = 0 \,, \qquad (A.14)$$

sledi relacija ($A.2b$), koja se, takodje, naziva Jakobijev identitet. Drugo, uvek postoji reprezentacija Lijeve algebre koja je potpuno odredjena strukturnim konstantama, $(T'_a)^b{}_c = f_{ac}{}^b$, i naziva se pridružena reprezentacija. Da je ovo, zaista, reprezentacija, sledi iz relacije

$$[T'_a, T'_b]^c{}_d = f_{ab}{}^e (T_e)^c{}_d \,,$$

koja se lako proverava uz pomoć ($A.2b$). Ako se zakon transformacije za F^a napiše u obliku

$$\delta_0 F^a = \theta^b (T'_b)^a{}_c F^c \,, \qquad (A.15a)$$

vidi se da se jačina polja F^a transformiše kovarijantno, tj. na isti način kao i polje ϕ. Od dve veličine G_a i F^a (prostorno–vremenske indekse ćemo, zbog jednostavnosti, izostaviti) može se napraviti bilinearna invarijanta $G_a F^a$, ukoliko se G_a transformiše kontravarijantno, tj. kao

$$\delta_0 G_a = -\theta^b f_{ba}{}^c G_c \,. \qquad (A.15b)$$

Ako nas interesuje konstruisanje invarijante koja je kvadratična po F^a, to se može postići izborom

$$G_a = g_{ab}F^b \equiv F_a\,,$$

gde je g_{ab} Kartanova metrika Lijeve algebre:

$$g_{ab} = -\tfrac{1}{2}Tr(T'_a T'_b) = -\tfrac{1}{2}f_{ae}{}^c f_{bc}{}^e\,. \qquad (A.16)$$

Pokazaćemo da se pri ovakvom izboru metrike F_a zaista transformiše kontravarijantno. Ako se u izrazu

$$\delta_0 F_a = g_{ab}\delta_0 F^b = -\tfrac{1}{2}f_{ae}{}^c f_{bc}{}^e f_{df}{}^b \theta^d F^f$$

iskoristi Jakobijev identitet, dobija se $\delta_0 F_a = \frac{1}{2}f_{ae}{}^c(f_{bf}{}^e f_{cd}{}^b + f_{bd}{}^e f_{fc}{}^b)\theta^d F^f$. Koristeći ponovo Jakobijev identitet u prvom članu ovog izraza, nastaje relacija koja daje traženi rezultat: $\delta_0 F_a = -\theta^b f_{ba}{}^c F_c$.

Ako se $f_{ab}{}^c$ smatra tenzorom trećeg ranga sa transformacionim zakonom odredjenim položajem njegovih indeksa, onda je $f_{ab}{}^c$ konstantan i invarijantan tenzor, jer je

$$\delta_0 f_{ab}{}^c = (f_{ed}{}^c f_{ab}{}^d - f_{eb}{}^d f_{ad}{}^c - f_{ea}{}^d f_{db}{}^c)\theta^e = 0$$

zbog Jakobijevog identiteta. To je u skladu sa kovarijantnim karakterom veličine F_a.

Ako je grupa G *poluprosta*, tj. ako ne sadrži netrivijalnu Abelovu podgrupu, onda je $\det(g_{ab}) \neq 0$. Tada postoji inverzna metrika g^{ab}, pa se može konstruisati standardna tenzorska algebra.

Poluprosta podgrupa G je *kompaktna* ako i samo ako je Kartanov metrički tenzor pozitivno (ili negativno) definitan. U tom slučaju pogodnim izborom bazisa metrika g_{ab} se može dovesti na oblik jediničnog tenzora, $g_{ab} = \delta_{ab}$, a strukturne konstante $f_{ab}{}^c$ su potpuno antisimetrične veličine.

Razmotrićemo dva primera konstrukcije Kartanovog metričkog tenzora. U slučaju rotacione grupe komponente $f_{ab}{}^c$ su potpuno antisimetrične, $f_{ab}{}^c = -\epsilon_{abc}$, pa je

$$g_{ab} = -\tfrac{1}{2}\epsilon_{aef}\epsilon_{bfe} = \delta_{ab}\,, \qquad g_{ab}F^a F^b = \delta_{ab}F^a F^b\,.$$

Drugi primer je Lorencova grupa. Strukturne konstante su definisane relacijom (2.6). Kartanov metrički tenzor ima oblik

$$g_{ij,kl} = -\tfrac{1}{8}f_{ij,rm}{}^{sn} f_{kl,sn}{}^{rm} = 2(\eta_{ik}\eta_{jl} - \eta_{il}\eta_{jk})\,,$$

pa kvadratična invarijanta postaje $g_{ij,kl}F^{ij}F^{kl} = 4F^{ij}F_{ij}$.

Zadaci

1. Dokazati Bjankijev identitet $D_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0$ polazeći od Jakobijevog identiteta za operator D_μ.
2. Pokazati da jednačine kretanja za polje materije ϕ koje se dobijaju iz lagranžijana $\mathcal{L}'_M$ imaju G–kovarijantan oblik:

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial \phi} - D_\mu \frac{\partial \mathcal{L}'_M}{\partial D_\mu \phi} = 0\,.$$

3. Naći zakon transformacije kovarijantne struje $J'^{\mu}_a = -(\partial \mathcal{L}_M / \partial D_\mu \phi) T_a \phi$.
4. Na osnovu važenja jednačina kretanja za polje materije dokazati "zakon održanja" kovarijantne struje: $D_\mu J'^{\mu}_a = 0$.
5. Dokazati, koristeći Jakobijev identitet, da je veličina $f_{abc} = f_{ab}{}^e g_{ce}$ totalno antisimetrična.
6. Dokazati da je lagranžijan $\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} g_{ab} F^a F^b$ invarijantna veličina.
7. Data je Lijeva grupa G (generatori T_a) koja sadrži netrivijalnu Abelovu podgrupu (generatori T_α). Pokazati da je Kartanov metrički tenzor singularan, jer zadovoljava uslov $g_{\alpha\beta} = 0$.

B. DIFERENCIJABILNE MNOGOSTRUKOSTI

Da bismo geometrijsku osnovu lokalnih prostorno–vremenskih simetrija učinili što jasnijom, daćemo kratak pregled matematičke strukture diferencijabilnih mnogostrukosti (Misner, Thorne i Wheeler, 1970; Choquet–Bruhat, de Witt–Morette i Dillard–Bleick, 1977).

Topološki prostor. Jedan od osnovnih pojmova matematičke analize je operacija graničnog prelaza, koja je zasnovana na činjenici da je na realnoj pravoj odredjeno rastojanje izmedju dve tačke. Mnogi važni rezultati se dobijaju samo na osnovu postojanja rastojanja. Uopštavanjem slike realne prave kao skupa u kome je uvedeno rastojanje dolazi se do pojma metričkog prostora. *Metrički prostor* je skup X na kome je definisano rastojanje dve tačke kao realna funkcija koja zadovoljava odredjene uslove. Metrički prostori su uopštenje euklidskih prostora. Njihovim izučavanjem postaje jasno da se suština operacije graničnog prelaza nalazi u pojmu okoline, ili otvorenog skupa. Tako se uopštenjem metričkog prostora dolazi do topološkog prostora, u kome je pojam okoline uveden direktno, i koji predstavlja prirodnu strukturu za proučavanje neprekidnosti.

Neka je X neki skup (čije ćemo elemente zvati tačkama), i neka je $\tau = \{O_\alpha\}$ kolekcija podskupova od X. Kolekcija τ definiše *topologiju* u X ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1) prazan skup $\emptyset$ i ceo skup X pripadaju τ;
2) proizvoljna unija $\cup_\alpha O_\alpha$ (konačna ili beskonačna) elemenata iz τ pripada τ;
3) svaki konačan presek $\cap_{\alpha=1}^n O_\alpha$ elemenata iz τ pripada τ.

Skup X sa zadatom topologijom τ, tj. par (X, τ), naziva se *topološkim prostorom*, i često se, skraćeno, označava sa X. Skupovi O_α iz τ su *otvoreni skupovi* topološkog prostora, dok se njihovi komplementi $X \backslash O_\alpha$ nazivaju *zatvoreni*.

Jasno je da se u jednom istom skupu X mogu uvesti razne topologije, i time definisati različiti topološki prostori. Jedan od mogućih načina uvodjenja topologije je zadavanjem *baze*, tj. zadavanjem kolekcije B otvorenih podskupova, takvih da se svaki otvoren skup u X može izraziti kao unija elemenata iz B. Uobičajena topologija na realnoj pravoj $\mathcal{R}$ definisana je bazom koja se sastoji od svih otvorenih intervala (a, b) (vidi primer III.3), u euklidskoj ravni baza se može definisati kao kolekcija svih dvodimenzionih otvorenih "kugli", itd. Ova konstrukcija baze ima jednostavno uopštenje na proizvoljan metrički prostor.

Kolekcija $\{U_\alpha\}$ otvorenih skupova iz X naziva se *otvoren pokrivač* ako je njihova unija jednaka X. Na podskupu Y topološkog prostora X može se definisati *indukovana topologija*, ako se za otvorene skupove u Y uzmu svi skupovi oblika $Y \cap O_\alpha$, gde je O_α otvoren u X.

Okolina tačke P topološkog prostora X je svaki otvoren skup O_P koji sadrži tačku P. Pojam okoline je ovde baziran na postojanju otvorenih skupova (a ne na pojmu rastojanja, kako nam sugeriše iskustvo sa metričkim prostorima). Slično se definiše i okolina podskupa od X. Posle toga se prirodno može uvesti *neprekidno preslikavanje* topoloških prostora (preslikavanje $f:\ X \to Y$ je neprekidno ako je inverzna slika svakug otvorenog skupa u Y otvoren skup u X), a onda i pojam homeomorfizma.

Preslikavanje $f : X \to Y$ topološkog prostora X na topološki prostor Y naziva se *homeomorfizam* ako je

i) uzajamno jednoznačno (1–1), i

ii) uzajamno neprekidno (f i f^{-1} su neprekidne funkcije).

Homeomorfni prostori imaju identične topološke osobine.

Mada topološki prostor prirodno uopštava mnoge osobine metričkog prostora, njegova struktura je, često, previše opšta. Da bi se medju topološkim prostorima izdvojili oni koji su po svojim osobinama interesantni sa gledišta izučavanja odredjenih matematičkih i fizičkih problema, uvode se izvesni dopunski uslovi. U takve uslove spadaju osobine povezanosti, aksiome prebrojivosti i aksiome razdvajanja. Nekoliko primera:

– topološki prostor je *povezan* ako se ne može predstaviti kao unija dva otvorena (neprazna) podskupa koji se ne seku;
– topološki prostor je *Hausdorfov* ako u njemu bilo koje dve različite tačke imaju okoline koje se ne seku (razdvojene su);
– topološki prostor može imati prebrojivu bazu;
– topološki prostor je *kompaktan* ako se iz svakog pokrivača može izdvojiti konačan potpokrivač (podskup koji je, takodje, pokrivač).

Ne ulazeći u prirodu raznih dodatnih uslova smatraćemo da su oni ispunjeni u onoj meri u kojoj je to potrebno za sva naša razmatranja.

Diferencijabilna mnogostrukost. Topološki prostor je prirodna struktura za proučavanje neprekidnosti, ali ne i diferencijabilnosti. Uopštenje predstave dvodimenzione površi, koja u svakoj svojoj tački ima tangentnu ravan, postaje moguće uvodjenjem diferencijabilne mnogostrukosti.

Hausdorfov topološki prostor X postaje (topološka) *mnogostrukost* ako svaka njegova tačka x ima okolinu koja je homeomorfna sa otvorenim skupom prostora $\mathcal{R}^n$. Veličina n se naziva *dimenzijom* mnogostrukosti. Dakle, mnogostrukost je skup sastavljen od delova koji "liče" na otvorene podskupove od $\mathcal{R}^n$. Koristeći ovu sličnost, na mnogostrukosti X se mogu definisati *lokalni koordinatni sistemi* (ili karte). Označićemo sa $\{O_i\}$ pokrivač od X, i neka su φ_i homeomorfizmi skupova O_i na oblasti Ω_i prostora $\mathcal{R}^n$, $\varphi_i : O_i \to \Omega_i$. Tada je lik svake tačke P iz O_i tačka $\varphi_i(P) = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n)$ iz $\mathcal{R}^n$, a x_i^μ se nazivaju lokalne koordinate tačke P. Kolekcija svih lokalnih koordinatnih sistema (O_i, φ_i) definiše koordinatni sistem, ili atlas, na X.

U svakom preseku $O_{ij} = O_i \cap O_j$ odredjena su dva lokalna sistema koordinata, (x_i^μ) i (x_j^μ), pa se postavlja pitanje njihove kompatibilnosti. Topološki prostor X je *diferencijabilna mnogostrukost* klase C^m ako je funkcija zamene koordinata $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (x_i^\mu) \to (x_j^\mu)$ glatka funkcija klase C^m (neprekidna i ima neprekidne izvode do reda m), za svaki par (O_i, O_j).

Posle uvodjenja lokalnih koordinatnih sistema, na mnogostrukosti se može definisati pojam diferencijabilnosti preslikavanja. Posmatrajmo preslikavanje $f : X \to Y$, i označimo sa x_0^μ i y_0^μ lokalne koordinate tačaka $P \in X$ i $f(P) \in Y$, redom. Preslikavanje f se može realizovati kao preslikavanje koordinata, $x \mapsto y$. Funkcija f je *diferencijabilna* u tački $P \in X$ ako je koordinatno diferencijabilna, tj. ako su koordinate lika y diferencijabilne funkcije koordinata originala x u tački $x = x_0$. Na sličan način se definiše *glatko* preslikavanje. Diferencijabilnost i glatkost funkcije imaju smisla samo ako ne zavise od izbora lokalnog koordinatnog sistema, što je tačno u slučaju diferencijabilne mnogostrukosti. Pojam diferencijabilnosti omogućava uopštenje homeomorfnih preslikavanja na difeomorfizme.

Preslikavanje $f : X \to Y$ mnogostrukosti X na mnogostrukost Y se naziva *difeomorfizam* ako je

i) uzajamno jednoznačno (1–1), i

ii) uzajamno glatko (f i f^{-1} su glatke funkcije klase C^r, $r \leq m$).

Difeomorfne mnogostrukosti imaju identičnu strukturu kao diferencijabilne mnogostrukosti. Difeomorfizmi su za diferencijabilne mnogostrukosti isto što i homeomorfizmi za topološke prostore.

Tangentni vektori. Posmatrajmo glatku krivu $C(\lambda)$ na mnogostrukosti X, koja je zadata glatkim preslikavanjem $C : \mathcal{R} \to X$. *Tangentni vektor* na krivu $C(\lambda)$ u tački $P = C(0)$ može se definišati izrazom

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{C(\lambda) - C(0)}{\lambda} = \frac{dC(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} . \qquad (B.1)$$

U slučaju dvodimenzione površi X_2 uronjene u $\mathcal{R}^3$ ovako definisan tangentni vektor se intuitivno može predstaviti kao vektor koji leži u tangentnoj ravni u tački $C(0)$. No, pojmovi "beskonačno malo pomeranje", $C(\lambda) - C(0)$, i tangentna ravan nemaju odredjen geometrijski smisao u samoj mnogostrukosti. Ako zamislimo da je mnogostrukost X uronjena u neki višedimenzioni euklidski prostor $\mathcal{R}^n$, onda je geometrijski smisao svih objekata potpuno odredjen, ali definicija zavisi od uronjavanja X u $\mathcal{R}^n$.

Da bi se tangentni vektor definisao preko unutrašnje strukture mnogostrukosti (i izbegla potreba uronjavanja u euklidski prostor), umesto "pomeranja" tačke (koje "izlazi" iz X) treba posmatrati promene nekih veličina koje su uvek dobro definisane u X, kao što su diferencijabilne funkcije $f : X \to \mathcal{R}$. U izrazu za promenu funkcije, $df/d\lambda$, deo koji ne zavisi od f je operacija $d/d\lambda$, pa se tangentni vektor na krivu $C(\lambda)$ u tački $P = C(0)$ definiše kao *diferencijalni operator*

$$\boldsymbol{v} = \frac{d}{d\lambda}\,, \qquad (B.2a)$$

sračunat u $\lambda = 0$. Ovaj operator vrši preslikavanje diferencijabilnih funkcija f u $\mathcal{R}$ po pravilu

$$\boldsymbol{v}(f) = \frac{d}{d\lambda}(f \circ C)\Big|_{C(0)}\,. \qquad (B.2b)$$

Skup svih diferencijalnih operatore tipa $(B.2)$ u tački P ima strukturu vektorskog prostora u odnosu na uobičajenu definiciju sabiranja i množenja skalarom,

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)(f) = \boldsymbol{v}_1(f) + \boldsymbol{v}_2(f)\,, \\ &(a\boldsymbol{v})(f) = a\boldsymbol{v}(f)\,, \end{aligned}$$

i naziva se *tangentni prostor* T_P mnogostrukosti X u P. Diferencijalni operatori $\boldsymbol{v} \in T_P$ su linearni i zadovoljavaju Lajbnicovo pravilo (ove dve osobine se mogu uzeti za definicione osobine tangentnog vektora). Na ovaj način je pojmu "beskonačno malog pomeranja" dat precizan matematički smisao, ali nije odmah jasno u kom smislu su diferencijalni operator $(B.2)$ i tangentni vektor $(B.1)$ iste veličine. Medjutim, nije teško videti da su strukture odredjene vektorima tipa $(B.1)$ i diferencijalnim operatorima $(B.2)$ *izomorfni* vektorski prostori (dva vektorska prostora su izomorfna ako medju njima postoji preslikavanje koje je 1–1 i na, i koje je saglasno sa odgovarajućim operacijama sabiranja vektora i množenja skalarom). Na primer, linearna kombinacija vektora $(B.1)$ indukuje istu takvu relaciju medju diferencijalnim operatorima $(B.2)$, i obratno:

$$\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u}(f) = a\boldsymbol{v}_1(f) + b\boldsymbol{v}_2(f)\,.$$

Tako vidimo da diferencijalni operatori $(B.2)$ predstavljaju jednu apstraktnu realizaciju uobičajenog pojma tangentnog prostora.

Posmatrajmo koordinatnu liniju x^μ u $\mathcal{R}^n$, i krivu $\varphi_i^{-1}:\ x^\mu \to X$ koja sadrži P. Tangentni vektor na krivu $\varphi_i^{-1}(x^\mu)$

$$\boldsymbol{e}_\mu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f\circ\varphi_i^{-1})\Big|_{x^\mu(P)} \tag{$B.3a$}$$

se naziva koordinatni tangentni vektor. Vektori $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n)$ su linearno nezavisni, i svaki vektor $\boldsymbol{v} \in T_P$ se može izraziti kao linearna kombinacija vektora $\boldsymbol{e}_\mu$,

$$\boldsymbol{v}(f) = v^\mu \boldsymbol{e}_\mu(f)\,, \tag{$B.3b$}$$

gde se po ponovljenom indeksu sumira. Odatle sledi $\dim(T_P) = n$. Skup vektora $\boldsymbol{e}_\mu$ definiše *koordinatnu bazu* u T_P, a veličine v^μ u $(B.3a)$ se nazivaju komponente vektora $\boldsymbol{v}$ u lokalnom koordinatnom sistemu x^μ. Često se $\boldsymbol{e}_\mu$ označava prosto sa $\partial/\partial x^\mu$. Ako se predje na nove koordinate x'^μ, onda se na isti način dobija nova koordinatna baza $\boldsymbol{e}'_\mu$, koja je sa starom povezana relacijom

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\boldsymbol{e}_\nu\,, \tag{$B.4a$}$$

dok je odgovarajuća veza starih i novih komponenti vektora $\boldsymbol{v}$ oblika

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\,v^\nu\,. \tag{$B.4b$}$$

Ova jednačina je poznata kao *zakon transformacije vektora* ("vektor je veličina koja se transformiše kao vektor"), i ona se može uzeti za definiciju vektora. Vektori $\boldsymbol{v} = (v^\mu)$ se često nazivaju kontravarijantni vektori.

Vektorsko polje V_X na X je pridruživanje tangentnog vektora $\boldsymbol{v}_P$ svakoj tački P iz X. Mada postojeća struktura diferencijabilne mnogostrukosti ne omogućava da se porede tangentni vektori u različitim tačkama, postoji prirodan način da se ispita glatkost vektorskog polja pri prelazu od jedne do druge tačke. Svakoj tački P iz X može se pridružiti realan broj $\boldsymbol{v}_P(f)$, gde je f glatko preslikavanje $X \to \mathcal{R}$. Vektorsko polje V_X je *glatko* ako je preslikavanje $\boldsymbol{v}_P(f)$ glatka funkcija na X. Na jeziku koordinata, vektorsko polje je glatko ako su mu komponente $v^\mu(x)$ glatke funkcije.

Dualni vektori. Svakom tangentnom prostoru T_P se može pridružiti *dualan* vektorski prostor T_P^* na način koji je uobičajen u linearnoj algebri. Posmatrajmo linearna preslikavanja $\boldsymbol{w}^*$ vektora iz T_P u skup realnih brojeva, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{v}) \in \mathcal{R}$. Ako se u skupu ovih preslikavanja definiše sabiranje i množenje skalarom na prirodan način, dobija se struktura dualnog vektorskog prostora T_P^*. Vektori $\boldsymbol{w}^*$ iz T_P^* se nazivaju dualni vektori, kovarijantni vektori (kovektori) ili diferencijalne forme. Ne postoji prirodan izomorfizam izmedju tangentnog i dualnog vektorskog prostora u P. Medjutim, ako je $\boldsymbol{e}_b$ proizvoljna baza u T_P, onda se dualna baza $\boldsymbol{\theta}^a$ u T_P^* može zadati tako da bude $\boldsymbol{\theta}^a(\boldsymbol{v}) = v^a$, iz čega se dobija

$$\boldsymbol{\theta}^a(\boldsymbol{e}_b) = \delta^a_b \,.$$

Odavde sledi, specijalno, da je $\dim(T^*_P) = \dim(T_P)$. Korespodencija $\boldsymbol{\theta}^a \leftrightarrow \boldsymbol{e}_a$ je izomorfizam, ali ovaj izomorfizam nije zasnovan na povezivanju geometrijskih struktura, već zavisi od izbora baze $\boldsymbol{e}_a$, pa se zato prostori T_P i T^*_P ne mogu identifikovati na prirodan (geometrijski) način bez uvodjenja dodatne strukture na X.

Prostor T^{**}_P je izomorfan sa T_P. Tvrdjenje sledi iz činjenice da se svakom vektoru $\boldsymbol{u}^{**}$ iz T^{**}_P može pridružiti vektor $\boldsymbol{u}$ iz T_P, takav da važi $\boldsymbol{u}^{**}(\boldsymbol{w}^*) = \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{u})$, za svaki $\boldsymbol{w}^* \in T^*_P$.

Neka je baza $\boldsymbol{\theta}^\mu$ dualna koordinatnoj bazi $\boldsymbol{e}_\nu$. Svaka forma $\boldsymbol{w}^* \in T^*_P$ se u ovoj bazi može predstaviti u obliku

$$\boldsymbol{w}^* = w^*_\mu \boldsymbol{\theta}^\mu \,. \tag{B.5a}$$

Pri prelazu na drugi lokalni koordinatni sistem, bazisni vektori $\boldsymbol{\theta}^\mu$ i komponente w^*_μ se transformišu po pravilu

$$\boldsymbol{\theta}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{\theta}^\nu \,, \qquad w^{*\prime}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} w^*_\nu \,. \tag{B.5b}$$

Oznaka $*$ za dualne vektore se obično izostavlja pri korišćenju standardne konvencije, po kojoj komponente vektora imaju indekse dole, a komponente dualnih vektora $-$ gore.

Kovarijantno vektorsko polje V^*_X na X se definiše po analogiji sa V_X.

Tenzori. Kao što se dualni vektor definiše preslikavanjem tangentnog vektorskog prostora u skup realnih brojeva, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{v}) \in R$, tako se i tangentni vektor može definisati kao preslikavanje dualnog vektorskog prostora u skup realnih brojeva, $\boldsymbol{w}^* \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}^*) \in \mathcal{R}$, gde je $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}^*) = \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{v})$. Ova opservacija je korisna za definiciju tenzora. Predjimo sada na razmatranje nekih ilustrativnih primera.

Posmatrajmo najpre *Dekartov proizvod* $D_P(0,2) = T^*_P \times T^*_P$ dva dualna prostora u P. Svaki element iz $D_P(0,2)$ je bilinearna forma $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*)$ koja preslikava $T_P \times T_P \to \mathcal{R}$, pri čemu je $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ linearna funkcija od $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in T_P$. Prostor $D_P(0,2)$ je vektorski prostor sa uobičajenom definicijom sabiranja i množenja skalarom. Ako je $\boldsymbol{e}_a$ baza u T_P, onda iz linearnosti $\boldsymbol{\omega}$ sledi $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u^a v^b \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b)$. Baza prostora $D_P(0,2)$ ima oblik $\boldsymbol{\theta}^a \times \boldsymbol{\theta}^b$, a proizvoljan vektor iz ovog prostora je dat izrazom $\boldsymbol{\omega} = u^*_a v^*_b \boldsymbol{\theta}^a \times \boldsymbol{\theta}^b$. Broj bazisnih vektora je n^2, što predstavlja dimenziju prostora $D_P(0,2)$.

Tenzorski proizvod $T_P(0,2) = T^*_P \otimes T^*_P$ dva dualna prostora u P se definiše kao vektorski prostor bilinearnih formi $\boldsymbol{\omega}$ koje preslikavaju $T_P \times T_P \to \mathcal{R}$. U odnosu na definiciju Dekartovog proizvoda vidimo da sada $\boldsymbol{\omega}$

ne mora biti oblika $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*)$, zbog čega smo oznaku $\times$ zamenili sa $\otimes$. Ako bazisne vektore prostora $T_P(0,2)$ definišemo relacijom $\boldsymbol{\theta}^a \otimes \boldsymbol{\theta}^b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u^a v^b$, onda je proizvoljni $\boldsymbol{\omega}$ iz $T_P(0,2)$ oblika

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{ab}\, \boldsymbol{\theta}^a \otimes \boldsymbol{\theta}^b \,.$$

Za razliku od Dekartovog proizvoda, ovde komponente ω_{ab} nisu date kao proizvod $u_a^* v_b^*$.

Tenzor $\boldsymbol{\omega}$ tipa (0,2) je element prostora $T_P(0,2)$; to je bilinearno preslikavanje koje svakom paru $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in T_P \times T_P$ pridružuje realan broj $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Na sličan način se tenzor $\boldsymbol{\alpha}$ tipa (1,1) definiše kao bilinearno preslikavanje koje par $(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{v})$ preslikava u realan broj $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{v})$.

Posle prethodnih razmatranja nije teško dati definiciju opšteg tenzora $\boldsymbol{t}$ tipa (p, q). Prostor tenzora datog tipa je vektorski prostor. Množenje dva tenzora proizvoljnog tipa i operacija kontrakcije se definišu na standardan način. Komponente tenzora $\boldsymbol{t}$ u koordinatnoj bazi se transformišu pri promeni koordinata isto kao proizvod p vektora i q dualna vektora. Zadavanjem tenzora $\boldsymbol{t}$ u svakoj tački P mnogostrukosti X dobija se tenzorsko polje na X.

Jedan od važnijih tenzora koji se mogu uvesti na diferencijabilnu mnogostrukost je *metrički tenzor*. Intuitivno, metrički tenzor treba da odredi kvadrat rastojanja "bliskih tačaka". Pošto "bliske tačke" odredjuju tangentni vektor, metrički tenzor treba da definiše "kvadrat" tangentnog vektora. Zato se metrički tenzor $\boldsymbol{g}$ definiše kao simetričan i nedegenerisan tenzor tipa (0,2), koji preslikava par vektora $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ u realan broj $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Veza ove apstraktne definicije sa intuitivnim pojmom "kvadrata infinitezimalnog rastojanja" može se direktno videti. Neka tangentni vektor $\boldsymbol{\xi} = dx^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ predstavlja vektor relativnog položaja dve bliske tačke. Pošto je u koordinatnoj bazi $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu}\, \boldsymbol{\theta}^\mu \otimes \boldsymbol{\theta}^\nu$, kvadrat vektora $\boldsymbol{\xi}$ postaje

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = g_{\mu\nu} \boldsymbol{\theta}^\mu \otimes \boldsymbol{\theta}^\nu(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2 \,, \tag{B.6}$$

što se slaže sa intuitivnim shvatanjem pojma metrike.

Za proizvoljan vektor $\boldsymbol{u}$ veličina $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \cdot)$ pripada T_P^*, jer preslikava $\boldsymbol{v}$ u $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Tako se uz pomoć metrike može definisati prirodni izomorfizam $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \cdot)$ tangentnog i dualnog prostora. Uobičajeno je da se dualni vektor $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \cdot)$ označi kao $\boldsymbol{u}^*$, što na jeziku koordinata (posle izostavljanja simbola *) daje $u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$. Kod mnogostrukosti sa definisanim metričkim tenzorom nema potrebe za posebnim uvodjenjem dualnog prostora.

Treba napomenuti da se u mnogostrukosti može, ali ne mora, uvesti metrički tenzor. Uvodjenjem polja metričkog tenzora nastaje mnogostrukost sa metrikom, koju treba razlikovati od pojma metričkog prostora.

Diferencijalne forme. Zbog posebnog značaja potpuno antisimetrični dualni tenzor tipa (0,p) se naziva forma ranga p, ili diferencijalna p–forma. Diferencijalna 1–forma $\boldsymbol{\alpha}$ je dualni vektor, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_a \boldsymbol{\theta}^a$. Diferencijalna

2–forma β u bazi $\boldsymbol{\theta}^a \otimes \boldsymbol{\theta}^b$ ima oblik

$$\beta = \beta_{ab}\, \boldsymbol{\theta}^a \wedge \boldsymbol{\theta}^b\,, \qquad \boldsymbol{\theta}^a \wedge \boldsymbol{\theta}^b \equiv \boldsymbol{\theta}^a \otimes \boldsymbol{\theta}^b - \boldsymbol{\theta}^b \otimes \boldsymbol{\theta}^a\,,$$

gde simbol $\wedge$ označava operaciju spoljašnjeg proizvoda. Na sličan način se može predstaviti i proizvoljna p–forma $\boldsymbol{\omega}$.

Za svake dve forme $\boldsymbol{\omega}_1$ i $\boldsymbol{\omega}_2$ definisan je njihov spoljašnji proizvod $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2$. Operacija spoljašnjeg proizvoda je asocijativna, ali nije komutativna.

U prostoru polja diferencijalnih formi uvodi se *spoljašnji izvod* kao linearan diferencijalni operator $\boldsymbol{d}$ koji preslikava p–forme u $(p+1)$–forme. Predstava o načinu njegovog delovanja se može steći korišćenje lokalnog koordinatnog bazisa.

Gradijent diferencijabilne funkcije je 1–forma $\boldsymbol{d}f$ koja nastaje delovanjem operatora $\boldsymbol{d}$ na 0–formu f. Ona je definisana relacijom $\boldsymbol{d}f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}(f)$, koja u koordinatnoj bazi ima oblik $\boldsymbol{d}f(\boldsymbol{u}) = u^\mu \partial_\mu f$. Ako posmatramo funkciju $f(x) = x^\mu$ (projekcija), tada se iz $\boldsymbol{d}x^\mu(\boldsymbol{u}) = u^\mu$ dobija $\boldsymbol{\theta}^\mu = \boldsymbol{d}x^\mu$. Odavde sledi $\boldsymbol{d}f = \boldsymbol{d}x^\mu \partial_\mu f$, tj. $\boldsymbol{d}f$ je diferencijal od f.

Na 1–formu $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_\nu \boldsymbol{d}x^\nu$, zadatu u koordinatnoj bazi $\boldsymbol{d}x^\mu$, spoljašnji izvod $\boldsymbol{d}$ deluje po pravilu

$$\boldsymbol{d\alpha} = \boldsymbol{d}\alpha_\nu \wedge \boldsymbol{d}x^\nu = \partial_\mu \alpha_\nu\, \boldsymbol{d}x^\mu \wedge \boldsymbol{d}x^\nu\,.$$

Na sličan način se može predstaviti delovanje $\boldsymbol{d}$ na proizvoljnu formu $\boldsymbol{\omega}$. U koordinatnoj bazi se lako proverava važna osobina $\boldsymbol{d}^2 = 0$, koja sledi iz činjenice da parcijalni izvodi komutiraju.

Za svaku bazu $\boldsymbol{e}_a$ definišu se strukturni koeficijenti $c^a{}_{bc}$ relacijom

$$[\boldsymbol{e}_b, \boldsymbol{e}_c] = c^a{}_{bc}\, \boldsymbol{e}_a\,. \qquad (B.7a)$$

U koordinatnoj bazi važi $c^a{}_{bc} = 0$. Interesantna je činjenica da koeficijenti $c^a{}_{bc}$ odredjuju i neke osobine dualne baze $\boldsymbol{\theta}^a$. Pošto je $\boldsymbol{d\theta}^a$ 2–forma, ona se može izraziti u bazi $\boldsymbol{\theta}^a \wedge \boldsymbol{\theta}^b$, pri čemu se dobija

$$\boldsymbol{d\theta}^a = -\tfrac{1}{2} c^a{}_{bc}\, \boldsymbol{\theta}^b \wedge \boldsymbol{\theta}^c\,. \qquad (B.7b)$$

Komponente od $\boldsymbol{d\theta}^a$ su, do na faktor $-\frac{1}{2}$, jednake strukturnim koeficijentima $c^a{}_{bc}$. Dokaz ove važne relacije se može izvesti prelazeći na koordinatnu bazu, $\boldsymbol{\theta}^a = b^a{}_\nu \boldsymbol{d}x^\nu$.

Paralelni prenos. Paralelni prenos i krivina su veoma važni pojmovi ne samo u modernoj diferencijalnoj geometriji, već i u modernoj fizici. Oni se najčešće sreću u teoriji gravitacije, ali se koriste i u teorijama sa neabelovom lokalnom simetrijom. Opšta teorija paralelnog prenosa geometrijskih objekata duž krivih u diferencijabilnoj mnogostrukosti zahteva apstraktan matematički pristup. Ako se ograničimo na pitanje paralelnog prenosa tangentnih vektora, pristup može biti mnogo direktniji.

U ravnom prostoru za vektor $\boldsymbol{v}$ se kaže da je paralelno prenet iz P u P' ako su njegove komponente u odnosu na bazu $\boldsymbol{e}_a(P')$ iste kao i komponente u odnosu na $\boldsymbol{e}_a(P)$, pri čemu je baza u P' dobijena paralelnim prenosom baze iz P. Tako je paralelni prenos vektora odredjen, ako je zadato pravilo paralelnog prenosa baze $\boldsymbol{e}_a$. U slučaju diferencijabilne mnogostrukosti ova definicija se može uopštiti zadavanjem pravila paralelnog prenosa baze tangentnog prostora T_P. Isti cilj se može postići uvodjenjem pojma kovarijantnog izvoda.

Posmatrajmo glatko vektorsko polje $\boldsymbol{v}(P)$ na mnogostrukosti X, koje u lokalnoj bazi ima oblik $\boldsymbol{v}(P) = v^a(x)\boldsymbol{e}_a(x)$. Pri prelazu $P \mapsto P'$ vektorsko polje se menja iz dva razloga:

a) komponente v^a se menjaju zbog eksplicitne x–zavisnosti, i

b) baza $\boldsymbol{e}_a$ se menja zbog paralelnog prenosa.

Zadavanje totalne promene je, dakle, ekvivalentno zadavanju pravila paralelnog prenosa baze.

Kovarijantni izvod na glatkoj mnogostrukosti X je preslikavanje $\boldsymbol{v} \mapsto D\boldsymbol{v}$ glatkog vektorskog polja u diferencijabilno tenzorsko polje tipa $(1,1)$, koje je linearno i zadovoljava uopšteno Lajbnicovo pravilo:

$$\begin{aligned} &D(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = D\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{v}\,, \\ &D(f\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{d}f \otimes \boldsymbol{v} + fD\boldsymbol{v}\,, \end{aligned} \tag{$B.8a$}$$

gde je f realna diferencijabilna funkcija na X. *Koeficijenti linearne povezanosti* $\Gamma^a{}_{bc}$ su definisani promenom baze $\boldsymbol{e}_a$,

$$D\boldsymbol{e}_b = \Gamma^a{}_{bc}\boldsymbol{\theta}^c \otimes \boldsymbol{e}_a\,, \tag{$B.8b$}$$

iz čega sledi

$$\begin{aligned} D\boldsymbol{v} &= D(v^a\boldsymbol{e}_a) = \boldsymbol{d}v^a \otimes \boldsymbol{e}_a + v^a D\boldsymbol{e}_a \\ &= (\partial_b v^a + \Gamma^a{}_{cb}v^c)\,\boldsymbol{\theta}^b \otimes \boldsymbol{e}_a \equiv D_b v^a\,\boldsymbol{\theta}^b \otimes \boldsymbol{e}_a\,. \end{aligned}$$

Koristeći *1–formu povezanosti* $\boldsymbol{\omega}^a{}_c = \Gamma^a{}_{cb}\boldsymbol{\theta}^b$ dobija se

$$D\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{d}v^a + \boldsymbol{\omega}^a{}_b v^b) \otimes \boldsymbol{e}_a\,. \tag{$B.9a$}$$

Činjenica da je $D\boldsymbol{v}$ tenzor može se iskoristiti za nalaženje transformacionih osobina koeficijenata povezanosti.

Da bi se kovarijantni izvod realne funkcije $\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{v})$ sveo na gradijent, kovarijantni izvod 1–forme $\boldsymbol{w}^*$ mora imati oblik

$$D\boldsymbol{w}^* = (\boldsymbol{d}w_b - \boldsymbol{\omega}^a{}_b w_a) \otimes \boldsymbol{\theta}^b\,. \tag{$B.9b$}$$

Uopštenje kovarijantnog izvoda na proizvoljan tenzor je direktno. Pojmovi kovarijantnog izvoda i paralelnog prenosa su *nezavisni od postojanja metrike.*

Kovarijantni izvod u pravcu vektora $\boldsymbol{u}$ je preslikavanje $\boldsymbol{v} \mapsto D_u \boldsymbol{v}$ vektorskog polja u vektorsko polje, definisano relacijom

$$D_u \boldsymbol{v} = (D\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\theta}^a)\boldsymbol{e}_a = u^b D_b v^a \boldsymbol{e}_a \,.$$

Specijalno, izvod bazisnog vektora $\boldsymbol{e}_a$ u pravcu $\boldsymbol{e}_b$ je $D_b \boldsymbol{e}_a = \Gamma^c{}_{ab}\boldsymbol{e}_c$. Vektor $\boldsymbol{v}$ se pomera *paralelno* duž krive $C(\lambda)$ u X akoje $D_u \boldsymbol{v} = 0$, gde je $\boldsymbol{u}$ tangentni vektor krive. Kriva $C(\lambda)$ je *autoparalela* ako je njen tangentni vektor stalno paralelan samom sebi, $D_u \boldsymbol{u} = 0$.

Definisanje *spinora* na mnogostrukosti je složenije od uvodjenja tenzora. Kao što postoje vektori definisani zakonom transformacije lokalnih koordinata, tako se, analogno, *mogu* definisati i (svetski) spinori, ako se uvedu *nelinearne reprezentacije* grupe difeomorfizama. Ovako uvedeni spinori su beskonačno dimenzione veličine (Ne'eman i Šijački, 1985; 1987). Konačni spinori se mogu uvesti jednostavnije. Posmatrajmo skup svih baza $\mathcal{E}_P = \{\boldsymbol{e}_a\}$ tangentnog prostora T_P. Svaka data baza se može dobiti iz neke fiksne (naprimer koordinatne) baze transformacijom tipa $GL(n,R)$. Ako se u T_P uvede Lorencova metrika, onda se baze mogu izabrati tako da budu ortonormirane, pa odgovarajuća grupa simetrije postaje $SO(1,n-1)$. Sada se lokalno mogu uvesti konačni (tangentni) spinori, kao što se to radi u ravnom Minkovskijevom prostoru. Spinori se mogu paralelno prenositi ako se zada pravilo paralelnog prenosa Lorencove baze, što definiše *spinsku koneksiju.*

Torzija i krivina. Definišimo operatore torzije i krivine relacijama

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= D_u \boldsymbol{v} - D_v \boldsymbol{u} - [\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\,, \\ R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= D_u D_v - D_v D_u - D_{[u,v]}\,. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Uzimajući za $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ vektore koordinatne baze $\boldsymbol{e}_\mu$ (koji komutiraju), iz prethodnih definicija se dobijaju odgovarajuće komponente tenzora torzije i krivine:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{e}_\nu) =& D_\mu \boldsymbol{e}_\nu - D_\nu \boldsymbol{e}_\mu = (\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})\,\boldsymbol{e}_\lambda \equiv T^\lambda{}_{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\lambda\,, \\ R(\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{e}_\nu)\boldsymbol{e}_\lambda =& (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\boldsymbol{e}_\lambda \\ =& \big[\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu)\big]\boldsymbol{e}_\rho \equiv R^\rho{}_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{e}_\rho\,. \end{aligned}$$

Koristeći antisimetriju komponenti torzije i krivine po zadnja dva indeksa uvedimo sledeće diferencijalne 2–forme:

$$\mathcal{T}^a \equiv \tfrac{1}{2}T^a{}_{bc}\,\boldsymbol{\theta}^b \wedge \boldsymbol{\theta}^c\,, \qquad \mathcal{R}^a{}_b \equiv \tfrac{1}{2}R^a{}_{bcd}\,\boldsymbol{\theta}^c \wedge \boldsymbol{\theta}^d\,. \tag{B.11}$$

Diferencijalne forme torzije i krivine zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^a &= \boldsymbol{d}\boldsymbol{\theta}^a + \boldsymbol{\omega}^a{}_b \wedge \boldsymbol{\theta}^b\,, \\ \mathcal{R}^a{}_b &= \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b\,, \end{aligned} \tag{B.12}$$

koji su poznati kao *Kartanove strukturne jednačine*. U koordinatnoj bazi je $\boldsymbol{d}\boldsymbol{\theta}^a = 0$, pa se iz definicije 1–forme $\omega^a{}_b$ lako dobija prva strukturna jednačina. Na sličan način se dokazuje i druga jednačina.

Pri izračunavanju krivine i torzije uz pomoć formi korisno je uvesti odredjeno uopštenje pojma spoljašnjeg izvoda $\boldsymbol{d}$. Definišimo spoljašnji izvod $\overline{\boldsymbol{d}}$, koji na formu deluje kao $\boldsymbol{d}$, dok je njegovo delovanje na vektor $\boldsymbol{v}$ zadato relacijom

$$\overline{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{v} = D\boldsymbol{v}\,, \qquad D = \text{kovarijantni izvod}\,. \tag{B.13}$$

Posmatrajmo, dalje, veličinu $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}^a \boldsymbol{e}_a \,(\equiv \boldsymbol{\theta}^a \otimes \boldsymbol{e}_a)$, za koju kažemo da je 1–forma sa vrednošću u polju vektora. Rezultat delovanja uopštenog spoljašnjeg izvoda $\overline{\boldsymbol{d}}$ na $\boldsymbol{w}$ ima oblik

$$\overline{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\theta}^a \boldsymbol{e}_a - \boldsymbol{\theta}^a D\boldsymbol{e}_a = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{\theta}^a + \boldsymbol{\omega}^a{}_b \wedge \boldsymbol{\theta}^b)\boldsymbol{e}_a \equiv T^a \boldsymbol{e}_a\,. \tag{B.14a}$$

Tako se diferencijalna forma torzije T^a dobija delovanjem $\overline{\boldsymbol{d}}$ na $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}^a \boldsymbol{e}_a$. Na sličan način, delovanjem $\overline{\boldsymbol{d}}$ na relaciju $\overline{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{e}_a \equiv D\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{\omega}^c{}_a \boldsymbol{e}_c$ dobija se diferencijalna forma krivine:

$$\overline{\boldsymbol{d}}^2 \boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^c{}_a \boldsymbol{e}_c - \boldsymbol{\omega}^c{}_a D\boldsymbol{e}_c = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega}^b{}_a + \boldsymbol{\omega}^b{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_a)\boldsymbol{e}_b = \mathcal{R}^b{}_a \boldsymbol{e}_b\,. \tag{B.14b}$$

Uočavamo da za uopšteni spoljašnji izvod *ne važi* $\overline{\boldsymbol{d}}^2 = 0$. Prednost izračunavanja torzije i krivine na opisani način nalazi se u činjenici da se mnogi članovi u računu automatski poništavaju.

Primenom spoljašnjeg izvoda na strukturne jednačine dobijaju se Bjankijevi identiteti:

$$\begin{aligned} D\mathcal{T}^a &\equiv \boldsymbol{d}\mathcal{T}^a + \boldsymbol{\omega}^a{}_b \mathcal{T}^b = \mathcal{R}^a{}_b \boldsymbol{\theta}^b\,, \\ D\mathcal{R}^a{}_b &\equiv \boldsymbol{d}\mathcal{R}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \mathcal{R}^c{}_b - \boldsymbol{\omega}^c{}_b \mathcal{R}^a{}_c = 0\,. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Napomenimo još jednom da su metrika i paralelni prenos definisani kao nezavisni pojmovi. Na njih se mogu nametnuti odredjeni uslovi koji definišu diferencijalne mnogostrukosti specijalnog tipa. Tako uslov $D\boldsymbol{g} = 0$ definiše Riman–Kartanov prostor, koji posle dodatnog zahteva $\mathcal{T}^a = 0$ prelazi u Rimanov prostor.

Zadaci

1. Pokazati da su sledeći prostori topološki, ali nisu Hausdorfovi:
   a) $X = \{x, y\}$, a otvoreni skupovi su $\emptyset, X$, i $\{x\}$;
   b) $X = [0,1]$, a otvoreni skupovi su prazan skup i svi skupovi koji se dobijaju izbacivanjem najviše prebrojivo mnogo tačaka iz intervala $[0,1]$.
2. Pokazati da je kružnica $S_1 = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ mnogostrukost.
3. Naći komponente tangentnog vektora na krivu $C(\lambda)$ u koordinatnoj bazi.

4. Neka je $\boldsymbol{v}$ tangentni vektor u tački $P \in X$ na krivu $C(\lambda)$, a f diferencijabilno preslikavanje $X \to Y$. Izvod od f je preslikavanje f' tangentnih prostora $T_P \to T_{f(P)}$, zadato sa $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{u}(h) = \boldsymbol{v}(h \circ f)$, gde je $h : Y \to \mathcal{R}$ diferencijabilna funkcija. Pokazati da je $\boldsymbol{u}$ tangentni vektor na krivu $f(C(\lambda))$, i naći njegove komponente u koordinatnoj bazi.
5. U trodimenzionom euklidskom prostoru sa sfernim koordinatama r, θ, ϕ uvedena je baza tangentnih vektora

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}\,, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\,, \quad \boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\,.$$

   Naći dualnu bazu $\{\boldsymbol{e}^r, \boldsymbol{e}^\theta, \boldsymbol{e}^\phi\}$.
6. Dokazati relaciju $(B.7b)$. Zatim iz $\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{\theta}^a = 0$ izvesti Jakobijev identitet u slučaju konstantnih koeficijenata $c^a{}_{bc}$.
7. Izraziti antisimetričan deo od $\Gamma^a{}_{bc}$ preko strukturnih koeficijenata $c^a{}_{bc}$.
8. Naći komponente torzije i krivine u proizvoljnoj bazi.
9. U gornjoj poluravni zadata je (Poenkareova) metrika Rimanovog prostora:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\,, \qquad y > 0\,.$$

   a) Naći bazisnu 1–formu $\boldsymbol{\theta}^a$ u lokalno ortogonalnom bazisu. Zatim iz uslova $\mathcal{T}^a = 0$ i prve strukturne jednačine izračunati 1–formu povezanosti $\boldsymbol{\omega}^a{}_a$.
   b) Iz druge strukturne jednačine izračunati 2–formu krivine $\mathcal{R}^a{}_b$ i naći vrednost skalarne krivine R.
   c) Izračunati R direktno iz definicije preko Kristofelovih simbola.
10. Dokazati Kartanove strukturne jednačine u proizvoljnoj bazi. Zatim izvesti odgovarajuće Bjankijeve identitete.

C. LOKALNA DE SITEROVA TEORIJA

De Siterova grupa ima interesantnu osobinu da u odredjenom limesu, kada parametar grupe a teži ka beskonačnosti, prelazi u Poenkareovu grupu. Parametar a ima dimenziju dužine, i geometrijski predstavlja radijus de Siterovog prostora. Ova činjenica označava bliskost dve grupe za veliko a, što motiviše razmatranje de Siterove grupe kao alternative za opis simetrije fizičkog prostor–vremena. Odgovarajuća teorija gravitacije se može izgraditi po analogiji sa lokalnom Poenkareovom teorijom, što označava sledeći postupak: prostor–vreme ima de Siterovu strukturu, i u njemu se nalazi materija opisana dejstvom koje poseduje globalnu de Siterovu simetriju, a gravitacija se uvodi kao gradijentno polje pri lokalizaciji ove simetrije.

Postoji, medjutim, jedna *drugačija* mogućnost:

a) fizički prostor–vreme zadržava strukturu M_4,

b) u svakoj njegovoj tački deluje de Siterova grupa kao grupa lokalne unutrašnje simetrije dinamičkog sistema.

Naredno izlaganje biće posvećeno analizi ovog slučaja. Videćemo da tada radijus de Siterovog prostora a može biti jako mali — proporcionalan

Plankovoj dužini, i da postoji veoma interesantna veza sa Poenkareovom teorijom gravitacije.

De Siterova grupa i njena kontrakcija. Da bismo izložili strukturu de Siterove grupe $SO(2,3)$, posmatraćemo ravan petodimenzioni prostor M_5 sa metrikom $\eta_{ab} = (+,-,-,-,+)$ $(a,b = 0,1,2,3,5)$, u kome je kvadrat rastojanja bliskih tačaka dat izrazom

$$ds^2 = (dy^0)^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 + (dy^5)^2 \equiv \eta_{ij} dy^i dy^j + (dy^5)^2 \,. \quad (C.1)$$

U prostoru M_5 definišemo hipersferu H_4 "poluprečnika" a,

$$\eta_{ij} y^i y^j + (y^5)^2 = a^2 \,, \quad (C.2)$$

koja predstavlja maksimalno simetričan potprostor od M_5, i naziva se de Siterov prostor. Na H_4 veličina $(dy^5)^2$ je data izrazom

$$(dy^5)^2 = \frac{(\eta_{ij} y^i dy^j)^2}{(y^5)^2} \,,$$

posle čega kvadrat rastojanja postaje

$$ds^2 = \eta_{ij} dy^i dy^j + \frac{(\eta_{ij} y^i dy^j)^2}{a^2 - \eta_{mn} y^m y^n} \,. \quad (C.3)$$

Ovaj izraz definiše metriku na H_4 u koordinatama y^i $(i = 0,1,2,3)$.

Krivina maksimalno simetričnog prostora je ista u svakoj njegovoj tački. U blizini $y^i = 0$ metrika i (Kristofelova) koneksija prostra H_4 imaju oblik

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \frac{y_i y_j}{a^2} \,, \qquad \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{a^2} y^i \eta_{jk} \,,$$

pa se lako dobija

$$(R_{ijkl})_0 = \frac{1}{a^2} (\eta_{ik}\eta_{jl} - \eta_{il}\eta_{jk}) \,,$$

iz čega sledi da de Siterov prostor ima konstantnu krivinu: $R = 12/a^2$.

Na H_4 se umesto y^i mogu uvesti nove koordinate z^i, tako da prostorni deo metrike postane proporcionalan ravnoj metrici:

$$ds^2 = (dz^0)^2 - \exp(2az^0)\big[(dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2\big] \,.$$

Često se koriste i konformne koordinate x^i,

$$y^i = \Phi(x^2) x^i \,, \qquad \Phi(x^2) \equiv (1 + x^2/4a^2)^{-1} \,,$$

gde je $x^2 = \eta_{ij}x^i x^j$, u kojima je metrika oblika

$$ds^2 = \Phi^2 \eta_{ij} dx^i dx^j \,.$$

Grupa izometrije prostora H_4 je de Siterova grupa $SO(2,3)$ [u slučaju kad je metrika prostora M_5 oblika $(+,-,-,-,-)$, dobija se de Siterova grupa $SO(1,4)$]. Beskonačno male de Siterove transformacije koordinata imaju oblik pseudorotacija u M_5:

$$\delta y^a = \omega^a{}_b y^b \,, \qquad \omega^{ab} = -\omega^{ba} \,. \tag{$C.4$}$$

Generatori de Siterove grupe u prostoru skalarnih polja imaju oblik

$$M_{ab} = y_a \partial_b - y_b \partial_a \,,$$

i zadovoljavaju algebru

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac} + \eta_{ac} M_{bd} \,. \tag{$C.5$}$$

U opštem slučaju proizvoljnog polja generatori sadrže i "spinski" deo, slično kao kod Poenkareove grupe.

Konformne koordinate se odlikuju jednostavnošću metrike, ali su, sa gledišta simetrije, interesantnije koordinate u^i definisane implicitno relacijom

$$y^i = a\frac{u^i}{u}\sin(u/a), \qquad y^5 = a\cos(u/a) \,, \tag{$C.6$}$$

gde je $u = (u^2)^{1/2}$, $u^2 = \eta_{ij}u^i u^j$. De Siterove transformacije koordinata y^a u M_5 indukuju komplikovane, nelinearne transformacije koordinata u^i u H_4. U slučaju beskonačno malih transformacija problem se rešava ako zapazimo da iz

$$\delta u^i = \bar\omega^i{}_j u^j + \varepsilon^i u \,, \qquad \bar\omega^{ij} = -\bar\omega^{ji} \,, \tag{$C.7$}$$

sledi

$$\begin{aligned}
&\delta_\omega y^i = \bar\omega^i{}_j y^j \,, && \delta_\omega y^5 = 0 \,, \\
&\delta_\varepsilon y^i = \frac{1}{u}(\varepsilon^i u_j - \varepsilon_j u^i) y^j + \frac{u\cdot\varepsilon}{ua} u^i y^5 \,, \qquad && \delta_\varepsilon y^5 = -\frac{u\cdot\varepsilon}{ua} u_i y^i \,.
\end{aligned}$$

To znači da promene $\delta_\omega u^i$ i $\delta_\varepsilon u^i$ realizuju de Siterove transformacije sa parametrima $\big[\omega^{ij} = \bar\omega^{ij}, \omega^{i5} = 0\big]$ i $\big[\omega^{ij} = (\varepsilon^i u^j - \varepsilon^j u^i)/u,\ \omega^{i5} = u^i(u\cdot\varepsilon)/ua\big]$, redom. Veličine

$$M_{ij}(u) = u_i \partial_j - u_j \partial_i \,, \qquad M_{i5}(u) = u\partial_i \,,$$

predstavljaju de Siterove generatore u koordinatama u^i, i zadovoljavaju algebru (C.5).

Ako definišemo
$$P_i = \frac{1}{a} M_{i5}\,,$$
de Siterova algebra dobija oblik
$$\begin{aligned}
&[M_{mn}, M_{lr}] = \eta_{nl} M_{mr} - \eta_{ml} M_{nr} - \eta_{nr} M_{ml} + \eta_{mr} M_{nl}\,,\\
&[M_{mn}, P_l] = \eta_{nl} P_m - \eta_{ml} P_n\,,\\
&[P_m, P_n] = -\frac{1}{a^2} M_{mn}\,.
\end{aligned} \tag{C.8}$$
Pri $a \to \infty$ ova algebra prelazi u Poenkareovu, a opisani postupak se naziva *kontrakcija* de Siterove algebre u Poenkareovu (Inönü, 1962).

Ako fizički prostor–vreme identifikujemo sa de Siterovim prostorom H_4, onda je jasno da konstanta a mora biti velika da bi odstupanje od Poenkareove simetrije bilo dovoljno malo. Mi ćemo, medjutim, razmotriti alternativnu mogućnost u kojoj prostor–vreme zadržava strukturu M_4, pri čemu je svakoj njegovoj tački "pridružena" po jedna kopija de Siterovog prostora u kome deluje grupa unutrašnje simetrije.

Lokalizacija de Siterove simetrije. Neka fizički prostor–vreme ima strukturu Minkovskijevog prostora M_4, i neka je u svakoj njegovoj tački x definisan "tangentni" prostor F_x (fibra), koji predstavlja kopiju de Siterovog prostora H_4. Na prostoru F_x se realizuje delovanje de Siterove grupe $SO(2,3)$ kao grupe *unutrašnje* simetrije fizičkog sistema (Townsend, 1977; Fukujama, 1983; Kibble i Stelle, 1986).

Pretpostavićemo da je polazna teorija invarijantna u odnosu na globalne $SO(2,3)$ transformacije. Lokalizacija simetrije se postiže uvodjenjem kovarijantnog izvoda $D_\mu\phi = \big(\partial_\mu + \frac{1}{2} A^{ab}{}_\mu M_{ab}\big)\phi$, iz čijeg zakona transformacije sledi da se gradijentna polja $A^{ab}{}_\mu$ transformišu po pravilu
$$\delta_0 A^{ab}{}_\mu = \omega^a{}_c A^{cb}{}_\mu + \omega^b{}_c A^{ac}{}_\mu - \omega^{ab}{}_{,\mu} - \xi^\lambda{}_{,\mu} A^{ab}{}_\lambda - \xi^\lambda \partial_\lambda A^{ab}{}_\mu\,. \tag{C.9}$$
Ovde je $\xi^i \equiv \delta u^i = \omega^i{}_j u^j + \varepsilon^i u$, kao u jednačini ($C$.7), a $\xi^\lambda = \delta^\lambda_l \xi^l$. Komutator kovarijantnih izvoda odredjuje jačinu polja:
$$F^{ab}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{ab}{}_\nu - \partial_\nu A^{ab}{}_\mu + A^a{}_{c\mu} A^{cb}{}_\nu - A^a{}_{c\nu} A^{cb}{}_\mu\,. \tag{C.10}$$
Indeksi unutrašnje simetrije $(a, b, ...)$ i prostorno–vremenski indeksi $(\mu, \nu, ...)$ na ovom nivou nemaju nikakve veze, jer ne postoje veličine analogne tetradama koje bi ih povezivale.

Uvodeći oznake
$$P_i = \frac{1}{a} M_{i5}\,, \qquad \lambda^i = a\omega^{i5}\,, \qquad B^i{}_\mu = a A^{i5}{}_\mu\,, \tag{C.11}$$

jednačine (C.9) i (C.10) prelaze u

$$
\begin{aligned}
\delta A^{ij}{}_{\mu} &= \omega^{i}{}_{s} A^{sj}{}_{\mu} + \omega^{j}{}_{s} A^{is}{}_{\mu} - \omega^{ij}{}_{,\mu} - \frac{1}{a^2}(\lambda^i B^j{}_{\mu} - \lambda^j B^i{}_{\mu})\,, \\
\delta B^{i}{}_{\mu} &= \omega^{i}{}_{s} B^{s}{}_{\mu} - \lambda_s A^{is}{}_{\mu} - \lambda^{i}{}_{,\mu}\,,
\end{aligned}
\tag{C.12}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{ij}{}_{\mu\nu} &= R^{ij}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{a^2}(B^i{}_{\mu} B^j{}_{\nu} - B^i{}_{\nu} B^j{}_{\mu})\,, \\
F^{i5}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{a} T^{i}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{a}(D_\mu B^i{}_{\nu} - D_\nu B^i{}_{\mu})\,.
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

Ovde je $D_\mu B^i{}_\nu = \partial_\mu B^i{}_\nu + A^i{}_{s\mu} B^s{}_\nu$, a $R^{ij}{}_{\mu\nu}$ i $T^i{}_{\mu\nu}$ imaju oblik Poenkareove krivine i torzije. Veza de Siterove i Poenkareove grupe (C.8) sugeriše identifikaciju potencijala $B^i{}_\mu$ sa tetradom:

$$
B^i{}_\mu = b^i{}_\mu \quad ? \tag{C.14}
$$

Medjutim, zakon transformacije za $B^i{}_\mu$ pokazuje da je takva identifikacija korektna samo pri $\lambda^i = a\omega^{i5} = 0$, tj. samo ako se de Siterova simetrija *naruši.*

Pri konstrukciji $SO(2,3)$ invarijantnog dejstva, pored jačine polja F možemo koristiti potpuno antisimetrične tenzore ε_{abcde} i $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$, i metrike η_{ab} i $\eta_{\mu\nu}$. Dejstvo linearno po F ne postoji (nema tetrada!), dok je kvadratično dejstvo $\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F^{ab}{}_{\mu\nu} F_{ab\lambda\rho}$ trivijalno jer predstavlja topološku invarijantu. Više stepene od F nećemo razmatrati.

Problem se može rešiti na zadovoljavajući način ako se odreknemo eksplicitne de Siterove simetrije. Posmatrajmo lagranžijan

$$
\mathcal{L} = \frac{f}{a} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F^{ab}{}_{\mu\nu} F^{cd}{}_{\lambda\rho} \varepsilon_{abcde} \phi^e - \lambda(\phi^e \phi_e - a^2)\,, \tag{C.15}
$$

gde je f dimenziona konstanta, ϕ^e pomoćno polje, a λ množitelj koji nameće vezu $\phi^e\phi_e = a^2$. U skladu sa ovom vezom izaberimo rešenje

$$
\phi^e = (0,0,0,0,a)\,, \tag{C.16}
$$

tako da lagranžijan postaje

$$
\mathcal{L} = f \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F^{ij}{}_{\mu\nu} F^{kl}{}_{\lambda\rho} \varepsilon_{ijkl5}\,. \tag{C.17}
$$

Izbor (C.16) *spontano narušava* lokalnu $SO(2,3)$ simetriju ostavljajući kao preostalu simetriju $SO(1,3)$, posle čega identifikacija (C.14) postaje *korektna.*

Sada ćemo videti u kakvoj je vezi ova teorija sa Poenkareovom teorijom gravitacije. Koristeći izraze (C.13) i (C.14) lagranžijan dobija oblik

$$
f^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \frac{4}{a^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} R^{ij}{}_{\mu\nu} b^k{}_\lambda b^l{}_\rho \varepsilon_{ijkl} + \frac{4}{a^4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b^i{}_\mu b^j{}_\nu b^k{}_\lambda b^l{}_\rho \varepsilon_{ijkl}\,,
$$

gde je $\varepsilon_{ijkl} \equiv \varepsilon_{ijkl5}$. Član $\mathcal{L}_2$ je kvadratičan po $R^{ij}{}_{\mu\nu}$ i definiše topološku invarijantu koja predstavlja površinski član u dejstvu. Varijacija ovog člana daje identički nulu pa se on, bar klasično, može zanemariti. Koristeći identitet $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{ijkl}b^k{}_\lambda b^l{}_\rho = -2b(h_i{}^\mu h_j{}^\nu - h_j{}^\mu h_i{}^\nu)$ konačno se dobija

$$\mathcal{L} = \frac{16f}{a^2} b(R + \Lambda)\,, \tag{C.18}$$

gde je $\Lambda = -6/a^2$. Tako lagranžijan $(C.17)$, koji je kvadratičan po F, daje Ajnštajn–Kartanovu teoriju sa kosmološkom konstantom.

Treba zapaziti da je veličina a^2/f proporcionalna gravitacionoj konstanti, iz čega se može zaključiti da je $\dim(f) =$ energija $\times$ vreme, dakle ista kao i dimenzija Plankove konstante. Ako konstantu f identifikujemo sa Plankovom konstantom, de Siterova teorija gravitacije dovodi do prirodnog uvodjenje dimenzione konstante a, koja ima vrednost Plankove dužine i ne zavisi od detalja dinamike. Ovo znači da je struktura prostor–vremena na maloj skali dužina odredjena de Siterovom grupom, i da ta skala (uz korišćenje Plankove konstante) odredjuje gravitacionu konstantu.

Ovakva interpretacija teorije ima problema sa velikom kosmološkom konstantom, što nije u skladu sa eksperimentalnim činjenicama. Mogući izlaz nalazimo u alternativnoj hipotezi da je a veoma veliko, tako da u limesu $a \to \infty$ (kontrakcija) kosmološka konstanta iščezava, a ostaje uobičajeni član bR.

Problemi nisu do kraja razrešeni, ali je nesumnjivo da de Siterova teorija daje jedan inspirativan uvid u strukturu teorije gravitacije.

Zadaci

1. Dokazati da za prostor sa metrikom $(C.3)$ važe relacije:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{a^2} y^i g_{jk}\,, \qquad R_{ijkl} = \frac{1}{a^2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\,.$$

2. Pokazati da konformne koordinate de Siterovog prostora zadovoljavaju relacije

$$x^i = \frac{2y^i}{1 + y^5/a}\,, \qquad \frac{x^2}{4a^2} = \frac{1 - y^5/a}{1 + y^5/a}\,, \qquad y^5 = (2\Phi - 1)a\,.$$

3. Pokazati da kontrakcija Lorencove grupe definiše Galilejevu grupu, t.j. grupu koja sadrži Galilejeve transformacije i prostorne rotacije.
4. Dokazati da se dejstvo $\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F^{ab}{}_{\mu\nu} F_{ab\lambda\rho}$ može napisati u obliku površinskog člana $\int d^4x \partial_\mu K^\mu$.
5. Dokazati da varijacija dejstva $\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} R^{ij}{}_{\mu\nu} R^{kl}{}_{\lambda\rho} \varepsilon_{ijkl}$ daje identički nulu. Može li se ovo dejstvo predstaviti u obliku integrala četvorodivergencije?
6. Izračunati zavisnost dejstva $I = \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} F^{ab}{}_{\mu\nu} F_{ab\lambda\rho}$ od krivine i torzije, koristeći identifikaciju tetrade $(C.14)$ i izraz $(C.13)$ za F.

D. SKALARNO–TENZORSKA TEORIJA

Osnovna dinamička varijabla u OTR je metrički tenzor $g_{\mu\nu}$. U nastojanjima da se izmene neke osobine ove teorije nastali su razni pokušaji izgradnje alternativnih teorija gravitacije, u kojima su razmatrani novi principi i odgovarajuće dinamičke varijable. Polazeći od stava da Mahove ideje o inerciji nisu u potpunosti realizovane u OTR, Brans i Diki (BD) su predložili veoma interesantnu teoriju gravitacije, u kojoj se pored metričkog tenzora pojavljuje i skalarno polje kao nova gravitaciona varijabla (Brans i Dicke, 1961).

Teorija Bransa i Dikija. Po Mahovim idejama, inercijalne sile koje se pojavljuju u nekom ubrzanom referentnom sistemu mogu se lokalno interpretirati kao gravitaciono polje čiji je izvor u sveukupnoj materiji (u Vasioni), koja se kreće ubrzano u odnosu na dati sistem. U OTR uticaj materije na definisanje lokalnog inercijalnog RS je, ponekad, zanemarljiv u odnosu na uticaj *graničnih uslova*. Posmatrajmo slučaj prostora u kome nema ničeg osim jedne laboratorije standardne veličine i mase. Ako koristimo OTR i granične uslove po kojima je prostor asimptotski ravan (M_4), efekat laboratorije na gravitaciono polje je veoma mali, i može se izračunati u aproksimaciji slabog polja. Laboratorija je praktično inercijalan RS. Medjutim, posle ispaljivanja metka kroz prozor, laboratorija prelazi u stanje rotacije koje se može registrovati pomoću žiroskopa. Tako ispaljeni metak, koji je posle nekog vremena odleteo *daleko* od laboratorije i čija je masa *zanemarljiva* u odnosu na masu cele laboratorije, postaje dominantan u definisanju lokalno inercijalnih RS (orijentacije žiroskopa). Ova situacija u OTR je mnogo bliža Njutnovom apsolutnom prostoru nego shvatanju Maha, po kome bi uticaj mnogo bliže i mnogo veće mase laboratorije morao biti dominantan.

Uticaj ukupne mase u Vasioni na lokalno gravitaciono polje se najjednostavnije može opisati uvodjenjem skalarnog polja ϕ. Ako polje ϕ zadovoljava Puasonovu jednačinu, njegova srednja vrednost se može oceniti izračunavanjem centralnog potencijala homogene sfere čiji je poluprečnik jednak dimenziji Vasione, $R \sim 10^{28}\,\mathrm{cm}$, u kojoj se nalazi masa M kosmološke gustine $\rho \sim M/R^3 \sim 10^{-29}\,\mathrm{gr\ cm^{-3}}$. Tako se dobija

$$\langle\phi\rangle \sim \rho R^2 \sim 10^{27}\,\mathrm{gr\ cm^{-1}}\,.$$

Uporedjivanjem ovog rezultata sa vrednošću gravitacione konstante, $G = 0.68\cdot 10^{-28}\,\mathrm{gr^{-1}\,cm}$ (u jedinicama $c = 1$), dolazi se do interesantne relacije:

$$\langle\phi\rangle \sim \frac{1}{G}\,. \qquad (D.1)$$

Ona povezuje srednju vrednost polja ϕ, koje predstavlja efekat svih masa u Vasioni, sa gravitacionom konstantom koja definiše jačinu lokalnog gravitacionog polja.

Po Mahovom shvatanju inercije, lokalno gravitaciono polje (koje definiše lokalno inercijalni RS i time utiče na lokalni standard inercije) treba da zavisi od rasporeda svih masa u Vasioni. Ako se uticaj ovih masa ostvaruje preko skalarnog polja, onda se Mahova ideja može realizovati pretpostavkom da je gravitaciona "konstanta" funkcija skalarnog polja ϕ. Prethodna analiza sugeriše da se dobra teorija gravitacije dobija iz dejstva za OTR zamenom $1/G \to \phi$, uz dodavanje člana koji opisuje dinamiku ϕ polja:

$$I_{BD} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\phi R + (\omega/\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 16\pi\mathcal{L}_M\right]. \qquad (D.2)$$

U prvom članu ϕ ima ulogu analognu G^{-1}, a drugi član je dejstvo za skalarno polje u kome je ω bezdimenziona konstanta. Ova konstanta mora biti *pozitivna* da bi energija skalarnog polja bila pozitivna. Lagranžijan materije $\mathcal{L}_M$ ne zavisi od polja ϕ i ima isti oblik kao u OTR, tako da je jednačina kretanja materijalne tačke geodezijska linija. Dejstvo $(D.2)$ opisuje gravitaciju preko metrike i skalarnog polja u Rimanovom prostoru.

Interesantno je uočiti da je ova teorija u skladu sa slabim principom ekvivalencije: ona predvidja, kao i OTR, da su zakoni kretanja probnih tela u svakom lokalno inercijalnom RS isti, jer se ona kreću duž geodezijskih linija. S druge strane, jaki PE zahteva da su svi zakoni fizike, uključujući i gravitaciju, isti u svakom lokalno inercijalnom RS. Pošto je gravitaciona "konstanta" promenljiva i zavisi od tačke u kojoj se posmatra, gravitacioni efekti (kao što je npr. odnos elektromagnetne i gravitacione interakcije izmedju dva elektrona) se menjaju od tačke do tačke. Tako vidimo da je Mahov princip nespojiv sa jakim PE.

Iz dejstva $(D.2)$ se na uobičajen način dobijaju jednačine kretanja. Koristeći identitet $\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\phi = -\int\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}(D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\phi$, i definiciju TEI za skalarno polje,

$$\tfrac{1}{2}B_{\mu\nu} = (D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\phi + (\omega/\phi)\left[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi)\right], \qquad (D.3)$$

lako se dobijaju jednačine kretanja za $g_{\mu\nu}$ i ϕ:

$$\phi G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}B_{\mu\nu}\,, \qquad (D.4a)$$

$$-2(\omega/\phi)\Box\phi + (\omega/\phi^2)\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - R = 0\,, \qquad (D.4b)$$

Prva relacija predstavlja uopštenje Ajnštajnove jednačine u kojoj je gravitaciona konstanta zamenjena poljem ϕ^{-1}, a kao izvor se pojavljuje TEI materije i skalarnog polja. Kada je $T_{\mu\nu}$ dominantan u odnosu na $B_{\mu\nu}$, ova jednačina se razlikuje od Ajnštajnove samo po prisustvu promenljive gravitacione "konstante". Kovarijantna divergencija ove jednačine daje rezultat

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0\,,$$

odakle sledi da su jednačine kretanja probnih tela geodezijske linije, kao i u OTR. Druga jednačina se može transformisati tako da izvor polja ϕ bude trag TEI materije, što je u skladu sa zahtevom Mahovog principa. Zaista, kontrakcija jednačine $(D.4a)$, $-\phi R = 8\pi T - 3\Box\phi - (\omega/\phi)\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi$, u kombinaciji sa $(D.4b)$, daje

$$(2\omega + 3)\Box\phi = 8\pi T\,. \tag{$D.5$}$$

Opservacione posledice teorije se dobijaju rešavanjem jednačina $(D.4a)$ i $(D.5)$. Rezultati se razlikuju od onih dobijenih u OTR , i mogu se iskoristiti za testiranje teorije i odredjivanje konstante ω. Za veliko ω jednačina $(D.5)$ ima rešenje

$$\phi = \frac{1}{G} + \mathcal{O}(1/\omega)\,,$$

tako da jednačia $(D.4a)$ postaje

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \mathcal{O}(1/\omega)\,.$$

Drugim rečima, u ovom limesu teorija prelazi u Ajnštajnovu OTR.

Za odredjivanje donjeg limita na ω pogodan test je precesija perihela Merkura, za koji račun daje

$$\frac{3\omega + 4}{3\omega + 6} \times (\text{vrednost iz OTR}).$$

Pošto se vrednost dobijena iz OTR slaže sa posmatranjima do na 8% , ovaj rezultat je prihvatljiv ako zahtevamo $(3\omega + 4)/(3\omega + 6) \simeq 0.92$, tj.

$$\omega \gtrsim 6.$$

Detaljno poredjenje predvidjanja ove teorije sa eksperimentalnim podacima može se naći u standardnim udžbenicima (Weinberg, 1972).

Veza sa Vajlovom teorijom. Interesantno je razmotriti u kakvoj je vezi BD teorija sa Vajlovom teorijom gravitacije u Rimanovom prostoru V_4. Skalarno polje ϕ u dejstvu $(D.2)$ ima težinu $w = -2$, pa je pogodno preći na novo skalarno polje, $\varphi^2 = \phi$, koje ima težinu $w = -1$. Tada dejstvo $(D.2)$ dobija oblik

$$I_{BD} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\varphi^2 R + 4\omega g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + 16\pi\mathcal{L}_M\right). \tag{$D.6$}$$

U odsustvu materije ovo dejstvo je invarijantno u odnosu na lokalno Vajlovo reskaliranje

$$g_{\mu\nu} \to e^{2\lambda}g_{\mu\nu}\,, \qquad \varphi \to e^{-\lambda}\varphi\,,$$

ako parametar ω ima vrednost

$$\omega = -\tfrac{3}{2}\,, \tag{$D.7$}$$

što sledi iz (4.46). Za negativno ω, medjutim, drugi deo dejstva (D.6) ima negativan znak, pa energija skalarnog polja postaje negativna. Pošto Vajlova invarijantnost odredjuje samo relativan znak prva dva člana, zahtev pozitivnosti energije polja φ i polja materije dovodi do modifikovanog dejstva (D.6):

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}\,\big(\varphi^2 R + 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + 16\pi\mathcal{L}_M\big)\,. \tag{$D.8$}$$

(Alternativni zahtev da energija gravitacionog polja bude pozitivna promenio bi znak prva dva člana.)

Ako želimo da u posmatranom slučaju uključimo materiju na isti način kao u BD teoriji, dolazi do problema. Jednačine kretanja u prisustvu skalarne materije imaju oblik

$$\begin{aligned} &\big(\Box - \tfrac{1}{6}R\big)\varphi = 0\,,\\ &\varphi^2 G_{\mu\nu} + 6\theta_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu} = 0\,, \end{aligned} \tag{$D.9$}$$

gde je $\theta_{\mu\nu}$ poboljšan TEI skalarnog polja:

$$\theta_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\tfrac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \tfrac{1}{6}(D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\varphi^2\,.$$

Trag druge jednačine ima oblik

$$6\varphi\big(\Box - \tfrac{1}{6}R\big)\varphi + 8\pi T = 0\,,$$

odakle sledi, uz pomoć prve jednačine, da trag TEI materije mora biti nula. Ovaj zahtev konzistentnosti znači da dejstvo za materiju mora, takodje, biti invarijantno u odnosu na Vajlovo reskaliranje, što *nije* slučaj u BD teoriji, gde materija ima masu.

Da bi razrešio ovaj problem, Dezer (Deser, 1970) je predložio da se dejstvu (D.8) doda maseni član za polje φ čime se eksplicitno narušava Vajlova invarijantnost, posle čega uslov iščezavanja traga TEI materije prelazi u konzistentnu relaciju

$$12m^2\varphi^2 + 8\pi T = 0\,.$$

Druga mogućnost je da sačuvamo Vajlovu simetriju čitave teorije, čime se bitno odstupa od originalne BD ideje. Algebarska zavisnost jednačina kretanja za $g_{\mu\nu}$ i φ samo je posledica Vajlove invarijantnosti. Tada, naravno, skalarno polje nema pravu dinamičku ulogu, i može se eliminisati iz teorije reskaliranjem dinamičkih varijabli. Da bismo to jasno videli, posmatrajmo dejstvo (D.8) u odsustvu materije. Posle Vajlove transformacije sa parametrom $\lambda = \ln\varphi$, polje φ prelazi u $\bar{\varphi} = e^{-\lambda}\varphi = 1$, pa se čitava teorija svodi na OTR u prostoru sa metrikom $\bar{g}_{\mu\nu} = \varphi^2 g_{\mu\nu}$,

$$\int d^4x\sqrt{-g}\left(\varphi^2 R + 6g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\right) = \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\,R(\bar{g}) ,$$

a skalarno polje je nestalo kao poseban stepen slobode. Prisustvo Vajl–invarijantnog dejstva materije ne menja ovaj zaključak (Anderson, 1971). Naravno, kad dejstvo I_M nema ovu invarijantnost, situacija je drugačija: polje φ se pojavljuje u I_M, pa ekvivalentnost sa OTR više ne važi.

Ako skalarno polje nije odredjeno dinamički, razmatrana je mogućnost da se vrednost ovog polja odredi uslovima eksperimenta; tada bi "kosmološka" skala mogla biti različita od "atomske", što daje mogućnost teorijske interpretacije hipoteze velikih brojeva (Canuto, Adams, Hsieh i Tsiang, 1976).

Tako vidimo da modifikovana BD teorija sa $\omega = -\frac{3}{2}$ predstavlja jednu varijantu skalarno–tenzorske teorije, u kojoj je uloga skalarnog polja bitno različita od one u originalnoj BD teoriji.

Diskusija. U slučaju kad se posmatra materija čiji spin nije zanemarljiv, prirodno je da se BD teorija (D.2) uopšti na Riman–Kartanov prostor U_4 (Kim, 1986). Interesantna osobina ovog modela je da se u njemu pojavljuje netrivijalna torzija i kad je polje materije bez spina — izvor torzije je gradijent skalarnog polja.

Neke karakteristike teorije se mogu jasno uočiti i na najprostijem dejstvu oblika

$$I = -\int d^4x\sqrt{-g}\,\phi R , \qquad w(\phi) = -2 . \qquad (D.10)$$

I ovde je torzija data preko izvoda skalarnog polja. Zanimljivo je da se, posle eliminacija torzije iz dejstva pomoću jednačina kretanja, dobija Vajl–invarijantno dejstvo za skalarno polje koje je ekvivalentno sa OTR u $V_4(\bar{g})$, $\bar{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$. Ova invarijantnost dejstva, posle eliminacije torzije, posledica je skrivene simetrije polazne teorije (German, 1985).

Posmatranje dejstva (D.10) u Vajlovom prostoru W_4 ne daje ništa novo: Vajlov vektor φ_μ se, uz pomoć jednačina kretanja, može izraziti preko gradijenta skalarnog polja, a njegova eliminacija iz polaznog dejstva dovodi do teorije koja je, opet, ekvivalentna sa Ajnštajnovom (Smalley, 1986).

Pokušavajući da teorijski zasnuje hipotezu velikih brojeva Dirak (Dirac, 1973) je posmatrao dejstvo oblika (D.8) u Vajlovom prostoru W_4. Ovo dejstvo je invarijantno u odnosu na Vajlovo reskaliranje (4.31). Može se pokazati da je i u ovom slučaju skalarno polje nedinamičko, t.j. dekuplovano od drugih dinamičkih varijabli (Pietenpol, Incoul i Speiser, 1974).

Zadaci

1. Koristeći jednačine kretanja BD teorije pokazati da TEI materije $T_{\mu\nu}$ zadovoljava jednačinu $D^{\mu}T_{\mu\nu}=0$.
2. Naći trag TEI materije u teoriji opisanoj dejstvom (D.8) kome je dodat maseni član za skalarno polje.
3. Naći transformaciju dejstva za OTR pri Vajlovom reskaliranju $g_{\mu\nu}\to\phi g_{\mu\nu}$. Dobijeni rezultat napisati preko φ, gde je $\phi=\varphi^2$.
4. Naći izraz za torziju iz jednačina kretanja teorije (D.10) u prostoru U_4.
5. Naći Vajlov vektor iz jednačina kretanja teorije (D.10) u prostoru W_4.

E. AŠTEKAROVA FORMULACIJA GRAVITACIJE

Nesklad izmedju kvantne teorije i gravitacije predstavlja jednu od najvećih misterija današnje fizike. Perturbativni metodi teorije polja, koji su bili veoma uspešni pri razmatranju negravitacionih pojava, pokazali su se kao neadekvatni za rešavanje problema kvantne OTR (perturbativna nerenormalizabilnost). Zato je korisno razmotriti mogućnost neperturbativog razumevanja ove teorije. Jedan od standardnih pristupa ovog tipa je metod Hamiltonove (kanonske) analize. Ovaj metod obično nailazi na velike teškoće pri analizi OTR zbog pojave komplikovanih veza posle eliminacije koneksije iz teorije (geometro–dinamika). U Aštekarovom formalizmu koneksija ostaje osnovna varijabla teorije (konekso–dinamika), a veze postaju jednostavnije prelazom na nove, kompleksne varijable (Ashtekar, 1988; 1991). Glavno uprošćenje se sastoji u tome što veze, kao i hamiltonijan, postaju *polinomijalne* funkcije kanonskih varijabli. Zbog toga je ovaj pristup od samog početka privukao dosta pažnje.

Gravitacija je, kao lokalno invarijantna teorija, prirodno formulisana preko tetrada i koneksija. Zato se Aštekarova formulacija OTR može shvatiti kao kanonska transformacija Ajnštajn–Kartanove teorije bez materije u oblast kompleksnih varijabli (Kamimura i Fukuyama, 1990). Za razumevanje ove veze korisno je, najpre, razmotriti Hamiltonovu strukturu pogodno reformulisane AK teorije, u kojoj se koneksija lako može eliminisati.

Tetradna formulacija AK teorije. U glavi V smo analizirali AK teoriju bez materije, definisanu Hilbert–Palatinijevim (HP) dejstvom $I_{HP}=-a\int d^4xbR$. Tada smo pomenuli da postoji kanonski ekvivalentna formulacija odredjena dejstvom

$$I'_{HP}=a\int d^4x\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}_{mnkl}\big[-\partial_\mu(b^k{}_\lambda b^l{}_\rho)A^{mn}{}_\nu+b^k{}_\lambda b^l{}_\rho A^m{}_{s\mu}A^{sn}{}_\nu\big]\,, \qquad (E.1)$$

u kome su izvodi koneksije A eliminisani dodavanjem četvorodivergencije. Ova formulacija daje mogućnost da se u Hamiltonovoj analizi komponente koneksije (i odgovarajući impulsi) jednostavno izraze preko $(b^i{}_\mu, \pi_i{}^\mu)$ korišćenjem veza, posle čega se dobija tzv. tetradna formulacija teorije.

Iz dejstva $(E.1)$ se dobijaju sigurne primarne veze $\pi_i{}^0 \approx 0$ i $\pi_{ij}{}^0 \approx 0$, kao i dodatne primarne veze:

$$\begin{aligned} &\phi_i{}^\alpha \equiv \pi_i{}^\alpha + a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^j{}_\beta A^{mn}{}_\gamma \approx 0\,, \\ &\pi_{ij}{}^\alpha \approx 0\,. \end{aligned} \tag{$E.2$}$$

Poredjenjem ovih relacija sa (5.48) vidimo da se posmatrana teorija može dobiti iz HP formulacije sledećom kanonskom transformacijom:

$$\begin{aligned} \pi_i{}^\alpha &\to \pi_i{}^\alpha + a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^j{}_\beta A^{mn}{}_\gamma\,, \\ \pi_{ij}{}^\alpha &\to \pi_{ij}{}^\alpha + a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^m{}_\beta b^n{}_\gamma\,, \end{aligned}$$

dok polja $b^i{}_\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ ostaju ista.

Pošto je lagranžijan linearan po brzinama $\dot{b}^i{}_\mu$, kanonski hamiltonijan je dat izrazom $\mathcal{H}_c = -\mathcal{L}(\dot{b} = 0)$. Eksplicitan račun daje rezultat

$$\mathcal{H}_c = b^i{}_0\mathcal{H}_i - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\mathcal{H}_{ij} + D^\alpha{}_{,\alpha}\,, \tag{$E.3a$}$$

gde je

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_i = -\tfrac{1}{2}a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^j{}_\alpha R^{mn}{}_{\beta\gamma}\,, \qquad \mathcal{H}_{ij} = -a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^m{}_\alpha T^n{}_{\beta\gamma}\,, \\ &D^\alpha = -a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn}\, b^m{}_\beta b^n{}_0 A^{ij}{}_\gamma\,. \end{aligned} \tag{$E.3b$}$$

Uočavamo da su izrazi $\mathcal{H}_i$ i $\mathcal{H}_{ij}$ isti kao u slučaju HP formulacije. Ovo nas ne iznenadjuje, s obzirom na to da su ove veličine invarijantne u odnosu na posmatrane kanonske transformacije.

Prelazeći na totalni hamiltonijan,

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + u^i{}_0\pi_i{}^0 + \tfrac{1}{2}u^{ij}{}_0\pi_{ij}{}^0 + u^i{}_\alpha\phi_i{}^\alpha + \tfrac{1}{2}u^{ij}{}_\alpha\pi_{ij}{}^\alpha\,,$$

dobijamo uslove konzistentnosti sigurnih primarnih veza:

$$\mathcal{H}_i \approx 0\,, \qquad \mathcal{H}_{ij} \approx 0\,. \tag{$E.4a$}$$

Mada su veze $\phi_i{}^\alpha$ i $\pi_{ij}{}^\alpha$ različite od odgovarajućih HP izraza, njihovi uslovi konzistentnosti ostaju isti:

$$\begin{aligned} \chi_i{}^\alpha &\equiv \tfrac{1}{2}a\varepsilon^{\alpha0\beta\gamma}_{ijmn}\,(b^j{}_0 R^{mn}{}_{\beta\gamma} - 2b^j{}_\beta \underline{R}^{mn}{}_{0\gamma}) \approx 0\,, \\ \chi_{ij}{}^\alpha &\equiv -a\varepsilon^{\alpha0\beta\gamma}_{ijmn}\,(b^m{}_0 T^n{}_{\beta\gamma} - 2b^m{}_\beta \underline{T}^n{}_{0\gamma}) \approx 0\,, \end{aligned} \tag{$E.4b$}$$

gde crte ispod $R^{mn}{}_{0\gamma}$ i $T^n{}_{0\gamma}$ imaju isto značenje kao u glavi V (u daljem izlaganju izostavićemo pisanje ovih crta).

Kombinacijom uslova $(-\mathcal{H}_i, \chi_i{}^\alpha)$ i $(\mathcal{H}_{ij}, \chi_{ij}{}^\alpha)$ dobijaju se relacije

$$\begin{aligned} &h_k{}^\mu R^k{}_i - \tfrac{1}{2} h_i{}^\mu R \approx 0\,, \\ &T^k{}_{\mu\nu} \approx 0\,, \end{aligned}$$

koje prepoznajemo kao Ajnštajnove jednačine za gravitaciono polje bez prisustva materije. Od ukupno 16+24 ovih jednačina 4+12 su veze ($\mathcal{H}_i \approx 0$ i $T^k{}_{\alpha\beta} \approx 0$), dok preostalih 12+12 služe za odredjivanje 30 množitelja $u^{ij}{}_\alpha$ i $u^k{}_\alpha$ ($\chi_i{}^\alpha \approx 0$ i $T^k{}_{0\alpha} \approx 0$).

Uslovi konzistentnosti sekundarnih veza ne daju nove veze. Zaista, uslov konzistentnosti za $\mathcal{H}_i$ je automatski ispunjen, dok uslov konzistentnosti veze $T^k{}_{\alpha\beta} \approx 0$ daje dodatne jednačine za odredjivanje množitelja $u^{ij}{}_\alpha$.

Medju primarnim vezama ima 10 veza prve klase $(\pi_i{}^0, \pi_{ij}{}^0)$ i 30 druge klase $(\phi_i{}^\alpha, \pi_{ij}{}^\alpha)$; od ukupno 4+12 sekundarnih veza, njih 4+6 su prve klase $(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_{ij})$, a preostalih 6 su druge klase ($\mathcal{H}_{ij}$ i 6 veza druge klase su ujedinjene u $T^k{}_{\alpha\beta} \approx 0$).

Analizu mogućnosti eliminacije koneksija i odgovarajućih impulsa iz teorije izvršićemo koristeći vremenski gradijentni uslov, $b^0{}_\alpha \approx 0$. U tom slučaju i veze $\mathcal{H}_{0a}$ postaju efektivno druge klase. Pokazaćemo da se korišćenjem 36+6 veza $(\phi_i{}^\alpha, \pi_{ij}{}^\alpha, T^a{}_{\alpha\beta}, b^a{}_0)$ iz teorije mogu eliminisati polja $(b^0{}_\alpha, A^{ij}{}_\alpha)$ i odgovarajući impulsi.

Kad je zadat vremenski gradijentni uslov, veze $\phi_i{}^\alpha$ se uprošćavaju:

$$\begin{aligned} \phi_0{}^\alpha &\approx \pi_0{}^\alpha + a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{ebc}\, b^e{}_\beta A^{bc}{}_\gamma\,, \\ \phi_a{}^\alpha &\approx \pi_a{}^\alpha - 2a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc}\, b^b{}_\beta A^{c0}{}_\gamma\,, \end{aligned}$$

gde je $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \equiv \varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}$, $\varepsilon_{abc} \equiv \varepsilon_{0abc}$. Korišćenjem 6+18 veza $b^0{}_\alpha \approx 0$, $\phi_0{}^\alpha \approx 0$, $T^a{}_{\alpha\beta} \approx 0$ i $\pi_{ab}{}^\alpha \approx 0$, lako se eliminišu polja $(b^0{}_\alpha, A^{ab}{}_\alpha)$ i odgovarajući impulsi:

$$\begin{aligned} &b^0{}_\alpha \approx 0\,, &&\pi_0{}^\alpha \approx -a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{ebc}\, b^e{}_\beta A^{bc}{}_\gamma\,, \\ &A^{ab}{}_\alpha \approx \Delta^{ab}{}_\alpha\,, &&\pi_{ab}{}^\alpha \approx 0\,. \end{aligned}$$

Da bismo eksplicitno rešili vezu $\phi_a{}^\alpha$ po koneksiji $A^{c0}{}_\gamma$, korisno je uvesti kanonsku transformaciju $(b^a{}_\alpha, A^{0b}{}_\beta) \to (E_a{}^\alpha, P^b{}_\beta)$:

$$E_a{}^\alpha \equiv -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc} b^b{}_\beta b^c{}_\gamma\,, \qquad \pi_a{}^\alpha \equiv -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc} b^b{}_\beta P^c{}_\gamma,. \tag{E.5}$$

Koristeći nove varijable, veza $\phi_a{}^\alpha$ dobija prost oblik $P^c{}_\gamma + 2aA^{c0}{}_\gamma \approx 0$, pa se iz preostalih 18 jednačina $\phi_a{}^\alpha \approx 0$ i $\pi_{a0}{}^\alpha \approx 0$ lako mogu eliminisati varijable $(A^{0a}{}_\alpha, \pi_{0a}{}^\alpha)$:

$$A^{0a}{}_\alpha \approx \frac{1}{2a} P^a{}_\alpha \,, \qquad \pi_{0a}{}^\alpha \approx 0 \,.$$

Napomenimo da je zbog korišćenja vremenskog gradijentnog uslova varijabla $A^{0b}{}_0$, takodje, odredjena. Zaista, iz zahteva konzistentnosti gradijentnog uslova sledi $\dot{b}^0{}_\alpha = u^0{}_\alpha \approx 0$, gde je $u^0{}_\alpha$ odredjeno relacijom $T^0{}_{0\alpha} \approx 0$. Tako se dobijaju dodatni uslovi

$$A^0{}_{c0} b^c{}_\alpha \approx \partial_\alpha b^0{}_0 + \frac{1}{2a} P_{c\alpha} b^c{}_0 \qquad \pi_{b0}{}^0 \approx 0 \,,$$

koji nemaju značaj za odredjivanje oblika veza prve klase, pošto $\mathcal{H}_i$ i $\mathcal{H}_{ab}$ ne zavise od $A^{0a}{}_0$.

Posle zadavanja vremenskog gradijentnog uslova veze prve klase $\mathcal{H}_i$ i $\mathcal{H}_{ab}$ dobijaju prostiji oblik:

$$\begin{aligned} M_a &\equiv -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{abc}\mathcal{H}^{bc} = a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} T^0{}_{\alpha\beta} b_{a\gamma} \,, \\ -(1/a)\mathcal{H}_0 &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc} b^a{}_\alpha \big(\partial_\beta A^{bc}{}_\gamma + A^b{}_{e\beta} A^{ec}{}_\gamma + A^b{}_{0\beta} A^{0c}{}_\gamma\big) \,, \\ \mathcal{H}_a &= 2a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc} b^b{}_\alpha \big(\partial_\beta A^{c0}{}_\gamma + A^c{}_{d\beta} A^{d0}{}_\gamma\big) \,. \end{aligned} \tag{E.6}$$

One su *polinomijalne* po osnovnim kanonskim varijablama, kako starim, tako i novim (do na multiplikativan faktor J^{-1}). Ova osobina nestaje posle eliminacije koneksije, uz pomoć veza druge klase. Eliminacijom $A^{0b}{}_\alpha$ i $A^{ab}{}_\alpha$ veze $\mathcal{H}_{ab}$ i $\mathcal{H}_a$ dobijaju oblik

$$\begin{aligned} M_a &= -\varepsilon_{abc} P^b{}_\alpha E^{c\alpha} \,, \\ \mathcal{H}_a &= J^{-1}\Big[E_a{}^\gamma E_b{}^\beta \big(\partial_\beta P^b{}_\gamma - \partial_\gamma P^b{}_\beta\big) + P_{a\beta} E_b{}^\beta \partial_\alpha E^{b\alpha}\Big] \,, \end{aligned} \tag{E.7a}$$

Prelazeći, dalje, na vezu $\mathcal{H}_0$ uočavamo da se njen prvi član može napisati u obliku $2\partial_\beta\big(J^{-1} E_b{}^\beta \partial_\alpha E^{b\alpha}\big) + 2\partial_\beta\big(E_b{}^\beta h_c{}^\gamma\big)\Delta^{bc}{}_\gamma$. Polovina drugog dela ovog izraza krati se sa $\Delta^b{}_{e\beta}\Delta^{ec}{}_\gamma$, tako da je konačan rezultat oblika

$$\begin{aligned} -(1/a)\mathcal{H}_0 = 2\partial_\beta\big(J^{-1} E_b{}^\beta \partial_\alpha E^{b\alpha}\big) &+ \frac{1}{4a^2}\varepsilon^{abc}\big(J^{-1} E_b{}^\beta E_a{}^\gamma\big)\big(\varepsilon_{cef} P^e{}_\beta P^f{}_\gamma\big) \\ &+ \partial_\beta\big(J^{-1} E_b{}^\beta E_c{}^\gamma\big)\Delta^{bc}{}_\gamma \,. \end{aligned} \tag{E.7b}$$

Veze M_a i $J\mathcal{H}_a$ ostaju i dalje polinomi na redukovanom skupu novih kanonskh varijabli. Nažalost, to nije slučaj sa $\mathcal{H}_0$, i to kako zbog prisustva zadnjeg člana, tako i zbog pojave faktora J^{-1}. U narednom izlaganju videćemo kako se prelazom na *kompleksne* kanonske varijable sve veze PK mogu dovesti na *polinomijalni* oblik, čime se pojednostavljuju neki aspekti kanonske strukture teorije.

Aštekarov formalizam. Kanonski formalizam kompleksnih varijabli jednostavno se može dobiti dodavanjem imaginarne četvorodivergencije običnom lagranžijanu. Mada je dejstvo kompleksno, ono na korektan način opisuje *realnu* teoriju, jer se jednačine kretanja ne menjaju. Kanonske varijable postaju kompleksne, no, njihova struktura nije proizvoljna, već je tačno odredjena oblikom imaginarne četvorodivargencije (koja definiše kanonsku transformaciju). Zato postoje veze izmedju varijabli i njihovih kompleksno konjugovanih vrednosti. Ove veze, ili *uslovi realnosti*, predstavljaju činjenicu o kojoj se mora posebno voditi računa.

Koristeći ovaj metod, pokazaćemo da se Aštekarova formulacija može dobiti polazeći od kompleksnog dejstva

$$I_A = I'_{HP} - a \int d^4x \, i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu(b^k{}_\nu \partial_\lambda b_{k\rho}) \,. \tag{E.8}$$

Imaginarna četvorodivergencija u dejstvu ima za posledicu pojavu kompleksnih impulsa, što se vidi iz oblika primarnih veza:

$$\begin{aligned} &\phi_i{}^\alpha \equiv \pi_i{}^\alpha + a\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}_{ijmn} b^j{}_\beta A^{mn}{}_\gamma + 2ia\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}\partial_\beta b_{i\gamma} \approx 0 \,, \\ &\pi_{ij}{}^\alpha \approx 0 \,. \end{aligned} \tag{E.9a}$$

Kako je imaginarni deo dejstva linearan po brzinama, kanonski hamiltonijan esencijalno zadržava oblik $(E.3)$: jedini efekat se ogleda u promeni $D^\alpha \to D^\alpha + ia\varepsilon^{\alpha\nu\lambda\rho}(b^k{}_\nu\partial_\lambda b_{k\rho})$. Imaginarni deo u vezama, koji zavisi samo od polja (a ne i od impulsa), ne menja ranija razmatranja uslova konzistentnosti teorije, pa se kao rezultat opet dobijaju relacije $(E.4a, b)$. Ovi rezultati se mogu razumeti i kao posledica činjenice da posmatrana kanonska transformacija deluje samo na impulse, pa zato svi izrazi, koji ne zavise od impulsa, ostaju isti. Naravno, oni se mogu dobiti i direktnim računom. Prema tome, jedina važna promena u odnosu na odgovarajuću realnu formulaciju javlja se u *obliku primarnih veza* $(E.9a)$ koje definišu kanonske impulse.

U daljim razmatranjima koristićemo, zbog jednostavnosti izlaganja, vremenski gradijentni uslov, posle čega primarne veze dobijaju oblik

$$\begin{aligned} &\phi_0{}^\alpha \approx \pi_0{}^\alpha + a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{ebc}\, b^e{}_\beta A^{bc}{}_\gamma \,, \\ &\phi_a{}^\alpha \approx \pi_a{}^\alpha - 2a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc}\, b^b{}_\beta A^{c0}{}_\gamma + 2ia\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma}\partial_\beta b_{a\gamma} \,. \end{aligned} \tag{E.9b}$$

Za dalje izlaganje korisno je uvesti pojam samo–dualnosti. Izostavljajući pisanje prostorno–vremenskog indeksa, definišimo, najpre, operaciju dualnosti: ${}^*A^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijmn}A_{mn}$, pri čemu je ${}^{**}A^{ij} = -A^{ij}$. Za svaku koneksiju postoji razlaganje $A^{ij} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_+^{ij} + \mathcal{A}_-^{ij})$, gde su

$$\mathcal{A}_\pm^{ij} = A^{ij} \mp i\,{}^*A^{ij} \tag{E.10a}$$

samo–dualni $(+)$ i anti–samo–dualni $(-)$ deo koneksije. Ovi delovi su *kompleksne* veličine koje zadovoljavaju uslove ${}^*\mathcal{A}_\pm^{ij} = \pm i\mathcal{A}_\pm^{ij}$. Samo–dualni i anti–samo–dualni delovi su ortogonalni, $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{ij} \equiv \mathcal{A}_+^{im}\mathcal{B}_{-m}{}^j = 0$, iz čega sledi $[\mathcal{A},\mathcal{B}]^{ij} = [\mathcal{A}_+,\mathcal{B}_+]^{ij} + [\mathcal{A}_-,\mathcal{B}_-]^{ij}$. Ova relacija izražava činjenicu da se kompleksifikacija Lorencove algebre razdvaja na samo–dualnu i anti–samo–dualnu podalgebru: $so(1,3,C) = so(3) \oplus so(3)$. U daljem razmatranju koristićemo jedino samo–dualnu koneksiju, pa ćemo zbog jednostavnosti izostaviti pisanje indeksa $+$.

Pri važenju vremenskog gradijentnog uslova kompleksna samo–dualna koneksija ima oblik

$$\mathcal{A}^{a0}{}_\alpha = A^{a0}{}_\alpha + \tfrac{1}{2}i\varepsilon^{abc}\Delta_{bc\alpha}\,. \tag{E.10b}$$

Koristeći ovu koneksiju veze $\phi_a{}^\alpha$ se mogu izraziti u obliku

$$\phi_a{}^\alpha = \pi_a{}^\alpha - 2a\varepsilon_{abc}^{\alpha\beta\gamma}b^b{}_\beta\mathcal{A}^{c0}{}_\gamma\,.$$

Treba primetiti da ovo nije slučajno: imaginarni deo u dejstvu je izabran upravo tako da se u ovoj vezi pojavi kompleksna samo–dualna koneksija.

Posle kanonske transformacije $(E.5)$ veza $\phi_a{}^\alpha$ dobija jednostavan oblik $P^a{}_\alpha + 2a\mathcal{A}^{a0}{}_\alpha \approx 0$, koji se može rešiti po koneksiji $A^{0a}{}_\alpha$:

$$A^{0a}{}_\alpha = \frac{1}{2a}P^a{}_\alpha + \frac{i}{2}\varepsilon^{aef}\Delta_{ef\alpha}\,.$$

Sada ćemo naći oblik preostalih veza PK $(E.6)$ preko novih varijabli. Pogledajmo, najpre, vezu M_a. Koristeći prethodnu relaciju i definiciju $T^0{}_{\alpha\beta}$ dobija se

$$(1/2a)M_a = i\nabla_\alpha E_a{}^\alpha\,, \qquad \nabla_\alpha E_a{}^\alpha \equiv \partial_\alpha E_a{}^\alpha + \frac{i}{2a}\varepsilon_{abc}P^b{}_\alpha E^{c\alpha}\,. \tag{E.11a}$$

Posle eliminacije koneksije, prvi član na desnoj strani veze $-(1/a)\mathcal{H}_0$ dobija oblik $2\partial_\beta\big(J^{-1}E_b{}^\beta\partial_\alpha E^{b\alpha}\big) + 2\partial_\beta\big(E_b{}^\beta h_c{}^\gamma\big)\Delta^{bc}{}_\gamma$. Kombinujući prvi deo ovog izraza sa članovima koji su linearni i kvadratični po $P^c{}_\gamma$, a koji potiču od $A^b{}_{0\beta}A^{0c}{}_\gamma$,

$$\varepsilon_{abc}^{\alpha\beta\gamma}b^a{}_\alpha\left(-\frac{1}{4a^2}P^b{}_\beta P^c{}_\gamma - \frac{i}{2a}\varepsilon^{bef}\Delta_{ef\beta}P^c{}_\gamma + \frac{1}{4}\varepsilon^{bef}\Delta_{ef\beta}\varepsilon^{cdg}\Delta_{dg\gamma}\right)\,,$$

i uzimajući u obzir da se svi ostali doprinosi medjusobno krate, dobija se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= i\partial_\beta\big(J^{-1}E_b{}^\beta M^b\big) - \frac{i}{2}\varepsilon^{abc}\big(J^{-1}E_a{}^\beta E_b{}^\gamma\big)F_{c\beta\gamma}\,, \\ F_{c\beta\gamma} &\equiv \partial_\beta P_{c\gamma} - \partial_\gamma P_{c\beta} + \frac{i}{2a}\varepsilon_{cef}P^e{}_\beta P^f{}_\gamma\,. \end{aligned} \qquad (E.11b)$$

Treba istaći da je za dobijanje ovog rezultata bitan doprinos imaginarnog dela koneksije.

Posle eliminacije koneksije u vezi $\mathcal{H}_a$, doprinos članova linearnih po $P^a{}_\alpha$ postaje

$$\begin{aligned} J^{-1}\big[-E_a{}^\beta E_c{}^\gamma F^c{}_\beta\gamma + \big(P_{a\beta} + ia\varepsilon_{aef}\Delta^{ef}{}_\beta\big)E_b{}^\beta(\nabla_\alpha E^{b\alpha})\big]& \\ - J^{-1}ia\varepsilon_{aef}\Delta^{ef}{}_\beta E_b{}^\beta\partial_\alpha E^{b\alpha}&\,. \end{aligned}$$

U ovom izrazu se pojavljuju i članovi kvadratični po $P^a{}_\alpha$, ali se oni medjusobno krate. Posle skraćivanja zadnjeg dela ovog izraza sa preostalim doprinosima iz $\mathcal{H}_a$, dobija se, konačno,

$$\mathcal{H}_a = J^{-1}\left[E_a{}^\gamma E_b{}^\beta F^b{}_{\beta\gamma} - \frac{i}{2a}\big(P_{a\beta} + ia\varepsilon_{aef}\Delta^{ef}{}_\beta\big)E^{b\beta}M_b\right]. \qquad (E.11c)$$

Sumirajući dosadašnje rezultate, možemo zaključiti da posle eliminacije koneksija iz veza druge klase u teoriji preostaju sledeće veze prve klase:

$$\begin{aligned} &G_0 \equiv -\tfrac{1}{2}i\varepsilon^{abc}E_a{}^\alpha E_b{}^\beta F_{c\alpha\beta}\,, \\ &G_\alpha \equiv E^{b\beta}F_{b\beta\alpha}\,, \qquad\qquad M_a \equiv 2ia\nabla_\alpha E_a{}^\alpha\,, \end{aligned} \qquad (E.12)$$

koje su izražene *polinomijalno* preko kompleksnih varijabli $E_a{}^\alpha$ i $P^a{}_\alpha$.

Polazeći od relacija

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= J^{-1}G_0 + i\partial_\beta(J^{-1}E^{b\beta}M_b)\,, \\ \mathcal{H}_a &= J^{-1}\left[E_a{}^\alpha G_\alpha - \frac{i}{2a}\big(P_{a\beta} + ia\varepsilon_{aef}\Delta^{ef}{}_\beta\big)E^{b\beta}M_b\right]. \end{aligned}$$

nije teško zapisati kanonski hamiltonijan u obliku

$$\mathcal{H}_c = NG_0 + N^\alpha G_\alpha + \Lambda^a M_a\,, \qquad (E.13)$$

gde su N i N^α realni, a Λ^a *kompleksan* množitelj.

Upotreba kompleksnih varijabli zahteva posebnu analizu *uslova realnosti* u teoriji. Prelaz na kompleksno dejstvo, u kome su polja $b^i{}_\mu$ i $A^{ij}{}_\mu$ realne varijable, ogleda se u činjenici da je impuls $\pi_a{}^\alpha$ postao kompleksan. Uočavamo da se u vezama ovaj impuls uvek pojavljuje u realnoj kombinaciji

${\pi_a}^{\alpha} + 2ia\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta b_{a\gamma}$. Zato su sve veze realne, pa je takav i kanonski i totalni hamiltonijan. Realne veze su, medjutim, nepolinomijalne. Prelaz na polinomijalne veze M_a, $\mathcal{H}_a$ i $\mathcal{H}_0$ realizovan je uvodjenjem kompleksnih varijabli. Hamiltonijan postaje linearna kombinacija kompleksnih veza sa kompleksnim množiteljima, što se vidi iz $(E.13)$. Važno je imati na umu da je hamiltonijan *realna* veličina, što je posledica činjenice da kompleksne veze i množitelji u $(E.13)$ nisu proizvoljne kompleksne funkcije, već zadovoljavaju odredjene uslove realnosti. Tako, na primer, pošto je ${P^a}_\alpha + ia\varepsilon^{aef}\Delta_{ef\alpha}$ realna veličina, uslov realnosti za ${P^a}_\alpha$ ima oblik

$$
{{P^a}_\alpha}^+ = {P^a}_\alpha + 2ia\varepsilon^{aef}\Delta_{ef\alpha}(E)\,, \tag{$E.14$}
$$

a slični uslovi postoje za veze M_a, $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_0$ i množitelj Λ^a. Ovako napisani uslovi su nepolinomijalni; oni se, medjutim, mogu prevesti na ekvivalentan oblik koji je polinomijalan.

Iz same činjenice da su veze polinomijalne, nije lako zaključiti koliko je to značajno za teoriju. Razmatranje kvantnih fizičkih stanja, koja zadovoljavaju sve uslove koje nameću veze, dovelo je do rezultata da se ova stanja mogu konstruisati koristeći odredjene gradijentno–invarijantne varijable, koje su definisane preko integrala po petljama (zatvorenim linijama) od koneksije. Varijable ovog tipa su korišćene za opis neabelovih lokalno invarijantnih teorija, gde su poznate kao Vilsonove petlje. I pored velikih uloženih napora takav rezultat nije bilo moguće postići u standardnoj realnoj kanonskoj analizi OTR.

Osim pri razmatranju OTR bez materije, polinomijalne veze su dobijene i u slučaju prisustva nekih polja materije. Posebno je interesantno da je supergravitacija uspešno razmatrana na ovaj način. Kako naći fizička stanja u ovim slučajevima, nije dovoljno jasno.

Uopštenje metoda na više dimenzije izgleda dosta teško. Razlog se nalazi u tome što je pojam dualnosti koneksije specifičan za $d = 4$, a mogućnost uopštenja na $d > 4$ se ne vidi.

Prelaz na polinomijalne kompleksne veze praćen je uvodjenjem uslova realnosti, u kojima se odslikavaju složene karakteristike gravitacije. Mada dosadašnji rezultati ohrabruju, ostalo je dosta toga što treba uraditi pre nego što bi se mogao dati konačan zaključak o značaju ovog pristupa u rasvetljavanju strukture klasične i kvantne gravitacije.

Zadaci

1. Dokazati sledeće identitete u vremenskom gradijentnom uslovu:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}{b^a}_\alpha {b^b}_\beta {b^c}_\gamma = J\varepsilon^{abc}\,, &&\varepsilon^{abc}{h_a}^\alpha {h_b}^\beta {h_c}^\gamma = J^{-1}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\,,\\
&\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}{b^b}_\beta {b^c}_\gamma = J\varepsilon^{abc}{h_a}^\alpha\,, &&\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc}{b^b}_\beta {b^c}_\gamma = -2J{h_a}^\alpha\,,\\
&\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}{b^c}_\gamma = J\varepsilon^{abc}{h_a}^\alpha h_b^\beta\,, &&\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc}{b^c}_\gamma = -2Jh_{[a}{}^\alpha h_{b]}{}^\beta\,,
\end{aligned}
$$

2. Pokazati da su, u vremenskom gradijentnom uslovu, sledeće relacije tačne:

$$
\begin{aligned}
&E_a{}^\alpha = Jh_a{}^\alpha\,, \qquad P^a{}_\alpha = J^{-1}(b^a{}_\beta b^b{}_\alpha - \tfrac{1}{2}b^a{}_\alpha b^b{}_\beta)\pi_b{}^\beta\,,\\
&-2b^a{}_\alpha = J^{-1}\varepsilon^{abc}_{\alpha\beta\gamma}E_b{}^\beta E_c{}^\gamma\,,\\
&\partial_\alpha E^{a\alpha} = -J\Delta^{ab}{}_b\,, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{abc}b^b{}_\beta\big(\tfrac{1}{2}\varepsilon^{cef}\Delta_{ef\gamma}\big) = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta b_{a\gamma}\,.
\end{aligned}
$$

3. Neka tetradna polja na prostornoj beskonačnosti imaju asimptotiku koja odgovara Švarcšildovom rešenju:

$$
h_0{}^0 \sim 1 - \frac{M}{r}\,, \qquad h_a{}^\alpha \sim \delta^\alpha_a + \eta_{a\beta}\frac{x^\alpha x^\beta}{r^2}\frac{kM}{r}\,,
$$

gde je $r^2 = \delta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$. Pokazati da za realnu formulaciju zadanu dejstvom $(E.1)$ važi relacija $\int d^3x\,\partial_\alpha D^\alpha = M$.
4. Pokazati da su veze $(E.6)$ realne teorije polinomijalne po varijablama $E_a{}^\alpha$, $P^b{}_\beta$ i $A^{ab}{}_\gamma$, do na multiplikativan faktor J^{-1}.
5. Dokazati relacije $(E.11a,c)$ za veze M_a i $\mathcal{H}_a$. Smatrajući varijablu $P^a{}_\alpha$ realnom naći realne delove veza M_a i $\mathcal{H}_a$, i uporediti ih sa rezultatom $(E.7a)$ za realnu teoriju.
6. Dokazati relaciju $(E.11b)$ za vezu $\mathcal{H}_0$. Smatrajući varijablu $P^a{}_\alpha$ realnom naći $Re(\mathcal{H}_0)$ i uporediti sa rezultatom $(E.7b)$ za realnu teoriju. Objasniti neslaganje.
7. Izvesti oblik kanonskog hamiltonijana $(E.13)$ i naći eksplicitan oblik množitelja N, N^α i Λ^a.
8. Naći uslove realnosti za veze M_a, $\mathcal{H}_a$ i $\mathcal{H}_0$, kao i za množitelje N, N_α i Λ^a.
9. Naći Hamiltonove jednačine kretanja za $E_a{}^\alpha$ i $P^a{}_\alpha$ u slučaju kad su množitelji N^α i Λ^a jednaki nuli ("čista" vremenska evolucija).

F. LOKALNA SIMETRIJA I ALGEBRA VEZA

Kastelani je u okviru Hamiltonovog formalizma razvio algoritam za konstrukciju generatora lokalne simetrije na osnovu poznatog hamiltonijana i algebre veza (Castellani, 1982). Njegovi argumenti se mogu iskoristiti i u *obrnutom smeru*: U_4 teorija gravitacije poseduje lokalnu simetriju čiji su generatori nadjeni u glavi VI, pa se na osnovu toga mogu dobiti precizne informacije o algebri veza prve klase (Blagojević i Vasilić, 1987).

Dirak je našao algebru veza u proizvoljnoj kovarijantnoj teoriji, kao što je *metrička* gravitacija (Dirac, 1964). Isti rezultat je dobijen na bazi principa "nezavisnosti od puta" dinamičke evolucije (Teitelboim, 1973). Ovi "geometrijski" metodi su vrlo moćni i daju dubok uvid u strukturu teorije. No, oni ne mogu dati kompletnu informaciju o strukturi algebre veza, kao što je, na primer, prisustvo kvadrata veza u algebri, i moraju se dopuniti specifičnim dodatnim razmatranjima.

Algebra veza u U_4 teoriji, u slučaju kada nema dodatnih veza osim onih koje se odnose na lokalnu Poenkareovu simetriju, ima standardni oblik (6.1) i ne sadrži kvadrate veza. Sada ćemo pokazati da i u opštem slučaju algebra veza ima isti oblik, do na prisustvo primarnih veza prve klase i kvadrata i viših stepena veza. Zaključak sledi iz razmatranja uslova konzistentnosti na strukturu lokalnih generatora. U toku izlaganja postaće jasno da svi metodi, zasnovani na "geometrijskim" argumentima, imaju isti stepen neodredjenosti.

Hamiltonijan opšte teorije je oblika (5.44), a generator lokalne simetrije je dat izrazom (6.7), pri čemu funkcije $G^{(0)}, G^{(1)}$ zadovoljavaju uslove konzistentnosti

$$
\begin{aligned}
G_1 &= V_{PPK}\,, && (F.1a)\\
G_0 + \{G_1, H_T\} &= V_{PPK}\,, && (F.1b)\\
\{G_0, H_T\} &= V_{PPK}\,. && (F.1c)
\end{aligned}
$$

gde je V_{PPK} primarna veza prve klase, a jednakost označava jednakost do na veze tipa $\chi^n (n \geq 2)$, koje su prve klase. Stoga sve posledice ovih relacija imaju istu neodredjenost. Sada ćemo slediti "obratni" Kastelanijev metod, tj. poći ćemo od poznatog hamiltonijana i generatora, i ispitati kakve su posledice uslova konzistentnosti $(F.1)$ na algebru veza.

Prvi uslov primenjen na generator (6.7) daje odmah

$$
\pi_k{}^0, \pi_{ij}{}^0 = V_{PPK}\,. \qquad (F.2)
$$

Koristeći činjenicu da primarne veze ne zavise od nefizičkih varijabli $b^k{}_0$ i $A^{ij}{}_0$, lako se pokazuje da važi

$$
\{\pi_k{}^0, V'_{PPK}\} = V_{PPK}\,, \qquad \{\pi_{ij}{}^0, V'_{PPK}\} = V_{PPK}.
$$

Ako sve primarne veze podelimo na veze prve i druge klase (ϕ_1 i ϕ_2), a odgovarajuće množitelje označimo sa v i u_2, redom, totalni hamiltonijan se može napisati u obliku

$$
\widehat{\mathcal{H}}_T = \mathcal{H}_c + (v\phi_1) + (u_2\phi_2)\,. \qquad (F.3a)
$$

Uzimajući u obzir da je $G^0_{ij}, G^0_\alpha = V_{PPK}$, drugi uslov primenjen na G_{ij}, G_α i G_0 daje

$$
\begin{aligned}
&\int \{\pi_{ij}{}^0, (u_2\phi_2)'\} = V_{PPK}\,,\\
&\int \{b^k{}_\alpha \pi_k{}^0, (u_2\phi_2)'\} = V_{PPK}\,,\\
(u_2\phi_2) + &\int \{b^k{}_0 \pi_k{}^0, (u_2\phi_2)'\} = V_{PPK}\,.
\end{aligned}
$$

Rešavanjem ovih jednačina može se zaključiti da postoji izbor odredjenih množitelja u_2 takav da a) oni ne zavise od $A^{ij}{}_0$, i b) njihova zavisnost od $b^k{}_0$ data je samo preko N. Drugim rečima,

$$u_2 = N\Lambda_\perp(b^k{}_\alpha, A^{ij}{}_\alpha, \pi_k{}^\alpha, \pi_{ij}{}^\alpha)\,.$$

Iz ovoga sledi da se kanonski hamiltonijan može redefinisati uključenjem člana $u_2\phi_2$,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{H}}_c &= N\overline{\mathcal{H}}_\perp + N^\alpha\mathcal{H}_\alpha - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_0\mathcal{H}_{ij}\,,\\ \overline{\mathcal{H}}_\perp &\equiv \mathcal{H}_\perp + \Lambda_\perp\phi_2\,,\end{aligned}\tag{$F.3b$}$$

posle čega totalni hamiltonijan postaje

$$\widehat{\mathcal{H}}_T = \overline{\mathcal{H}}_c + (v\phi_1)\,.\tag{$F.3c$}$$

Treći uslov ima za posledicu dve grupe relacija. Zahtevajući da je uslov ($F.1c$) ispunjen za svaki množitelj v, deo $(v\phi_1)$ od $\widehat{\mathcal{H}}_T$ dovodi do

$$\begin{aligned}&\{\mathcal{H}_{ij}, \phi_1'\} = V_{PPK}\,,\\ &\{\mathcal{H}_\alpha - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\alpha\mathcal{H}_{ij}, \phi_1'\} = V_{PPK}\,,\\ &\{\mathcal{H}_c + (u_2\phi_2), \phi_1'\} = V_{PPK}\,,\\ &\{V_{PPK}, \phi_1'\} = V_{PPK}\,,\end{aligned}\tag{$F.4a$}$$

dok $\overline{H}_c$ daje

$$\begin{aligned}&\{\mathcal{H}_{ij}, \overline{H}_c\} = -2b_{[i0}\overline{\mathcal{H}}_{j]} - 2A^s{}_{[i0}\mathcal{H}_{j]s} + V_{PPK}\,,\\ &\{\mathcal{H}_\alpha - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_\alpha\mathcal{H}_{ij}, \overline{H}_c\} = b^k{}_{0,\alpha}\overline{\mathcal{H}}_k - \tfrac{1}{2}A^{ij}{}_{0,\alpha}\mathcal{H}_{ij} + V_{PPK}\,,\\ &\{\overline{\mathcal{H}}_c, \overline{H}_c\} = V_{PPK}.\end{aligned}\tag{$F.4b$}$$

Prva grupa uslova je trivijalno zadovoljena za $\phi_1' = \pi_k'{}^0, \pi_{ij}'{}^0$. Što se tiče dodatnih veza PK, za njih, odavde, slede neki uslovi, ali nas to ovde ne interesuje.

Analiza druge grupe uslova daje najinteresantnije posledice. Nalaženje eksplicitne zavisnosti levih strana jednačina ($F.4b$) od nefizičkih varijabli $b^k{}_0$ i $A^{ij}{}_0$, i poredjenje sa desnim stranama, dovodi direktno do algebre veza.

Leva strana prve jednačine u ($F.4b$) se može napisati u obliku

$$L_{ij} \equiv \{\mathcal{H}_{ij}, \overline{H}_c\} = \int b'^k{}_0\{\mathcal{H}_{ij}, \overline{\mathcal{H}}_k'\} - \tfrac{1}{2}\int A'^{kl}{}_0\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}_{kl}'\}\,,$$

pošto $\mathcal{H}_{ij}$ ne sadrži impulse ${\pi_k}^0, {\pi_{ij}}^0$. Rešenje za PZ ćemo tražiti u opštem obliku

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_{ij}, \overline{\mathcal{H}}'_k\} &= \Lambda_{ijk}\delta + {\Lambda_{ijk}}^\alpha \partial_\alpha \delta + \dots\,, \\
\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_{kl}\} &= \Lambda_{ijkl}\delta + {\Lambda_{ijkl}}^\alpha \partial_\alpha \delta + \dots\,,
\end{aligned}$$

gde koeficijenti Λ ne zavise od nefizičkih varijabli. Korišćenjem ovih relacija u L_{ij}, i poredjenjem sa desnom stranom jednačine, dobija se

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ijk} &= -2\eta_{k[i}\overline{\mathcal{H}}_{j]} + V_{PPK}\,, \qquad & {\Lambda_{ijk}}^\alpha &= V_{PPK}\,, \\
\Lambda_{ijkl} &= 4\eta_{[i[l}\mathcal{H}_{j]k]} + V_{PPK}\,, \qquad & {\Lambda_{ijkl}}^\alpha &= V_{PPK}\,,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_{kl}\} &= \tfrac{1}{2} {f_{ij}}^{mn}{}_{kl}\mathcal{H}_{mn}\delta + V_{PPK}\,, \\
\{\mathcal{H}_{ij}, \overline{\mathcal{H}}'_k\} &= -2\eta_{k[i}\overline{\mathcal{H}}_{j]}\delta + V_{PPK}\,.
\end{aligned}$$

Prelaz na ADM bazis $\boldsymbol{e}'_\mu = \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_\alpha\}$ dovodi konačno do

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_{kl}\} &= \tfrac{1}{2} {f_{ij}}^{mn}{}_{kl}\mathcal{H}_{mn}\delta + V_{PPK}\,, \\
\{\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}'_\alpha\} &= V_{PPK}\,, \\
\{\mathcal{H}_{ij}, \overline{\mathcal{H}}'_\perp\} &= V_{PPK}\,.
\end{aligned} \tag{F.5a}$$

Ostatak algebre veza se dobija na sličan način, i ima oblik

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}'_\beta\} &= (\mathcal{H}'_\alpha\partial_\beta + \mathcal{H}_\beta\partial_\alpha - \tfrac{1}{2}R^{ij}{}_{\alpha\beta}\mathcal{H}_{ij})\delta + V_{PPK}\,, \\
\{\mathcal{H}_\alpha, \overline{\mathcal{H}}'_\perp\} &= (\overline{\mathcal{H}}_\perp\partial_\alpha - \tfrac{1}{2}R^{ij}{}_{\alpha\perp}\mathcal{H}_{ij})\delta + V_{PPK}\,, \\
\{\overline{\mathcal{H}}_\perp, \overline{\mathcal{H}}'_\perp\} &= -(\mathcal{H}^\alpha + \mathcal{H}'^\alpha)\partial_\alpha\delta + V_{PPK}\,,
\end{aligned} \tag{F.5b}$$

gde je $\mathcal{H}^\alpha = {}^3g^{\alpha\beta}\mathcal{H}_\beta$. Vremenski izvod $\dot{A}^{ij}{}_\alpha$ u $R^{ij}{}_{\alpha\perp}$ je samo skraćena oznaka za $\{A^{ij}{}_\alpha, \overline{H}_c\}$, tako da gornja relacija ne zavisi od proizvoljnih množitelja v iz $\widehat{\mathcal{H}}_T$.

Napomenimo još jednom da jednakost u $(F.5)$ označava jednakost do na stepene veza $\chi^n (n \geq 2)$, što je posledica našeg metoda koji se zasniva na zahtevima $(F.1)$.

Na kraju ovog razmatranja postavlja se prirodno pitanje: da li se oblik algebre veza može utvrditi preciznije, sa tačnom informacijom o članovima tipa V_{PPK} i χ^n? Zbog jednostavnog oblika kinematičkih generatora $\mathcal{H}_{ij}$ i $\mathcal{H}_\alpha$, njihove PZ se mogu lako proveriti direktnim računom (kao što smo videli u glavi VI), i rezultat je da se članovi tipa V_{PPK} i χ^n, ustvari, *ne pojavljuju.* Preostale relacije u $(F.5)$ sadrže dinamički deo hamiltonijana $\overline{\mathcal{H}}_\perp$, tako da je eksplicitan račun mnogo teži. Pošto $\mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}_\alpha$ i $\overline{\mathcal{H}}_\perp$ ne zavise od ${\pi_k}^0, {\pi_{ij}}^0$, može se zaključiti da su V_{PPK} u jednačinama (F.5) *dodatne* veze prve klase. Posmatrajmo dalje izraze $\{\mathcal{H}_{ij},\overline{\mathcal{H}}'_\perp\}$ i $\{\mathcal{H}_\alpha,\overline{\mathcal{H}}'_\perp\}$, koji opisuju ponašanje $\overline{\mathcal{H}}_\perp$ u odnosu na Lorencove transformacije i prostorne translacije. Odsustvo članova V_{PPK} i χ^n ovde znači da je $\overline{\mathcal{H}}_\perp$ skalar. Priroda $\overline{\mathcal{H}}_\perp$ se može proveriti na osnovu poznatog ponašanja svih varijabli od kojih $\overline{\mathcal{H}}_\perp$ zavisi u odnosu na lokalne Poenkareove transformacije. Na kraju, pitanje zagrade $\{\overline{\mathcal{H}}_\perp,\overline{\mathcal{H}}'_\perp\}$ je najteže, jer su generatori vremenske translacije dobri generatori samo uz važenje jednačina kretanja, što otežava kontrolu pojavljivanja članova V_{PPK} i χ^n. Jedino što se može uraditi jeste da se ovakvi članovi, u zadnjoj jednačini u ($F.5b$), izračunaju u okviru posebno izabranog dejstva (Nikolić, 1995).

Treba pomenuti da postoje neke karakteristike algebre koje ne slede iz date teorije, već iz neodredjenosti u postupku konstrukcije hamiltonijana. Na primer, svi odredjeni množitelji se mogu tako izabrati da ne zavise od impulsa, dok bi svaki drugi izbor bio ekvivalentan zameni $u_2 \to u_2 + \lambda_2\phi$. Jasno je da bi takva promena uticala ne samo na oblik $\overline{\mathcal{H}}_\perp$, već i na odgovarajuće PZ (dodavanjem članova oblika V_{PPK} i χ^n). Najprirodniji izbor je onaj koji dovodi do najprostije algebre veza.

G. KOVARIJANTNOST, SPIN I INTERAKCIJA BEZMASENIH ČESTICA

U relativističkoj kvantnoj teoriji polja proces koji uključuje emisiju (ili apsorpciju) bezmasene čestice spina (heliciteta) 1 ili 2 opisuje se amplitudom oblika

$$\epsilon_\mu M^\mu\,, \qquad \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\,,$$

gde su ϵ_μ i $\epsilon_{\mu\nu}$ odgovarajući vektori polarizacije. U odnosu na Lorencove transformacije veličine ϵ_μ i $\epsilon_{\mu\nu}$ se ne transformišu kovarijantno (kao vektor, odnosno tenzor), već trpe i dodatne gradijentne transformacije:

$$\begin{aligned}
&\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + k_\mu\eta,\\
&\epsilon_{\mu\nu} \to \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu\eta_\nu + k_\nu\eta_\mu\,.
\end{aligned}$$

Nezavisnost teorije od izbora predstavnika za ϵ_μ i $\epsilon_{\mu\nu}$ (gradijentna invarijantnost) zahteva važenje zakona održanja

$$k_\mu M^\mu = 0, \quad k_\mu M^{\mu\nu} = 0\,. \tag{$G.1$}$$

Ovi uslovi, kao što ćemo videti, daju jaka ograničenja na strukturu teorije preko tzv. niskoenergetskih teorema (Weinberg, 1964; Kibble, 1965).

Interesantno je uočiti da bezmasenost skalarnog polja ne utiče na prirodu njegove interakcije sa materijom, odnosno, na osobine struje J. S druge strane, u slučaju bezmasenih polja spina $s > 0$, struja materije mora biti očuvana da bi se anulirao efekat gradijentnih transformacija polja. Lagranžijan materije može imati globalnu simetriju koja automatski vodi do postojanja održane struje. Ovo je slučaj sa standardnom elektromagnetnom interakcijom: globalna U(1) simetrija u sektoru materije automatski generiše održanu struju J_μ. Na sličan način globalna translaciona simetrija vodi do održanja tenzora energije–impulsa $T_{\mu\nu}$ (sa kojim interaguje bezmaseno polje spina 2).

Da bismo ilustrovali prirodu gravitacione interakcije, posmatraćemo slučaj kad je materija opisana kompleksnim skalarnim poljem mase m,

$$\mathcal{L}_M = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \,. \tag{G.2}$$

Propagator polja Φ ima oblik $D(k, m^2) = 1/(k^2 - m^2)$.

Verteks gravitona spina 1. Bezmaseni graviton spina 1, koji ćemo uslovno zvati foton, interaguje sa očuvanom strujom materije J_μ. Ukupan lagranžijan je oblika

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I \,, \tag{G.3}$$

gde su $\mathcal{L}_V$ i $\mathcal{L}_M$ dati jednačinama (7.5) i (G.2), a $\mathcal{L}_I$ opisuje interakciju:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_I = -\lambda \varphi_\mu J^\mu \,, \\ &J_\mu \equiv -i\big[(\partial_\mu \Phi^*)\Phi - \Phi^*(\partial_\mu \Phi)\big] \,. \end{aligned} \tag{G.4}$$

Ovde je J_μ očuvana struja koja odgovara *globalnoj* U(1) simetriji lagranžijana materije: $\Phi \to \exp(-i\alpha)\Phi$, $\Phi^* \to \exp(i\alpha)\Phi^*$.

Napomenimo da se ovako definisana interakcija razlikuje od one koja bi se dobila lokalizacijom U(1) simetrije. Teorija koju ovde posmatramo invarijantna je u odnosu na gradijentne transformacije $\varphi_\mu \to \varphi_\mu + \partial_\mu \omega$, pri čemu se polje materije *ne menja*.

U kvantnoj teoriji interakcija tipa (G.4) se predstavlja verteksnim dijagramom, kao na slici D.1: prava linija označava polje materije, talasasta linija opisuje foton (graviton), dok se verteks (u impulsnoj reprezentaciji) dobija zamenom $i\partial_\mu \Phi \to p_\mu$, $i\partial_\mu \Phi^* \to -p_\mu$, u izrazu λJ_μ:

$$\Gamma^\mu = \lambda(p_2^\mu + p_1^\mu) = \lambda(2p_2^\mu + k^\mu) \,. \tag{G.5a}$$

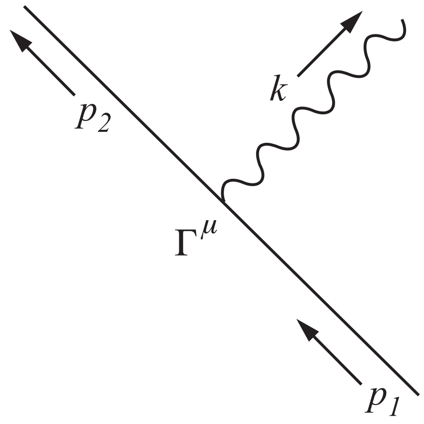
Kad je impuls fotona mnogo manji od impulsa materije, verteks Γ^μ efektivno postaje

$$f^\mu = \Gamma^\mu(k=0) = 2\lambda p_2^\mu \,. \tag{G.5b}$$

Ovaj izraz pri $p_2^2 = m^2$ opisuje klasičnu struju čestica.

Verteks gravitona spina 2. Pretpostavićemo da bezmaseni graviton spina 2 interaguje sa TEI materije $T_{\mu\nu}$, pa je ukupni lagranžijan oblika

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_I \,, \tag{G.6}$$



Slika G.1 Verteksni dijagram

gde su $\mathcal{L}_T$ i $\mathcal{L}_M$ dati izrazima (7.19) i (G.2), a interakcija je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -\lambda\varphi^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + \partial_\nu\Phi^*\partial_\mu\Phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}_M\,. \end{aligned} \tag{G.7}$$

Izraz za verteks $\Gamma^{\mu\nu}$ je oblika

$$\Gamma^{\mu\nu} = \lambda\left[p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\nu - \eta^{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 - m^2)\right], \tag{G.8a}$$

gde je $p_2 = p_1 - k$. U klasičnom limesu ($k \to 0$) interakcija gravitona sa spoljašnjom linijom materije ($p_2^2 - m^2 = 0$) daje efektivni verteks

$$f^{\mu\nu} = \Gamma^{\mu\nu}(k=0, p_2^2 = m^2) = 2\lambda p_2^\mu p_2^\nu\,, \tag{G.8b}$$

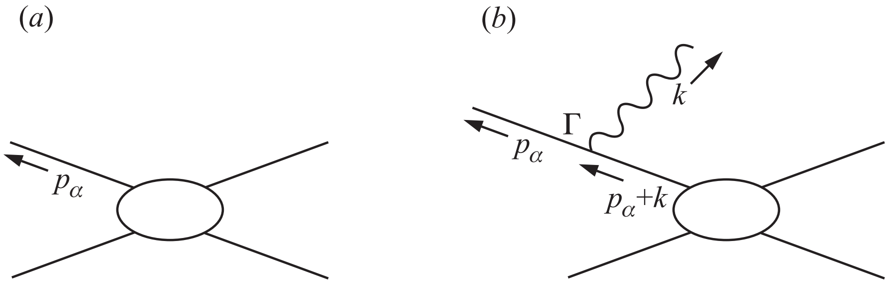
koji odgovara klasičnom tenzoru energije–impulsa.

Klasičan limit verteksa. Zaključci o obliku verteksa gravitona u limesu $k \to 0, p^2 \to m^2$, izvedeni su za slučaj skalarnog polja materije, ali se lako mogu uopštiti na proizvoljno bozonsko polje $\Phi_{\lambda\sigma\cdots}$ spina $s > 0$.

Opšti rezultat za struju dobija se iz izraza (G.4) zamenom $\Phi \to \Phi_{\lambda\sigma\cdots}$ (do na znak, koji je isti za parne spinove, a suprotan za neparne, što je posledica naizmenične promene znaka lagranžijana sa porastom spina). Prelaz na impulsni prostor, $i\partial_\mu\Phi_{\lambda\sigma\cdots} \to p_\mu, i\partial_\mu\Phi^*_{\lambda\sigma\cdots} \to -p_\mu$, reprodukuje rezultat ($G$.5$a$), posle čega $k \to 0$ dovodi do efektivnog verteksa (G.5b).

Na sličan način tenzor $T_{\mu\nu}$ se dobija (do na znak) iz izraza (G.7) zamenom $\Phi \to \Phi_{\lambda\sigma\cdots}$. Pri prelazu na impulsni prostor član proporcionalan sa $\mathcal{L}_M$ teži nuli pri $k \to 0, p^2 \to m^2$, pa sledi (G.8b).

Isti rezultati se dobijaju i pri razmatranju proizvoljnog fermionskog polja materije.



Slika G.2 U procesu (b) prisutan je dodatni graviton

Obratimo pažnju na činjenicu da $\varphi_{\mu\nu}$ može interagovati i sa sopstvenim tenzorom energije–impulsa. Drugim rečima, graviton $\varphi_{\mu\nu}$ ima gravitacioni naboj (energiju–impuls) i može interagovati sam sa sobom. S druge strane, u elektrodinamici foton ne interaguje sam sa sobom: električna struja fotonskog polja je nula, foton je električno neutralan.

Niskoenergetske teoreme i spin gravitona. Iz opštih razmatranja u glavi VII sledi da bezmaseni graviton može imati spin 0 ili 2, dok je mogućnost spina 1 eliminisana. Šta je sa višim spinovima? Videćemo da niskoenergetske teoreme u KTP eliminišu mogućnost $s > 2$.

Posmatrajmo amplitudu M nekog procesa rasejanja (sl. $D.2a$), i uporedimo je sa amplitudom sličnog procesa koji se od prethodnog razlikuje emisijom (ili apsorpcijom) jednog dodatnog gravitona impulsa k. Ako $k \to 0$, onda u ovom procesu dominiraju dijagrami na kojima je graviton “prikačen” na spoljašnju liniju materije (sl. $D.2b$), zbog prisustva dodatnog propagatora (izmedju verteksa Γ i ostatka dijagrama) koji je blizu svog pola. Dodatni propagator, pridružen liniji impulsa $p_\alpha + k$, postaje, pri $k \to 0$,

$$D(p_\alpha + k, m^2) = \frac{1}{(p_\alpha + k)^2 - m^2} \approx \frac{1}{2p_\alpha \cdot k}\,.$$

Napišimo originalni matrični elemenat detaljno, sa svim spinorskim indeksima i impulsima koji se odnose na spoljašnje linije:

$$M \to M_{\sigma_1 \cdots \sigma_\alpha \cdots \sigma_n}(p_1, \cdots, p_\alpha, \cdots, p_n)\,.$$

Posmatrajmo, najpre, slučaj *gravitona heliciteta 1.* Amplituda modifikovanog procesa sa sl. $D.2b$ je oblika $\epsilon_\mu M^\mu_{(\alpha)}$, gde je

$$\begin{aligned} M^\mu_{(\alpha)} &= \Gamma^\mu(p_\alpha, k) D(p_\alpha + k, m^2) M(p_\alpha \to p_\alpha + k) \\ &\equiv \sum_{\sigma_\beta} \Gamma^\mu_{\sigma_\alpha \sigma_\beta}(p_\alpha, k) D(p_\alpha + k, m^2) M_{\sigma_1 \dots \sigma_\beta \dots \sigma_n}(p_\alpha \to p_\alpha + k)\,, \end{aligned} \tag{G.9a}$$

a $\Gamma^{\mu}(p_\alpha, k)$ je verteks tipa $(G.5a)$, koji opisuje interakciju gravitona i linije $(\sigma_\alpha, p_\alpha)$. U limesu $k \to 0$ prethodna jednačina postaje

$$M^{\mu}_{(\alpha)} \approx \frac{f^{\mu}_{\alpha}}{2p_\alpha \cdot k} M \,, \tag{$G.9b$}$$

gde je $f^{\mu}_{(\alpha)} = \Gamma^{\mu}(p_\alpha, 0)$. Posle sumiranja doprinosa gravitona izračenih sa svih spoljašnjih linija (suma po α), primena uslova gradijentne invarijantnosti $(G.1)$ na ukupnu amplitudu $M^{\mu} = \sum_\alpha M^{\mu}_{(\alpha)}$ daje

$$\sum_\alpha \frac{k_\mu f^{\mu}_{(\alpha)}}{2p_\alpha \cdot k} M = 0 \,. \tag{$G.10$}$$

Pošto se naša razmatranja odnose na "meke gravitone", za koje $k \to 0$, verteks $f^{\mu}_{(\alpha)}$ je tipa $(G.5b)$,

$$f^{\mu}_{(\alpha)} = 2e_\alpha p^{\mu}_{\alpha} \,,$$

pa iz prethodnog zahteva (pri $M \neq 0$) sledi

$$\sum_\alpha e_\alpha = 0 \,. \tag{$G.11$}$$

Ovo je, naravno, zakon održanja električnog naboja.

Ispitajmo sada slučaj *gravitona heliciteta 2.* Na potpuno analogan način se dobija relacija

$$\sum_\alpha \frac{k_\mu f^{\mu\nu}_{(\alpha)}}{2p_\alpha \cdot k} M = 0 \,. \tag{$G.12$}$$

U graničnom slučaju $k \to 0$ verteks $f^{\mu\nu}_{(\alpha)}$ je oblika $(G.8b)$,

$$f^{\mu\nu}_{(\alpha)} = 2\kappa_\alpha p^{\mu}_{\alpha} p^{\nu}_{\alpha} \,,$$

pa se prethodni uslov svodi na

$$\sum_\alpha \kappa_\alpha p^{\nu}_{\alpha} = 0 \,. \tag{$G.13$}$$

Uzimajući u obzir zakon održanju impulsa

$$\sum_\alpha p^{\nu}_{\alpha} = 0 \,,$$

(svi impulsi spoljašnjih linija usmereni su prema vani), relacija (G.13) može biti zadovoljena samo ako je

$$\kappa_\alpha = \kappa\,, \tag{G.14}$$

gde je κ konstanta ista za sve čestice. Time smo demonstrirali *univerzalnost* gravitacione interakcije, tj. princip ekvivalencije.

Za više vrednosti spina gravitona uslov gradijentne invarijantnosti daje jednačine koje ne mogu biti zadovoljene istovremeno sa zakonom održanja impulsa (npr. $\sum g_\alpha p_\alpha^\mu p_\alpha^\nu = 0$). Tako zaključujemo da

> *jedini bezmaseni bozoni koji mogu konzistentno interagovati sa materijom u graničnom slučaju nultih energija i impulsa* ($k \to 0$) *jesu oni sa spinom* $s \leq 2$.

Pošto se izrazi ep^μ i $\kappa p^\mu p^\nu$ ne smeju menjati pri $p \to -p$ i istovremenoj reinterpretaciji linije čestice kao linije antičestice, sledi da je interakcija antičestice suprotnog znaka od interakcije čestice za polje spina 1, a istog za polje spina 2.

Treba istaći da prethodni argumenti ne pokazuju da bezmasena polja spina $s > 2$ ne postoje, već da njihova interakcija sa materijom u graničnom slučaju $k \to 0$ mora nestati, inače je nekonzistentna. Takve interakcije ne generišu statičke sile dugog dometa pa su, prema tome, neinteresantne kao kandidati za gravitaciju.

H. LORENCOVA GRUPA I SPINORI

U klasičnoj relativističkoj fizici osnovne fizičke veličine su tenzori, a kovarijantnost fizičkih zakona se postiže uvodjenjem tenzorskih jednačina, čiji oblik ostaje isti u svim referentnim sistemima. U kvantnoj fizici situacija je drugačija: tamo se pored tenzora pojavljuju i spinori. Imajući na umu da je klasična teorija granični slučaj kvantne, korisno je razmotriti ulogu spinora i u klasičnoj teoriji polja — to će biti predmet izlaganja u ovom dodatku (Novožilov, 1972; Barut i Raczka, 1977; Berestecki, Lifšic i Pitajevski, 1980). Treba imati u vidu da spinori, koji se koriste za izgradnju kovarijantnih teorija polja, ne odgovaraju direktno elementarnim fizičkim sistemima — česticama, koje imaju odredjenu masu i spin. Čestice su povezane sa reprezentacijama Poenkareove grupe, o čemu će biti više reči u dodatku I.

Neka se dva posmatrača nalaze u različitim inercijalnim sistemima S i S' prostora M_4, opisujući isti fizički dogadjaj prostorno–vremenskim koordinatama x i x' koje su povezane homogenim Lorencovim transformacijama

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\,. \tag{H.1}$$

Zahtev invarijantnosti intervala (2.1) daje ograničenje na oblik realne matrice $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$: $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Iz ove relacije se dobijaju uslovi

$$\begin{aligned} &\det\Lambda = \pm 1 \,, \\ &\Lambda^{00} \geq 1 \qquad \text{ili} \qquad \Lambda^{00} \leq -1 \,. \end{aligned}$$

Ako sa Λ označimo proizvoljnu realnu 4×4 matrica, korisno je uvesti sledeću terminologiju:

Opšta Lorencova grupa: $L \equiv O(1,3) = \{\Lambda \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$;

Svojstvena Lorencova grupa: $L_+ \equiv SO(1,3) = \{\Lambda \in L \mid \det\Lambda = +1\}$;

Prava Lorencova grupa: $L_0 = \{\Lambda \in L \mid \det\Lambda = +1, \Lambda^{00} \geq +1\}$.

Transformacije prostorne i vremenske inverzije, I_P i I_T, imaju determinantu -1. Opšta Lorencova grupa sadrži transformacije L_0, $I_P L_0$, $I_T L_0$ i $I_P I_T L_0$. Svojstvene i prave Lorencove transformacije predstavljaju podgrupe od L. Prava Lorencova grupa L_0 ne sadrže ni prostorne ni vremenske inverzije; ona se sastoji od prostornih rotacija i pravih Lorencovih transformacija, ili bustova.

Algebra generatora. Pri beskonačno malim transformacijama Lorencove grupe L_0 matrica Λ ima oblik $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, gde je $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Ovaj izraz se može napisati u matričnoj notaciji kao

$$\Lambda = 1 + \tfrac{1}{2}\omega^{\lambda\rho} M_{\lambda\rho} \,, \qquad (M_{\lambda\rho})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\lambda \eta_{\rho\nu} - \delta^\mu_\rho \eta_{\lambda\nu} \,,$$

gde su $M_{\lambda\rho}$ *generatori* grupe L_0 koji zadovoljavaju algebru

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = \eta_{\nu\lambda} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho} M_{\nu\lambda} \equiv \tfrac{1}{2} f_{\mu\nu,\lambda\rho}{}^{\sigma\tau} M_{\sigma\tau} \,. \tag{$H.2a$}$$

Matrice $M_{\mu\nu}$ su normirane tako da budu antihermitske: $(M^+)_{\mu\nu} = -M_{\mu\nu}$. Jednačina ($H.2a$) *definiše* Lijevu algebru Lorencove grupe. Problem nalaženja reprezentacija Lorencove algebre dovodi nas do rešenja za $M_{\mu\nu}$ koja su mnogo opštija od posebnog oblika od koga smo pošli.

Uvedimo veličine

$$\begin{aligned} M^i &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk} M_{jk} = (M_{23}, M_{31}, M_{12}) \,, \\ K^i &= M_{0i} = (M_{01}, M_{02}, M_{03}) \,, \end{aligned}$$

koje generišu prostorne rotacije i bustove, redom, a čija algebra sledi iz ($H.2a$):

$$\begin{aligned} &[M^i, M^j] = \varepsilon^{ijk} M^k \,, \qquad [M^i, K^j] = \varepsilon^{ijk} K^k \,, \\ &[K^i, K^j] = -\varepsilon^{ijk} K^k \,. \end{aligned} \tag{$H.2b$}$$

Prva jednačina opisuje algebru $so(3)$ rotacione grupe $SO(3)$ (koja je podgrupa od L_0), dok druga znači da je K^i vektor u onosu na ove rotacije.

Znak minus u trećoj jednačini izražava razliku izmedju nekompaktne grupe $SO(1,3)$ i njene kompaktne verzije $SO(4)$. Ova naizgled mala razlika u znaku dovodi do bitnih razlika u strukturi odgovarajućih reprezentacija (kao i drugih, fizički značajnih posledica).

Konačnodimenzione reprezentacije. Iz oblika konačnih Lorencovih transformacija u M_4 može se zaključiti da posmatrana četvorodimenziona reprezentacija nije unitarna: rotacije se reprezentuju unitarnim, a bustovi neunitarnim matricama. Situacija je ista u svim konačnodimenzionim reprezentacijama, u skladu sa osnovnom teoremom koja tvrdi da su unitarne ireducibilne reprezentacije svake (proste) nekompaktne Lijeve grupe nužno beskonačnodimenzione.

Pri izgradnji kovarijantnih jednačina polja koriste se konačnodimenzione reprezentacije Lorencove algebre, koje opisuju spinske stepene slobode polja. Da bismo klasifikovali ove reprezentacije, uvešćemo *kompleksne* linearne kombinacije generatora:

$$J_1^i = \tfrac{1}{2}(M^i - iK^i)\,, \qquad J_2^i = \tfrac{1}{2}(M^i + iK^i)\,.$$

Njihova algebra

$$\begin{aligned} &[J_1^i, J_1^j] = \varepsilon^{ijk} J_1^k\,, \qquad [J_1^i, J_2^j] = 0\,, \\ &[J_2^i, J_2^j] = \varepsilon^{ijk} J_2^k\,, \end{aligned}$$

predstavlja direktan zbir dve $so(3)$ agebre. Uvodjenje kompleksnih koeficijenata nije dozvoljena operacija u okviru $so(1,3)$ — time se, ustvari, vrši prelaz na kompleksificiranu algebru $so(1,3)^c$. Pošto su reprezentacije svake kompleksne Lijeve algebre i njene realne verzije u korespodenciji 1–1, prethodni rezultat znači da se reprezentacije od $so(1,3)$ mogu klasifikovati na isti način kao i reprezentacije od $so(3)_1 \oplus so(3)_2$. Drugim rečima, konačnodimenzione reprezentacije Lorencove algebre su odredjene parom polucelih ili celih brojeva

$$(j_1, j_2) \qquad j_1, j_2 = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots \tag{H.3a}$$

koji odgovaraju vrednostima kvadratičnih invarijanti $\boldsymbol{J}_1{}^2 = -j_1(j_1+1)$, $\boldsymbol{J}_2{}^2 = -j_2(j_2+1)$. Pošto je $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$, ukupni ugaoni momenat (spin) reprezentacije može imati vrednosti

$$j = |\, j_1 - j_2 \,|\,, |\, j_1 - j_2 \,| + 1, \ldots, j_1 + j_2\,, \tag{H.3b}$$

dok je dimenzija reprezentacije $d = (2j_1+1)(2j_2+1)$. Evo nekoliko primera:

(0,0) — skalarna reprezentacija spina $j = 0$, dimenzije $d = 1$;

($\frac{1}{2}$,0) — leva (kiralna) spinorska reprezentacija, $j = \frac{1}{2}$, $d = 2$;

(0,$\frac{1}{2}$) — desna (antikiralna) spinorska reprezentacija, $j = \frac{1}{2}$, $d = 2$;

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ — vektorska reprezentacija, $j = 1, 0$, $d = 4$ (po ovoj reprezentaciji se transformiše četvorovektor x^μ).

Važnost reprezentacija $(\frac{1}{2}, 0)$ i $(0, \frac{1}{2})$ ogleda se u činjenici da se iz njih mogu dobiti sve konačnodimenzione reprezentacije Lorencove algebre. One konačnodimenzione reprezentacije koje imaju odredjen spin koriste se za predstavljanje čestica.

Pokrivajuća grupa. Lijeva algebra ne odredjuje kompletno osobine grupe, već samo njenu lokalnu strukturu. Zato prethodnu diskusiju Lorencove algebre treba dopuniti razmatranjem globalnih (topoloških) osobina grupa koje imaju istu Lijevu algebru.

Posmatrajmo familiju $\mathcal{G}$ povezanih Lijevih grupa koje imaju iste (izomorfne) Lijeve algebre. Bilo koje dve grupe iz $\mathcal{G}$ su lokalno izomorfne. Može se pokazati da u familiji $\mathcal{G}$ postoji jedinstvena (do na izomorfizam) *jednostruko* povezana grupa $\overline{G}$, poznata kao *univerzalna pokrivajuća grupa* familije $\mathcal{G}$, takva da postoji homomorfizam $\overline{G}$ na bilo koju grupu G iz $\mathcal{G}$ (preslikavanje koje čuva pravilo grupnog množenja). Grupa $\overline{G}$ sadrži diskretnu invarijantnu podgrupu Z takvu da je svaka grupa G iz $\mathcal{G}$ lokalno izomorfna sa faktor grupom $\overline{G}/Z$.

Proizvoljna Lorencova transformacija Λ iz L_0 može se predstaviti kao proizvod busta i trodimenzione rotacije. Pošto je prostor parametara rotacione grupe *dvostruko* povezan, takav je i prostor parametara prave Lorencove grupe. Pokazaćemo da je pokrivajuća grupa od L_0 jednaka grupi $SL(2, C)$, tj. grupi kompleksnih 2×2 matrica A, koje su unimodularne ($\det A = 1$).

Razmotrićemo detaljnije vezu Lorencove grupe L_0 i $SL(2, C)$. Uvedimo, najpre, matrice

$$\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \qquad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}),$$

gde su $\boldsymbol{\sigma}$ Paulijeve matrice,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

koje zadovoljavaju relaciju $\sigma^a \sigma^b = i\varepsilon^{abc}\sigma^c + \delta^{ab}$. Matrice σ^μ i $\bar{\sigma}^\mu$ zadovoljavaju identitete

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = 2\eta^{\mu\nu}, \qquad \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Pokazaćemo, sada, da postoji homomorfizam $SL(2, C)$ na L_0. Pridružimo proizvoljnom vektoru x^μ iz M_4 hermitsku matricu X,

$$X = x_\mu \sigma^\mu = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \qquad \det X = x^2.$$

Tada svakoj $SL(2,C)$ transformaciji matrice X,

$$X' = AXA^+ \,, \tag{$H.4a$}$$

odgovara Lorencova transformacija vektora x^μ,

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \,, \\ \Lambda^\mu{}_\nu(A) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\bar\sigma^\mu A \sigma_\nu A^+) \,, \end{aligned} \tag{$H.4b$}$$

gde je $\sigma_\nu = \eta_{\nu\lambda}\sigma^\lambda$. Preslikavanje $A \to \Lambda(A)$ je homomorfizam $SL(2,C)$ na L_0, jer je

$$\begin{aligned} &\Lambda^\mu{}_\nu(A) \in L_0 \,, \\ &\Lambda^\mu{}_\rho(A_1A_2) = \Lambda^\mu{}_\nu(A_1)\Lambda^\nu{}_\rho(A_2) \,. \end{aligned}$$

Pošto je $\Lambda(-A) = \Lambda(A)$, inverzno preslikavanje $\Lambda \to A(\Lambda)$ je definisano samo do na znak:

$$A = \pm \frac{1}{[\det(\Lambda^\rho{}_\lambda \sigma_\rho \bar\sigma^\lambda)]^{1/2}}\, \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar\sigma^\nu \,. \tag{$H.4c$}$$

Ovaj rezultat se dobija pomoću relacije

$$\Lambda^\rho{}_\nu \sigma_\rho \bar\sigma^\nu = A\sigma_\nu A^+ \bar\sigma^\nu = 2A\,\mathrm{Tr}\,(A^+) \,.$$

Ako definišemo generatore $\sigma^{\mu\nu}$ i $\bar\sigma^{\mu\nu}$,

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \,, \qquad A^{*-1T} = 1 + \tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\bar\sigma^{\mu\nu} \,, \tag{$H.5a$}$$

tada iz ($H.4c$) sledi

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \tfrac{1}{4}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu) = \left[-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, -\tfrac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma}\right] , \\ \bar\sigma^{\mu\nu} &= \tfrac{1}{4}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu) = \left[\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, -\tfrac{1}{2}i\boldsymbol{\sigma}\right] , \end{aligned} \tag{$H.5b$}$$

gde su u uglastoj zagradi izdvojeni rotacioni i bust deo generatora: $\sigma^{\mu\nu} = [\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\sigma^{bc}, \sigma^{0a}]$, i slično za $\bar\sigma^{\mu\nu}$. Ovi generatori zadovoljavaju Lorencovu agebru ($H.2$).

Iz prethodnog izlaganja sledi:

a) grupe $SL(2,C)$ i L_0 imaju istu Lijevu algebru, i

b) postoji homomorfizam $SL(2,C) \to L_0$, čije jezgro je diskretna grupa $Z_2 = (1,-1)$ (elementi $A = \pm 1$ iz $SL(2,C)$ se preslikavaju u jedinični elemenat iz L_0):

$$L_0 = SL(2,C)/Z_2 \,, \quad Z_2 = (1,-1) \,.$$

Prema tome, $SL(2, C)$ je jednostruko povezana, i predstavlja pokrivajuću grupu za L_0, koju ćemo označavati sa $\bar{L}$.

Važnost pokrivajuće grupe $\bar{L}$ ogleda de u činjenici da su sve njene ireducibilne reprezentacije *jednoznačne*, dok medju reprezentacijama od L_0 ima i dvoznačnih (L_0 je dvostruko povezana). Sve reprezentacije Lorencove grupe L_0, kako jednoznačne tako i dvoznačne, mogu se naći izučavanjem jednoznačnih reprezentacija od $\bar{L}$.

Imajući u vidu ovu vezu, u daljem izlaganju ćemo nastaviti sa razmatranjem ireducibilnih reprezentacija od $SL(2, C)$.

Spinori. Videli smo da se svakom vektoru x^μ može pridružiti hermitska matrica X, tako da se u prostoru tih matrica Lorencova transformacija $x' = \Lambda x$ zadaje kao linearna transformacija $X' = AXA^+$, $A \in SL(2, C)$. Posmatrajmo sada i neke druge reprezentacije od $SL(2, C)$.

Dvokomponentni spinor je par kompleksnih brojeva ξ_a $(a = 1, 2)$ koji se transformiše po pravilu

$$\xi'_a = A_a{}^b \xi_b \,. \tag{H.6a}$$

Spinori ξ_a se mogu posmatrati kao vektori u nekom dvodimenzionom kompleksnom prostoru, koji je povezan sa referentnim sistemima u M_4 tako da svakoj Lorencovoj transformaciji u M_4 odgovara jedna $SL(2, C)$ transformacija spinora ξ:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \qquad \xi' = A\xi \,.$$

S obzirom na to da je veza $SL(2, C)$ i Lorencove grupe dvoznačna, spinori su u svakom referentnom sistemu odredjeni samo do na znak. Veličine ξ_a se nazivaju levi Vajlovi spinori, i transformišu se po reprezentaciji $(\frac{1}{2}, 0)$.

Uvedimo, sada, spinor η^a tako da bilinearna forma $\eta^a \xi_a$ bude invarijantna u odnosu na posmatrane transformacije. Njegov zakon transformacije je odredjen matricom A^{-1T}:

$$\eta'^a = A^{-1T\,a}{}_b \eta^b \,. \tag{H.6b}$$

Reprezentacije $(H.6a)$ i $(H.6b)$ su *ekvivalentne*, jer važi

$$A = gA^{-1T}g^{-1} \,, \qquad g = -g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2 \,,$$

ili, prelazeći na komponentnu notaciju,

$$g_{ab} = \varepsilon_{ab} \,, \qquad g^{-1ab} \equiv g^{ab} = -\varepsilon^{ab} \,, \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{12} = 1 \,.$$

U komponentnoj notaciji invarznu matricu g^{-1} ćemo označavati jednostavno kao g^{ab}. Spinor $\xi^a = g^{ab}\xi_b$ se transformiše po reprezentaciji $(H.6b)$, dok se $\eta_a = g_{ab}\eta^b$ transformiše po $(H.6a)$, pri čemu je

$$\eta^a \xi_a = g^{ab} \eta_b g_{ac} \xi^c = -\eta_a \xi^a \,.$$

Matrice g i g^{-1} povezuju dve ekvivalentne reprezentacije i imaju ulogu metrike u prostoru spinora ξ_a i η^a. Kao spinori ove veličine su invarijantne:

$$\varepsilon'_{ab} = A_a{}^c A_b{}^d \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{ab}\,\mathrm{det}A = \varepsilon_{ab}\,.$$

Kompleksno konjugovani spinor ξ^*_a se transformiše po zakonu

$$\xi^{*\prime}_a = A^*{}_a{}^b \xi^*_b\,,$$

gde je matrica A^* kompleksno konjugovana od A. Umesto ξ^*_a obično se piše $\bar\xi_{\dot a}$, dok se elementi od A^* zapisuju kao $A^*{}_{\dot a}{}^{\dot b}$:

$$\bar\xi'_{\dot a} = A^*{}_{\dot a}{}^{\dot b} \bar\xi_{\dot b}\,. \tag{H.7a}$$

Veličine $\bar\xi_{\dot a}$ se nazivaju desni Vajlovi spinori, i transformišu se po reprezentaciji $(0,\frac{1}{2})$. Opšta matrica A se ne može dobiti iz A^* linearnom transformacijom, pa se spinori ξ_a i $\bar\xi_{\dot a}$ transformišu po *neekvivalentnim* reprezentacijama. Ako je A unitarna matrica, što je slučaj kod prostornih rotacija, tada je $A^* = A^{-1T}$, pa se spinori $\bar\xi_{\dot a}$ i ξ^a transformišu na isti način.

Najzad, može se uvesti i spinor $\bar\eta^{\dot a}$ sa zakonom transformacije

$$\bar\eta'^{\dot a} = A^{*-1T\dot a}{}_{\dot b} \bar\eta^{\dot b}\,, \tag{H.7b}$$

koji je ekvivalentan sa $\bar\eta_{\dot a}$. Matrica $\bar g$ je oblika

$$\bar g_{\dot a\dot b} = \varepsilon_{\dot a\dot b}\,, \qquad \bar g^{\,-1\dot a\dot b} \equiv \bar g^{\dot a\dot b} = -\varepsilon^{\dot a\dot b}\,, \qquad \varepsilon_{\dot 1\dot 2} = \varepsilon^{\dot 1\dot 2} = 1\,,$$

i važi $\bar\eta^{\dot a}\bar\xi_{\dot a} = -\bar\eta_{\dot a}\bar\xi^{\dot a}$.

Tako smo definisali dvodimenzione spinore $\xi_a, \eta^a, \bar\xi_{\dot a}$ i $\bar\eta^{\dot a}$, koji se transformišu po reprezentacijama A, A^{-1T}, A^* i $A^{*-1T} = A^{-1+}$ grupe $SL(2,C)$. Množeći ove elementarne spinore jedan s drugim dobijaju se *viši spinori*, koji se transformišu u odnosu na $SL(2,C)$ kao proizvodi više elementarnih spinora. Rang višeg spinora se zadaje u vidu para brojeva (k,l) — broja običnih indeksa i broja indeksa sa tačkom.

Operacija kontrakcije po indeksima istog tipa pomoću "metrike" g ili $\bar g$ smanjuje rang spinora za dva. Kontrakcija kod simetričnih spinora daje nulu, što znači da se od komponenti takvog spinora ne može napraviti manji broj linearnih kombinacija, koje bi se transformisale jedna u drugu pri svim transformacijama grupe. Drugim rečima, simetrični spinori čine ireducibilne reprezentacije grupe $SL(2,C)$. Simetričan spinor ranga (k,l) ima $(k+1)(l+1)$ nezavisnih komponenti.

Veza četvorovektora i spinora. Pokazaćemo da proizvod $\xi_a\bar\xi_{\dot b}$, sa pogodno izabranim koeficijentima, opisuje četvorodimenzionu reprezentaciju $(\frac{1}{2},0)\otimes(0,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, koja je ekvivalentna sa reprezentacijom po kojoj se transformiše četvorovektor x^μ. Pošto matrice A i A^+ imaju matrične elemente $A_a{}^b$ i $A^{+\dot{a}}{}_{\dot{b}}$, iz zakona transformacije $X' = AXA^+$ veličine X sledi da su njeni matrični elementi oblika $X_{a\dot{b}}$. Rešavanjem jednačina $X = x_\mu \sigma^\mu$ po x^μ i korišćenjem ekvivalencije $X_{a\dot{b}} \sim \xi_a \bar{\xi}_{\dot{b}}$, dobija se

$$x^\mu = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(X\bar{\sigma}^\mu) \sim \tfrac{1}{2}\xi_a\bar{\xi}_{\dot{b}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}a} = -\tfrac{1}{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\xi\,. \qquad (H.8)$$

Ovde smo koristili osobinu da matrični elementi od $\bar{\sigma}^\mu$ imaju oblik $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}a}$ [dok su matrični elementi od σ^μ oblika $(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}$], kao i pretpostavku da spinori ξ i $\bar{\xi}$ *antikomutiraju*. Nije teško pokazati, koristeći relacije kompletnosti

$$\sigma^\mu_{a\dot{b}}\bar{\sigma}^{\dot{c}d}_\mu = 2\delta^d_a\delta^{\dot{c}}_{\dot{b}}\,,$$

da se desna strana jednačine (H.8) pri transformacijama spinora transformiše kao x^μ. Matrica $\bar{\sigma}^\mu$ služi da od spinora $\bar{\xi}_{\dot{a}}\xi_b$ napravi četvorovektor.

U cilju jednostavnijeg pisanja nekad ćemo izostavljati indekse po kojima se sumira. Pri tome ćemo koristiti konvenciju

$$\xi\eta = \xi^a\eta_a\,, \qquad \bar{\xi}\bar{\eta} = \bar{\xi}_{\dot{a}}\bar{\eta}^{\dot{a}}\,,$$

koja je u skladu sa indeksnom strukturom matrica σ^μ, $\bar{\sigma}^\mu$: $\xi\sigma^\mu\bar{\eta} = \xi^a\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\bar{\eta}^{\dot{b}}$, itd.

Razmotrimo neke osobine matrica σ^μ i $\bar{\sigma}^\mu$, koje se često koriste u primenama. Iz relacije $X' = AXA^+$ sledi

$$\Lambda_\mu{}^\nu\sigma^\mu = A\sigma^\nu A^+ \quad\Longrightarrow\quad \sigma^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A\sigma^\nu A^+\,. \qquad (H.9a)$$

Ova relacija pokazuje da se veličina $\sigma^\mu_{a\dot{b}}$ može interpretirati kao četvorovektor i mešani spinor, i da je odgovarajući zakon transformacije u skladu sa činjenicom da je ova veličina konstantna. Ovo je moguće, jer se efekti spinorske i Lorencove transformacije medjusobno potiru.

Dizanjem oba spinorska indeksa veličine $\sigma^\mu_{a\dot{b}}$ dobija se

$$\sigma^{\mu a\dot{b}} \equiv [-g^{-1}(1,\boldsymbol{\sigma})\bar{g}^{-1}]^{a\dot{b}} = (1,-\boldsymbol{\sigma}^*)^{a\dot{b}}\,.$$

Posle toga kompleksna konjugacija daje

$$(\sigma^{\mu a\dot{b}})^* = (1,-\boldsymbol{\sigma})^{\dot{a}b} \equiv \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b}\,.$$

Mada je matrica $\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b}$ numerički jednaka sa $\sigma_{\mu a\dot{b}}$, ona ima različit spinorski karakter, pa se zato za nju koristi i posebna oznaka $\bar{\sigma}^\mu$. Iz $g^{-1}Ag = A^{-1T}$ i prethodnog razmatranja sledi još jedna korisna relacija:

$$\bar{\sigma}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^{-1+}\bar{\sigma}^\nu A^{-1}\,. \qquad (H.9b)$$

S druge strane, koristeći $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^T$, lako se dobija $\sigma^{\mu a\dot{b}} = \bar{\sigma}^{\mu\dot{b}a}$.

Prostorna inverzija i Dirakovi spinori. Operacija prostorne inverzije ili parnosti I_P deluje na prostorne rotacije i bustove po pravilu $M^i \to M^i$, $K^i \to -K^i$, tj. prebacuje J_1^i u J_2^i, i obratno; odatle sledi $I_P:\ (j_1, j_2) \to (j_2, j_1)$.

Tako, na primer, $I_P:\ (\frac{1}{2}, 0) \to (0, \frac{1}{2})$, pa spinor ξ^a prelazi u $\bar{\xi}_{\dot{a}}$, i obratno. Vršeći inverziju dva puta vraćamo se u početnu konfiguraciju. Spinori čine dvoznačnu reprezentaciju Lorencove grupe, pa se povratak u početnu konfiguraciju može shvatiti na dva načina: kao rotacija za 0 ili za 2π. Pošto spinor ξ_a menja znak pri rotaciji za 2π, postoje dve moguće definicije operacije parnosti:

$$
\begin{aligned}
I_P^2 &= 1 \qquad \Longrightarrow \quad I_P = \pm 1\,, \\
I_P^2 &= -1 \qquad \Longrightarrow \quad I_P = \pm i\,.
\end{aligned}
$$

Za sve spinore mora važiti ista konvencija. Ako je $I_P^2 = 1$, onda se može usvojiti

$$
I_P\, \xi_a = \bar{\eta}^{\dot{a}}\,, \qquad I_P\, \bar{\eta}^{\dot{a}} = \xi_a\,.
$$

Transformacije kovarijantnih i kontravarijantnih komponenti imaju različite znakove, jer se dizanje i spuštanje istog indeksa ostvaruje različitim znakovima: $I_P\, \xi^a = -\bar{\eta}_{\dot{a}}$, $I_P\, \bar{\eta}_{\dot{a}} = -\xi^a$. Ako je, pak, $I_P^2 = -1$, onda se dobija

$$
I_P\, \xi_a = i\bar{\eta}^{\dot{a}}\,, \qquad I_P\, \bar{\eta}^{\dot{a}} = i\xi_a\,,
$$

dok je $I_P\, \xi^a = -i\bar{\eta}_{\dot{a}}$, $I_P\, \bar{\eta}_{\dot{a}} = -i\xi^a$.

Razlika u fizičkim posledicama ova dva izbora javlja se kod istinski neutralnih polja spina $\frac{1}{2}$, kod kojih se čestica i antičestica ne razlikuju. Pošto takva polja nisu poznata u prirodi, u daljem izlaganju usvojićemo drugi izbor zbog odredjenosti.

Na taj način, uključivanje parnosti u grupu simetrije dovodi do potrebe razmatranja para spinora $(\xi_a, \bar{\eta}^{\dot{b}})$, ili direktnog zbira $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ reprezentacija. Takav par se naziva bispinor, četvorospinor ili Dirakov spinor, i piše se u obliku

$$
\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}. \tag{H.10a}
$$

Njegov zakon transformacije je

$$
\Psi' = S(A)\Psi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\xi \\ A^{-1+}\bar{\eta} \end{pmatrix}, \tag{H.10b}
$$

dok za parnost imamo

$$
I_P\, \Psi = i \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \xi \end{pmatrix}, \qquad \text{tj.} \qquad I_P = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{H.10c}
$$

Dirakova jednačina. Uvodjenje pojma spinora omogućava jednostavno i sistematsko zapisivanje jednačina kovarijantnih u odnosu na grupu $SL(2,C)$. Osnovni objekti od kojih se prave fizičke jednačine kretanja su spinorska polja, operatori parcijalnog izvoda i neki parametri. Kao i kod tenzorskih jednačina, i ovde jednakost spinorske strukture obe strane jednačine osigurava njenu kovarijantnost.

Posmatrajmo jednostavan primer linearne spinorske diferencijalne jednačine koji ilustruje opšti metod i, istovremeno, predstavlja fizički važan slučaj Dirakove jednačine za polje spina $\frac{1}{2}$. Koristeći operatore $p = \sigma^\mu p_\mu$, $\bar{p} = \bar{\sigma}^\mu p_\mu$, $(p_\mu = i\partial_\mu)$, i spinorska *polja* $\xi_a(x)$ i $\bar{\eta}^{\dot{b}}(x)$, zahtev kovarijantnosti dovodi do jednačina

$$
\begin{aligned}
p_{a\dot{b}}\bar{\eta}^{\dot{b}} &= m\xi_a \,, \\
\bar{p}^{\dot{a}b}\xi_b &= m\bar{\eta}^{\dot{a}} \,,
\end{aligned}
\qquad (H.11a)
$$

gde je m maseni parametar. Ove jednačine su zaista kovarijantne ako se spinorska polja transformišu po zakonu

$$
\xi'_a(x') = A_a{}^b\xi_b(x) \,, \qquad \bar{\eta}'^{\dot{a}}(x') = A^{*-1T\dot{a}}{}_{\dot{b}}\bar{\eta}^{\dot{b}}(x) \,,
$$

što se lako proverava. Prelazeći na četvorokomponentnu notaciju gornje jednačine se mogu napisati u obliku

$$
\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} ,
$$

koji je ekvivalentan sa uobičajenim oblikom Dirakovih jednačina

$$
\gamma^\mu p_\mu \Psi = m\Psi \,, \qquad (H.11b)
$$

gde su Dirakove matrice γ^μ date u spinorskoj reprezentaciji kao

$$
\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} . \qquad (H.12a)
$$

Dirakove matrice zadovoljavaju algebru

$$
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \,, \qquad (H.12b)
$$

koja ima različite ekvivalentne reprezentacije. Za razmatranje nerelativističke aproksimacije pogodnija je tzv. standardna reprezentacija, ali o njoj ovde neće biti reči.

Pri pravljenju kovarijantnih bilinearnoh kombinacija tipa $\overline{\Psi}\Psi$ koristi se Dirakov konjugovani spinor $\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma^0$ a ne $\Psi^+ = (\xi^*, \bar{\eta}^*)$. Razlog za to je činjenica da γ^0 premešta ξ^* i $\bar{\eta}^*$, tako da je tip prvog i drugog spinora u $\overline{\Psi} = (\bar{\eta}^*, \xi^*)$ isti kao kod Ψ, pa je izraz $\overline{\Psi}\Psi = \bar{\eta}^*\xi + \xi^*\bar{\eta}$ definisan kovarijantno.

Majorana i Vajlovi spinori. Dirakova jednačina ima smisla i kad spinor η nije različit od ξ, tj. kad važi

$$\bar{\eta}^{\dot{a}} = \bar{\xi}_c^{\dot{a}}\,, \qquad \bar{\xi}_c^{\dot{a}} \equiv \bar{g}^{\dot{a}\dot{b}}\bar{\xi}_{\dot{b}}\,,$$

gde je $\bar{\xi}_c$ dobijen iz ξ operacijom C konjugacije (kompleksna konjugacija + dizanje indeksa). Na sličan način se definiše C konjugacija spinora $\bar{\eta}$. Dvostruka primena C konjugacije daje polazni spinor. Uslovi $\bar{\eta} = \bar{\xi}_c$ i $\xi = \eta^c$ u četvorokomponentnoj notaciji dobijaju oblik

$$\Psi = \Psi_c\,, \quad \Psi_c = \begin{pmatrix} \eta_a^c \\ \bar{\xi}_c^{\dot{b}} \end{pmatrix} = C\bar{\psi}^T\,, \quad C \equiv i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}\,, \qquad (H.13)$$

gde je C matrica C konjugacije u spinorskoj reprezentaciji. Tada Dirakov spinor ima samo dve nezavisne kompleksne komponente i naziva se Majorana spinor. Ovaj slučaj odgovara fizičkoj situaciji kad se čestica ne razlikuje od svoje antičestice.

Ako je $m = 0$, jednačine za ξ i $\bar{\eta}$ se razdvajaju, i nazivaju se Vajlove jednačine. One opisuju bezmasene čestice leve i desne polarizacije, prelaze jedna u drugu pri prostornoj inverziji, i koriste se za opis neutrina. U četvorokomponentnoj notaciji Vajlovi spinori ξ i $\bar{\eta}$ se predstavljaju u obliku projekcija

$$\Psi_{\mp} = P_{\mp}\Psi\,, \qquad \Psi_- = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \Psi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}\,, \qquad (H.14a)$$

gde su $P_{\mp}$ odgovarajući projektori:

$$P_{\mp} = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)\,, \qquad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,. \qquad (H.14b)$$

Zadaci

1. Pokazati da se u Minkovskijevom prostoru prelaz na referentni sistem, koji je zarotiran za ugao θ oko x^1 ose, ili koji se kreće brzinom $v = \operatorname{tgh}\varphi$ duž x^1 ose, opisuje matricama R_1 i L_1, redom, koje imaju sledeći oblik:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\,, \qquad L_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

2. Dokazati sledeće jednakosti:

$$\sigma^\mu_{a\dot b}\bar\sigma_\mu^{\dot c d} = 2\delta^d_a\delta^{\dot c}_{\dot b} \qquad \text{(relacija kompletnosti)}\,,$$
$$\mathrm{Tr}\,(G\sigma^\mu)\mathrm{Tr}\,(H\bar\sigma_\mu) = 2\mathrm{Tr}\,(GH)\,.$$

3. Dokazati da je preslikavanje $(H.4b)$ homomorfizam SL(2,C) na L_0, i da važi $(H.4c)$.
4. Pokazati da su generatori M^i i K^i u spinorskim reprezentacijama $(\frac12,0)$ i $(0,\frac12)$ oblika

$$r_1(M^1) = \sigma_{23} = -\tfrac12 i\sigma^1\,, \qquad r_1(K^1) = \sigma_{01} = \tfrac12\sigma^1\,,$$
$$r_2(M^1) = \bar\sigma_{23} = -\tfrac12 i\sigma^1\,, \qquad r_2(K^1) = \bar\sigma_{01} = -\tfrac12\sigma^1\,,$$

i slično za druge dve komponente.
5. Pokazati da su konačne rotacije spinora ξ_a oko ose x^1 za ugao $\omega_{23} = \theta$ date matricom

$$A = e^{-\frac12 i\theta\sigma^1} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma^1\sin\frac{\theta}{2}\,,$$

koja je unitarna, $A^+ = A^{-1}$, i zadovoljava uslove $A(0) = 1, A(2\pi) = -1$. Naći odgovarajuće transformacije vektora x^μ iz M_4.
6. Pokazati da su konačni bustovi spinora $\bar\xi^{\dot a}$ brzinom $v = \mathrm{tgh}\,\varphi$ $(\omega_{01} = \varphi)$ duž ose x^1 dati matricom

$$A = e^{-\frac12\varphi\sigma^1} = \mathrm{ch}\,\frac{\varphi}{2} - \sigma^1\mathrm{sh}\,\frac{\varphi}{2}\,,$$

koja je hermitska, $A^+ = A$. Naći odgovarajuće transformacije vektora x^μ iz M_4.
7. Naći zakone transformacija veličina $\xi\sigma^\mu\bar\eta$ i $\xi\sigma^{\mu\nu}\eta$ u odnosu na $SL(2,C)$.
8. Dokazati da antikomutirajući spinori zadovoljavaju sledeće identitete:

$$\theta_a\theta_b = \tfrac12\varepsilon_{ab}(\theta\theta)\,, \qquad (\xi\eta)^* = (\bar\eta\bar\xi)\,,$$
$$\xi\eta = \eta\xi\,, \quad \bar\xi\bar\eta = \bar\eta\bar\xi\,, \qquad (\xi\sigma^\mu\bar\eta)^* = (\eta\sigma^\mu\bar\xi)\,,$$
$$\xi\sigma^\mu\bar\eta = -\bar\eta\bar\sigma^\mu\xi\,, \qquad [(\sigma^\mu\bar\eta)_a]^* = (\eta\sigma^\mu)_{\dot a}\,.$$

Kompleksna konjugacija je definisana tako da menja poredak antikomutirajućih spinora.
9. Dokazati sledeće Fircove identitete:

$$(\theta\xi)(\theta\eta) = -\tfrac12(\theta\theta)(\xi\eta)\,, \qquad (\xi\sigma^\mu\bar\eta)(\bar\sigma_\mu\eta)^{\dot a} = -2(\xi\eta)\bar\eta^{\dot a}\,,$$
$$2\xi^a\bar\eta^{\dot b} = (\xi\sigma^\mu\bar\eta)\bar\sigma_\mu^{\dot b a}\,, \qquad (\xi_1\xi_2)(\bar\eta_1\bar\eta_2) = -\tfrac12(\xi_1\sigma^\mu\bar\eta_1)(\bar\eta_2\bar\sigma_\mu\xi_2)\,.$$

I. POENKAREOVA GRUPA I BEZMASENE ČESTICE

Najopštija linearna transformacija koordinata izmedju dva inercijalna referentna sistema dobija se kada se nehomogenim Lorencovim transformacijama doda translacija:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \,. \qquad (I.1a)$$

Tako dobijena desetoparametarska grupa naziva se Poenkareova grupa (P).

U dodatku H smo razmatrali konačnodimenzione, neunitarne ireducibilne reprezentacije (IR) Lorencove grupe, koje ne poseduju odredjen spin i masu, pa se ne mogu direktno pridružiti elementarnim fizičkim objektima — česticama (isti zaključak važi i za beskonačnodimenzione, unitarne reprezentacije). Na jednostavnom primeru Dirakovog polja videli smo da prelaz od spinora na spinorsko *polje*, koje zadovoljava odredjenu jednačinu kretanja, može dovesti do objekta odredjene mase i spina. U opštem slučaju *jednačina kretanja* polja odredjuje vrednost mase i osigurava jedinstvenu vrednost spina. Ovim postupkom se, ustvari, prelazi na IR Poenkareove grupe koje služe za klasifikaciju elementarnih čestica. Ovde ćemo dati kratak pregled onih karakteristika Poenkareove grupe koje su povezane sa opisom bezmasenih čestica i postojanjem lokalne simetrije u teoriji polja (Novožilov, 1972; Van Dam, 1974; Barut i Raczka, 1977).

Poenkareova grupa se sastoji od translacija i homogenih Lorencovih transformacija. Ako Poenkareovu transformaciju označimo sa $g = (\Lambda, a)$, pravilo kompozicije dve transformacije ima oblik

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1) \,. \qquad (I.1b)$$

Pravilo kompozicije ne odgovara direktnom proizvodu translacije i homogene Lorencove transformacije, jer ove operacije ne komutiraju.

Algebra generatora. Standardan način dobijanja reprezentacija grupe je posmatranje promena nekih funkcija pri transformacijama te grupe. Ako je $g = (\Lambda, a)$ elemenat Poenkareova grupe, a $\phi(x)$ skalarna funkcija, tada je

$$\phi'(x') = \phi(x) \,, \qquad \text{ili} \qquad \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}(x-a)) \equiv U(g)\phi(x) \,,$$

gde $U(g)$ reprezentuje delovanje Poenkareove grupe u prostoru skalarnih funkcija. Pri beskonačno malim transformacijama, operator U je blizak jedinici i ima oblik

$$U(g) = 1 + \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + a^{\mu} P_{\mu} \,,$$

gde su $M_{\mu\nu} = x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}$ i $P_{\mu} = -\partial_{\mu}$ generatori Poenkareove grupe koji zadovoljavaju algebru

$$\begin{aligned} &[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = \eta_{\nu\lambda} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho} M_{\nu\lambda} \,, \\ &[M_{\mu\nu}, P_{\lambda}] = \eta_{\nu\lambda} P_{\mu} - \eta_{\mu\lambda} P_{\nu} \,, \qquad [P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \,. \end{aligned} \qquad (I.2)$$

Posmatrana reprezentacija je beskonačnodimenziona, a može se pokazati i da je unitarna (uz pogodan izbor skalarnog proizvoda). Opšta razmatranja u kvantnoj teoriji pokazuju da operatori simetrija moraju biti unitarni ili antiunitarni. Ako je grupa simetrije neprekidna i povezana sa jedinicom, onda su odgovarajući operatori *unitarni*, pa ćemo zato razmatrati samo takve reprezentacije Poenkareove grupe. Prema opštem stavu, sve unitarne IR Poenkareove grupe su beskonačnodimenzione (jer je grupa prosta i nekompaktna).

Pokrivajuća grupa. Neka je P_0 onaj deo Poenkareove grupe koji je neprekidno povezan sa jediničnim elementom — on se sastoji od pravih Lorencovih transformacija L_0 i translacija. Lorencova grupa L_0 je dvostruko povezana, pa je takva i Poenkareova grupa. Označimo sa $\overline{P}$ odgovarajuću pokrivajuću grupu. Znajući da je pokrivajuća grupa za Lorencovu grupu $SL(2,C)$, nije teško pokazati da je opšti elemenat pokrivajuće grupe $\overline{P}$ oblika $\bar{g} = (A, a)$, gde je $A \in SL(2,C)$, $a = a_\mu \sigma^\mu$. Pravilo kompozicije dva elementa $\bar{g}_2$ i $\bar{g}_1$ je

$$(A_2, a_2)(A_1, a_1) = (A_2 A_1, a_2 + A_2 a_1 A_2^+)\,. \qquad (I.3a)$$

Odavde sledi relacija

$$(A, a) \equiv (1, a)(A, 0) = (A, 0)(1, A^{-1} a A^{-1+})\,, \qquad (I.3b)$$

koja će biti korisna za konstrukciju unitarnih IR Poenkareovih transformacija (A, a) preko odgovarajućih reprezentacija translacija $(1, a)$ i Lorencovih transformacija $(A, 0)$.

Pri beskonačno maloj transformaciji $\bar{g}$, operator $U(\bar{g})$, koji reprezentuje grupu $\overline{P}$, blizak je jedinici:

$$U(\bar{g}) = 1 + \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + a^\mu P_\mu\,. \qquad (I.4)$$

Generatori $M_{\mu\nu}$ i P_μ zadovoljavaju komutacione relacije $(I.2)$ koje karakterišu P_0, iz čega sledi lokalni izomorfizam $\overline{P}$ i P_0.

Invarijante. Koristeći generatore P_μ i $M_{\mu\nu}$ mogu se definisati invarijantne veličine koje karakterišu IR grupe $\overline{P}$. U unitarnim reprezentacijama se često koriste hermitski generatori p_μ i $m_{\mu\nu}$ definisani relacijama $P_\mu = ip_\mu$, $M_{\mu\nu} = im_{\mu\nu}$, jer je njihova fizička interpretacija direktnija.

Od komponenti impulsa može se konstruisati samo jedna opšta invarijanta:

$$p_\mu p^\mu = m^2\,, \qquad (I.5a)$$

Pri $m^2 \geq 0$ veličina m^2 ima smisao kvadrata mase mirovanja. Tada se može definisati još jedna invarijantna funkcija impulsa,

$$\epsilon = \text{znak od } (p_0)\,, \qquad (I.5b)$$

koja je pozitivna za fizička stanja. Invarijantnost od ϵ je posledica toga što grupa P_0 ne menja znak vremenske komponente vektora vremenskog tipa.

Od komponenti generatora P_μ i $M_{\mu\nu}$ može se napraviti vektor

$$W_\mu \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}M^{\nu\lambda}P^\sigma \,. \tag{I.5c}$$

koji komutira sa P_μ. Njegov kvadrat je, takodje, invarijanta. Smisao ove invarijante se lako vidi pri $m^2 > 0$: u sistemu mirovanja W^2/m^2 je jednako kvadratu uglovnog momenta $\boldsymbol{M}^2$, tj. kvadratu spina. Pri $m^2 = 0$ umesto W^2 uvodi se helicitet λ.

Unitarne IR grupe $\overline{P}$ su odredjene invarijantama $(m^2,\, W^2$ ili $\lambda,\, \epsilon)$, i one opisuju stanja elementarnih čestica u kvantnoj teoriji polja.

Mala grupa. Hilbertov prostor predstavlja vektorski prostor u kome se reprezentuje delovanja grupe $\overline{P}$ preko operatora $U(\bar{g})$. Vektori unutar jedne IR nose invarijantne karakteristike koje odgovaraju fizičkim stanjima elementarnih čestica (masa, spin); zbog toga se ovi vektori često nazivaju vektori stanja. Izaberimo za bazis potprostora ireducibilne reprezentacije skup vektora stanja odredjenog impulsa $\{|\, \boldsymbol{p}, s\rangle\}$. Ovakva oznaka vektora potiče iz kvantne teorije, a spinske varijable s prebrojavaju vektore posmatranog skupa. Delujući na bilo koje od ovih stanja operator impulsa p_μ dobija odredjenu (svojstvenu) realnu vrednost, koju ćemo, zbog jednostavnosti, označiti na isti način: p_μ. Svako stanje odredjenog impulsa predstavlja jednodimenzionu reprezentaciju translacione podgrupe,

$$U(0,a)\,|\, \boldsymbol{p}, s\rangle = \exp(-ip\cdot a)\,|\, \boldsymbol{p}, s\rangle \,. \tag{I.6a}$$

Prema tome, za konstrukciju unitarnih IR pokrivajuće grupe $\overline{P}$ dovoljno je naći odgovarajuće reprezentacije homogenih Lorencovih transformacija $U(A,0) \equiv U(A)$ u prostoru vektora stanja odredjenog impulsa.

Pošto se pri $SL(2,C)$ transformaciji A impuls p menja u $p' = \Lambda(A)p$, transformacija $U(A)$ proizvodi stanje novog impulsa p':

$$U(A)\,|\, \boldsymbol{p}, s\rangle = \sum_{s'} |\, \boldsymbol{p}', s'\rangle D_{s's}(A)\,, \qquad p' = \Lambda(A)p\,, \tag{I.6b}$$

gde matrica $D_{s's}$ deluje u prostoru spinskih varijabli. Pojam male grupe se uvodi u cilju eksplicitne konstrukcije ovih matrica, a time i kompletnih IR u Hilbertovom prostoru stanja.

Matrica impulsa $p = p_\mu\sigma^\mu$ se transformiše po zakonu $p' = ApA^+$. Posmatrajmo one transformacije A koje ne menjaju impuls p,

$$p = \tilde{A}p\tilde{A}^+ \,. \tag{I.7}$$

Oblik matrice $\tilde{A}$ zavisi od izabranog impulsa p, $\tilde{A} = \tilde{A}(p)$. Skup matrica $\tilde{A}(p)$ obrazuje podgrupu od $SL(2,C)$ — *malu grupu* $L(p)$ koja odgovara impulsu p.

Ako su impulsi p i $\overset{\circ}{p}$ povezani Lorencovim transformacijama,

$$p = \alpha(p,\overset{\circ}{p})\overset{\circ}{p}\alpha^{+}(p,\overset{\circ}{p})\,,$$

onda su grupe $L(p)$ i $L(\overset{\circ}{p})$ izomorfne. Veza $\tilde{A}(p)$ i $\tilde{A}(\overset{\circ}{p})$ je data relacijom

$$\tilde{A}(p) = \alpha(p,\overset{\circ}{p})\tilde{A}(\overset{\circ}{p})\alpha^{-1}(p,\overset{\circ}{p})\,.$$

Zbog ove veze dovoljno je, za dato $p^2 = m^2$, razmotriti malu grupu samo jednog impulsa $\overset{\circ}{p}$, koji se može izabrati proizvoljno. Impuls $\overset{\circ}{p}$ je tzv. *standardni impuls*.

Operator $\alpha(p,\overset{\circ}{p})$ se naziva *Vignerovim operatorom*. Izmedju operatora A iz $SL(2,C)$ i operatora $\tilde{A}(\overset{\circ}{p})$ iz $L(\overset{\circ}{p})$ postoji veza koja sledi iz relacija

$$p' = ApA^{+}\,, \qquad p = \alpha(\boldsymbol{p})\overset{\circ}{p}\alpha^{+}(\boldsymbol{p})\,, \qquad p' = \alpha(\boldsymbol{p}')\overset{\circ}{p}\alpha^{+}(\boldsymbol{p}')\,,$$

gde je $\alpha(\boldsymbol{p}) \equiv \alpha(p,\overset{\circ}{p})$, i ona glasi

$$A = \alpha(\boldsymbol{p}')\tilde{A}(\overset{\circ}{p})\alpha^{-1}(\boldsymbol{p})\,. \tag{I.8}$$

Operator $\alpha(\boldsymbol{p})$ nije jednoznačno definisan, jer $\alpha(\boldsymbol{p})$ i $\alpha(\boldsymbol{p})\tilde{A}(\overset{\circ}{p})$ imaju isti efekat. No, ako se $\alpha(\boldsymbol{p})$ fiksira na odredjeni način, veza izmedju Lorencovih transformacija A i transformacija male grupe $\tilde{A}(\overset{\circ}{p})$ postaje jednoznačna.

Razjasnimo sada značaj male grupe pri konstrukciji unitarnih IR Lorencove, a time i Poenkareove grupe. Koristeći Vignerov operator lako se vidi da je $|\,\boldsymbol{p},s\rangle = U[\alpha(\boldsymbol{p})]\,|\,\overset{\circ}{\boldsymbol{p}},s\rangle$, pa sledi

$$U(A)\,|\,\boldsymbol{p},s\rangle = U(A)\,U[\alpha(\boldsymbol{p})]\,|\,\overset{\circ}{\boldsymbol{p}},s\rangle\,.$$

Pošto je $A(p)\alpha(\boldsymbol{p}) = \alpha(\boldsymbol{p}')\tilde{A}(\overset{\circ}{p})$, prethodna jednačina postaje

$$\begin{aligned} U(A)\,|\,\boldsymbol{p},s\rangle &= U[\alpha(\boldsymbol{p}')]\,U[\tilde{A}(\overset{\circ}{p})]\,|\,\overset{\circ}{\boldsymbol{p}},s\rangle \\ &= U[\alpha(\boldsymbol{p}')]\sum_{s'}|\,\overset{\circ}{\boldsymbol{p}},s'\rangle D_{s's}[\tilde{A}(\overset{\circ}{p})] = \sum_{s'}|\,\boldsymbol{p}',s'\rangle D_{s's}[\tilde{A}(\overset{\circ}{p})]\,. \end{aligned}$$

Prema tome, da bi se našla reprezentacija za $U(A)$, dovoljno je naći matrice $D_{s's}$ samo za standardni impuls $\overset{\circ}{p}$. Tako, konačno, dolazimo do rezultata da unitarne IR Poenkareove grupe $\overline{P}$ u impulsnom bazisu imaju oblik

$$U(A)\,|\,\boldsymbol{p},s\rangle = \exp(-ip'\cdot a)\sum_{s'}|\,\boldsymbol{p}',s'\rangle D_{s's}[\tilde{A}(\overset{\circ}{p})]\,, \qquad p' = \Lambda(A)p\,, \tag{I.9}$$

gde su matrice $D_{s's}$ unitarne IR male grupe standardnog impulsa $\overset{\circ}{p}$.

Unitarnost i ireducibilnost reprezentacija Poenkareove grupe su direktno povezani sa istim osobinama male grupe.

Prema vrednostima impulsa definišu se četiri klase reprezentacija Poenkareove grupe: 1) $p^2 > 0$, 2) $p^2 < 0$, 3) $p^2 = 0$ i 4) $p = 0$ (prva i treća odgovaraju fizičkim stanjima). Mi ćemo bliže razmotriti samo treći slučaj, koji opisuje karakteristike bezmasenih čestica u teoriji polja.

Unitarne reprezentacije u slučaju $m^2 = 0$. Slučaj čestica mase nula posebno je interesantan za razumevanje teorija sa lokalnom simetrijom. Pošto je $p^2 = 0$, standardni impuls se može izabrati u formi $\overset{\circ}{p}{}^{\mu} = \omega(1,0,0,1)$, pa je odgovarajuća matrica data izrazom $\overset{\circ}{p} = \omega(1-\sigma^3)$. Mala grupa standardnog impulsa definisana je relacijom

$$\tilde{A}(1-\sigma^3)\tilde{A}^+ = 1-\sigma^3 \,.$$

U slučaju beskonačno malih transformacija, rešenje prethodne jednačine je oblika

$$\tilde{A} = t(\varepsilon)u(\theta)\,, \tag{I.10}$$

gde je

$$t(\varepsilon) \simeq 1 + \tfrac{1}{2}(\sigma^1 - i\sigma^2)\varepsilon\,, \qquad u(\theta) \simeq 1 - \tfrac{1}{2}i\sigma^3\theta\,,$$

ε je kompleksan, a θ realan parametar.

Ako se uvedu realne promenljive ε_1 i ε_2 ($\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$), onda $u(\theta)$ opisuje rotacije u ravni $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ za ugao θ, a $t(\varepsilon)$ opisuje translacije u istoj ravni. Ovo se može pokazati na bazi komutacionih osobina operatora $u(\theta)$ i $t(\varepsilon)$, koje definišu grupu $E(2)$ — grupu transformacija u dvodimenzionoj euklidskoj ravni E_2.

Vignerov operator se, u slučaju $m^2 = 0$, može odrediti iz relacije

$$\alpha(\boldsymbol{p})\omega(1-\sigma^3)\alpha^+(\boldsymbol{p}) = \mid \boldsymbol{p} \mid \sigma^0 + p_\alpha\sigma^\alpha \equiv p_\mu\sigma^\mu \,.$$

Smisao male grupe pri $m^2 = 0$ se može razjasniti nalaženjem operatora $U(\bar{g})$ za beskonačno male transformacije $\bar{g}$. Time se, ujedno, čini prvi korak ka nalaženju unitarnih reprezentacija od $U(\bar{g})$. U slučaju beskonačno malih transformacija $(I.10)$, iz $(H.4b)$ se dobijaju vrednosti za $\omega^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu$,

$$\omega^{12}(\theta) = \theta\,, \qquad \omega^{02}(\varepsilon) = \omega^{32}(\varepsilon) = \varepsilon_2\,, \qquad \omega^{01}(\varepsilon) = \omega^{31}(\varepsilon) = \varepsilon_1\,,$$

pa $U(\bar{g})$ postaje

$$\begin{aligned} &U(\theta,\varepsilon) = 1 + \theta M_{12} + \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2\,, \\ &E_1 \equiv M_{01} + M_{31}\,, \qquad E_2 \equiv M_{02} + M_{32}\,. \end{aligned} \tag{I.11}$$

Operatori E_1, E_2 i M_{12} zadovoljavaju komutacione relacije grupe $E(2)$:

$$[E_1, E_2] = 0\,, \qquad [M_{12}, E_1] = E_2\,, \qquad [M_{12}, E_2] = -E_1\,. \qquad (I.12)$$

Ireducibilne reprezentacije stanja grupe $E(2)$ se mogu okarakterisati svojstvenim vrednostima $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$ i λ generatora $-i\boldsymbol{E} = -i(E_1, E_2)$ i $-iM_{12} = m_{12}$, redom, pa je vektor stanja oblika $|\, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}, \lambda\rangle$.

Ako je $\boldsymbol{t}^2 > 0$, onda je "impuls" grupe $E(2)$ različit od nule i ima kontinuirane svojstvene vrednosti, pa su odgovarajuće reprezentacije beskonačno dimenzione. Pošto dimenzija reprezentacije (obično) karakteriše spin elementarnih čestica, to se ovakve reprezentacije odbacuju (u prirodi ne postoje čestice beskonačnog spina).

Ako je $\boldsymbol{t}^2 = 0$, grupa $E(2)$ deluje kao grupa rotacije u ravni, tj. kao U(1). Takve reprezentacije su *jednodimenzione* i karakterišu se celobrojnom ili polucelobrojnom svojstvenom vrednošću λ:

$$U(\bar{g}) \to \exp(i\lambda\theta) \qquad (\lambda = 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1, ...)\,.$$

U reprezentaciji $|\, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{t}, \lambda\rangle$ vektor W_μ iz $(I.5c)$ se može zapisati u obliku $W_\mu = i\omega(-M_{12}, -E_2, E_1, M_{12})$. Ako je $\boldsymbol{t}^2 = 0$, tj. svojstvene vrednosti operatora E_1 i E_2 su nule, onda je

$$W_\mu = \lambda p_\mu\,.$$

Veličina λ ima smisao heliciteta, jer je $\lambda = \boldsymbol{mp}/\mid \boldsymbol{p} \mid$. Izmena znaka λ znači prelaz na drugu česticu (ireducibilnu reprezentaciju). Apsolutna vrednost od λ naziva se spinom bezmasenih čestica.

Vraćajući se sada na Poenkareovu grupu, možemo zaključiti da se fizička stanja mase $m = 0$ klasifikuju po helicitetu λ i imaju zakon transformacije

$$U(a, A) \mid \boldsymbol{p}, \lambda\rangle = \exp(-ip \cdot a) \exp(i\lambda\theta) \mid \boldsymbol{p}, \lambda\rangle\,. \qquad (I.13)$$

Foton se, kao što znamo, karakteriše sa dva stanja heliciteta, $\lambda = \pm 1$. To znači da se on opisuje reducibilnom reprezentacijom grupe $\overline{P}$. Pri prostornoj inverziji stanja $\lambda = \pm 1$ prelaze jedno u drugo, i čine IR grupe $\overline{P}$ zajedno sa prostornom inverzijom.

Polja i stanja. Pri razmatranju Dirakove jednačine u dodatku H uveli smo *klasično* Dirakovo polje, čiji je zakon transformacije oblika

$$\Psi'(\Lambda x) = S(A)\Psi(x)\,,$$

gde matrica $S(A)$ predstavlja četvorodimenzionu neunitarnu reprezentaciju Lorencove grupe $\bar{L}$. Isti je slučaj i sa drugim spinorskim poljima — u zakonu transformacije se uvek javlja matrica koja realizuje *neunitarnu*, konačnodimenzionu reprezentaciju od $\bar{L}$. Treba naglasiti da se pri uvodjenju *polja* u zakonu transformacije pojavljuje i zavisnost od koordinate x, zbog čega posmatrana reprezentacija postaje beskonačnodimenziona. Spinorska polja služe za konstrukciju kovarijantnih jednačina, preko kojih ta polja dobijaju smisao fizičkih objekata odredjene mase i spina. S druge strane, videli smo da *unitarne*, beskonačnodimenzione reprezentacije Poenkareove grupe $\overline{P}$ u Hilbertovom prostoru stanja odgovaraju fizičkim česticama odredjene mase i spina. Kako uspostaviti neku direktniju vezu izmedju ova dva rezultata?

U *kvantnoj* teoriji polja postoje stanja $\mid \omega\rangle$ i operatori polja $\hat{\Psi}$. Pri Lorencovim transformacijama $x \to x' = \Lambda x$, stanja se transformišu po pravilu $\mid \omega\rangle \to \mid \omega_A\rangle = U(A) \mid \omega\rangle$. Klasična polja su očekivane vrednosti operatora polja, tako da je

$$\langle \omega_A \mid \hat{\Psi}(\Lambda x) \mid \omega_A\rangle \equiv \Psi'(\Lambda x)\,.$$

Odavde se direktno dobija pravilo transformacije operatora polja $\hat{\Psi}$ u odnosu na $\bar{L}$. Operator polja je spinorsko polje, što znači da to nije objekat odredjenog spina. Postoji jedan važan rezulat u teoriji polja, koji daje algoritam konstrukcije operatora polja odredjenog spina polazeći od datog stanja $\mid \omega\rangle$. Konstrukcija se realizuje pomoću uvodjenja vakuumskog stanja i operatora kreacije i anihilacije koji odgovaraju datom stanju $\mid \omega\rangle$. Ovom konstrukcijom se uspostavlja direktna veza izmedju reprezentacija na stanjima i na poljima.

Ova veza se može jednostavno ilustrovati i na klasičnom nivou. Posmatrajmo, kao jednostavan primer, vektorsko polje $A^\mu(x)$, čiji zakon transformacije u odnosu na $\overline{P}$ ima oblik

$$A'^\mu(\Lambda x + a) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)\,.$$

Iz ponašanja u odnosu na Lorencove transformacije znamo da ovo polje ima spin $j = 0, 1$. Nametnimo sada uslove

$$(\Box + m^2)A^\mu = 0\,, \qquad \partial_\mu A^\mu = 0\,.$$

Prvi uslov znači da polje ima masu m, dok drugi eliminiše spin $j = 0$ iz polja A^μ. Zaista, u sistemu mirovanja drugi uslov ima oblik $p_\mu A^\mu = p_0 A^0 = 0$, tj. $A^0 = 0$, pa se polje opisuje trovektorom $\boldsymbol{A}$ koji nosi spin $j = 1$. Tako smo od vektorskog polja A^μ konstruisali polje mase m i spina $j = 1$. Oba prethodna uslova se mogu realizovati zadavanjem jedne jednačine:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0\,.$$

Diferenciranjem ove jednačine dobija se, pri $m^2 \neq 0$, drugi uslov, a njegova zamena u posmatranu jednačinu dovodi do prvog uslova.

Uobičajeno je da se jednačina za polje odredjenog tipa dobija iz dejstva. Prethodni primer ilustruje sledeću važnu činjenicu:

relativistička jednačina slobodnog polja predstavlja kinematički uslov koji osigurava da posmatrano polje ima odredjenu masu i spin.

Znajući da postoji ovakva veza, posmatraćemo sada neke osobine stanja bezmasenih čestica, iz kojih će se videti da je gradijentna invarijantnost neposredno povezana sa osobinama male grupe posmatrane reprezentacije.

Vektorske i tenzorske čestice mase nula. Ako zahtevamo simetriju teorije u odnosu na prostornu inverziju, onda se čestica mase nula i heliciteta 1 opisuje sa dva stanja, $\lambda = \pm 1$. Mogu li se ta dva stanja smatrati komponentama jednog četvorovektora? Da bismo ispitali ovu mogućnost, napišimo najpre generatore male grupe za impuls $\overset{\circ}{p}{}^{\mu} = \omega(1,0,0,1)$ u vektorskoj reprezentaciji,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Od vektora $\epsilon_{(1)} = (0,1,0,0)$ i $\epsilon_{(2)} = (0,0,1,0)$ mogu se definisati dva stanja heliciteta $\lambda = \pm 1$ (svojstvena stanja od $m_{12} = -iM_{12}$),

$$\epsilon_{(\pm 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_{(1)} \pm i\epsilon_{(2)}),$$

koja prelaze jedno u drugo pri prostornoj inverziji. No, vektori $\epsilon_{(1)}$ i $\epsilon_{(2)}$ nisu invarijantni u odnosu na $E(2)$ translacije:

$$\epsilon_{(a)} \to \epsilon_{(a)} + t'_a(1,0,0,1) = \epsilon_{(a)} + t_a \overset{\circ}{p}, \qquad a = 1,2.$$

Zato se dva stanja polarizacije fotona ne mogu opisati sa dva jedinična vektora $\epsilon_{(1)}$ i $\epsilon_{(2)}$. Ona se, medjutim, mogu opisati *klasama ekvivalencije* ova dva vektora,

$$\{\epsilon_{(1)} + t_1\overset{\circ}{p}\}, \qquad \{\epsilon_{(2)} + t_2\overset{\circ}{p}\},$$

jer su ove invarijantne u odnosu na $E(2)$ translacije. U slučaju opšteg vektora p^μ, dva stanja polarizacije fotona opisana su klasama ekvivalencije

$$\begin{aligned} &\{\epsilon_{(1)} + t_1 p\}, \qquad \{\epsilon_{(2)} + t_2 p\}, \\ &p\cdot\epsilon_{(1)} = p\cdot\epsilon_{(2)} = \epsilon_{(1)}\cdot\epsilon_{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{I.14}$$

Svaka dva vektora unutar iste klase ekvivalencije povezana su *gradijentnom* transformacijom $\epsilon^\mu \to \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + tp^\mu$.

U lagranžijanskoj formulaciji zavisnost teorije od klasa ekvivalencije, a ne od pojedinih vektora ϵ, osigurava se gradijentnom invarijantnošću:

a) interakcija sa materijom ne zavisi od izbora vektora unutar klase ekvivalencije,

$$(\epsilon^\mu + tp^\mu)J_\mu = \epsilon^\mu J_\mu \, ,$$

ako je struja očuvana, $p^\mu J_\mu = 0$;

b) lagranžijan slobodnog elektromagnetnog polja zavisi samo od antisimetrične kombinacije $p^\mu\epsilon^\nu - p^\nu\epsilon^\mu$, koja ne zavisi od izbora vektora ϵ^μ unutar klase ekvivalencije.

Prema tome, elektromagnetni potencijal se može opisati vektorom samo ako se posmatraju klase ekvivalencije vektora koji su medjusobno povezani gradijentnim transformacijama.

Pokušajmo, po analogiji sa fotonom, da česticu mase nula i heliciteta $\lambda = \pm 2$ opišemo simetričnim tenzorom ranga 2. Neka je, opet, standardni impuls oblika $\overset{\circ}{p} = \omega(1,0,0,1)$. Generatori male grupe u ovom slučaju postaju

$$(E_1)^{ij}{}_{kl} = (E_1)^i{}_k \delta^j_l + (E_1)^j{}_l \delta^i_k \, ,$$

i slično za E_2 i M_{12} [ovde je $(E_1)^i{}_k$ vektorska reprezentacija generatora E_1]. Stanja linearne polarizacije opisuju se tenzorima

$$\epsilon_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \epsilon_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

koji se dobijaju simetrizacijom proizvoda $\epsilon^\mu_{(\lambda)}\epsilon^\nu_{(\lambda')}$ uz oduzimanje traga. Zahtev invarijantnosti u odnosu na $E(2)$ translacije dovodi do sledeće definicije klasa ekvivalencije:

$$\begin{aligned} &\{\epsilon^{\mu\nu}_{(1)}(p) + p^\mu t_1^\nu + p^\nu t_1^\mu \mid p\cdot t_1 = 0\} \, , \\ &\{\epsilon^{\mu\nu}_{(2)}(p) + p^\mu t_2^\nu + p^\nu t_2^\mu \mid p\cdot t_2 = 0\} \, , \\ &p_\mu \epsilon^{\mu\nu}_{(\lambda)} = 0 \, , \qquad \epsilon^{\mu\nu}_{(\lambda)} = \epsilon^{\nu\mu}_{(\lambda)} \, , \qquad \eta_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}_{(\lambda)} = 0 \, . \end{aligned} \tag{I.15}$$

Dva tenzora unutar iste klase ekvivalencije povezana su gradijentnim transformacijama koje predstavljaju "klicu" opštih koordinatnih transformacija u konzistentnoj teoriji gravitacije.

U lagranžijanskoj formulaciji teorije gradijentna invarijantnost se osigurava sledećim osobinama:

a) tenzor $\epsilon^{\mu\nu}$ interaguje sa simetričnom, očuvanom strujom $J_{\mu\nu}$;

b) slobodan lagranžijan tenzorskog polja je gradijentno invarijantan.

Zadaci

1. a) Koristeći pravilo kompozicije (I.1b) dokazati relacije:

$$
\begin{aligned}
&g^{-1}(\Lambda, a) = g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)\,,\\
&g(\Lambda)T_a = T_{\Lambda a}g(\Lambda)\,,\\
&g^{-1}(\Lambda)g(\Lambda', a)g(\Lambda) = g(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda, \Lambda^{-1}a)\,.
\end{aligned}
$$

   gde je $T_a \equiv g(1, a)$, $g(\Lambda) \equiv g(\Lambda, 0)$.
   b) Izvesti zakone transformacije generatora P_μ i $M_{\mu\nu}$ u odnosu na Lorencove transformacije $g(\Lambda)$ koristeći zadnju relaciju pri $\Lambda' = 1$, $a = 0$.
   c) Naći algebru generatora.
2. Naći algebru generatora pokrivajuće grupe $\overline{P}$ koristeći pravilo kompozicije (I.3).
3. Skalarno polje ϕ zadovoljava Klajn–Gordonovu jednačinu $(\Box + m^2)\phi = 0$. Pokazati da su operatori $L_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$ i $P_\mu = -\partial_\mu$ antihermitski u okviru skalarnog proizvoda

$$
(\phi_1, \phi_2) = i\int d^3x\,[\phi_1^*(x)\partial_0\phi_2(x) - \partial_0\phi_1^*(x)\phi_2(x)]\ .
$$

4. Dokazati da vektor W_μ definisan u (I.5c) zadovoljava relacije:

$$
\begin{aligned}
&W^2 = M^{\nu\lambda}M_{\nu\rho}P_\lambda P^\rho - \tfrac{1}{2}M^{\nu\lambda}M_{\nu\lambda}P^2\,,\\
&W_\nu = [P_\nu, C]\,, \qquad C \equiv \tfrac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}M^{\mu\nu}M^{\lambda\rho}\,,\\
&[P_\mu, W_\nu] = 0\,, \qquad [M_{\mu\nu}, W_\lambda] = \eta_{\nu\lambda}W_\mu - \eta_{\mu\lambda}W_\nu\,, \qquad [M_{\mu\nu}, W^2] = 0\,.
\end{aligned}
$$

5. Naći oblik matrice $\tilde{A}$ koja opisuje beskonačno male transformacije male grupe u slučaju $m^2 = 0$. Zatim, odrediti oblik odgovarajućeg operatora $U(\bar{g})$.
6. Dokazati da u prostoru stanja $|\,\mathring{p}\rangle$ standardnog impulsa $\mathring{p}^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$ (za česticu mase nula) komponente vektora W_μ zadovoljavaju komutacione relacije:

$$
[W_1, W_2] = 0\,, \qquad [M_{12}, W_1] = W_2\,, \qquad [M_{12}, W_2] = -W_1\,,
$$

   koje karakterišu grupu $E(2)$.
7. U prostoru stanja iz prethodnog zadatka proveriti komutacione relacije:

$$
-i[M_{12}, W_\pm] = \mp W_\pm\,, \qquad [W_+, W_-] = 0\,, \qquad [W^2, M_{12}] = 0\,,
$$

   gde je $W_\pm = W_1 \pm iW_2$, a zatim naći spektar operatora $m_{12} = -iM_{12}$ i W^2.
8. Pokazati da se u slučaju $p^2 > 0$ standardni impuls može izabrati u obliku $\mathring{p} = (m, 0, 0, 0)$, i da je tada mala grupa $SO(3)$.

J. DIRAKOVE MATRICE I SPINORI

U ovom odeljku dat je pregled konvencija i osobina Dirakovih matrica i spinora koje smo koristili pri razmatranju supersimetrije i supergravitacije. Definisane su različite reprezentacije Dirakove algebre, Majorana i Valjovi spinori, veza sa formalizmom dvokomponentnih spinora i mnoge korisne relacije (Sohnius, 1985; Srivastava, 1986; van Nieuwenhuizen, 1981).

Dirakove matrice. Dirakove matrice u ravnom prostoru dimenzije d definišu se kao ireducibilne reprezentacije algebre

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\eta_{ij}\,. \tag{$J.1$}$$

Teorema (bez dokaza):

U prostorima *parne* dimenzije ireducibilne reprezentacije Dirakove algebre su kompleksne matrice $n \times n$, gde je $n = 2^{d/2}$. Sve ireducibilne reprezentacije su *ekvivalentne*, tj. svake dve reprezentacije $\{\gamma_i\}$ i $\{\gamma_i'\}$ su povezane relacijom $\gamma_i = S\gamma_i' S^{-1}$, gde je S nesingularna matrica.

Ako matrice γ_i čine ireducibilnu reprezentaciju Dirakove algebre, onda su matrice

$$\pm\gamma_i,\ \pm\gamma_i^+,\ \pm\gamma_i^T,\ \pm\gamma_i^*\,,$$

takodje ireducibilne reprezentacije. Na osnovu prethodne teoreme, postoje nesingularne matrice A i C koje povezuju γ_i sa γ_i^+ i $-\gamma_i^T$, redom:

$$A\gamma_i A^{-1} = \gamma_i^+\,, \qquad C^{-1}\gamma_i C = -\gamma_i^T\,. \tag{$J.2$}$$

Predjimo sada na četvorodimenzioni Minkovskijev prostor ($d = 4, n = 4$) i definišimo γ_5 matricu,

$$\gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\,, \qquad \{\gamma_5, \gamma_i\} = 0\,, \qquad \gamma_5^2 = -1\,, \tag{$J.3$}$$

koja antikomutira sa svim γ_i. Matrice A, C i γ_5 omogućavaju da se bilo koje dve od posmatranih reprezentacija medjusobno povežu. Tako, na primer,

$$D^{-1}\gamma_i D = -\gamma_i^*\,, \qquad D \equiv CA^T\,.$$

Hermitskom konjugacijom, transpozicijom i konjugacijom relacija koje definišu delovanje A, C i D, redom, dobija se

$$A = \alpha A^+\,, \qquad C = \eta C^T\,, \qquad DD^* = \delta\,,$$

gde je $\alpha\alpha^* = \eta^2 = 1$ i $\delta = \delta^+$, zbog konzistentnosti.

Redefinicijom $A \to \omega A$ i pogodnim izborom faze i modula kompleksnog broja ω može se dobiti $\alpha =\mid \delta \mid= 1$. Znakovi od δ i η se ne mogu birati: oni su odredjeni dimenzijom i metrikom prostora. U M_4 matrica C je nužno antisimetrična, $C^T = -C$, da bi se moglo dobiti deset simetričnih $(\gamma_i C, \sigma_{ij} C)$ i šest antisimetričnih $(C, \gamma_5 C, \gamma_5 \gamma_i C)$ linearno nezavisnih matrica. Eksplicitnom konstrukcijom reprezentacije gama matrica može se proveriti da je $\delta = 1$ (ova osobina se ne menja prelazom na drugu, ekvivalentnu reprezentaciju).

Sumirajmo važne osobine matrica A, C i γ_5 u M_4:

$$\begin{aligned} &A = A^+\,, && (A\gamma_i)^+ = A\gamma_i\,, && (A\sigma_{ij})^+ = -A\sigma_{ij}\,, \\ &C = -C^T\,, && (\gamma_i C)^T = \gamma_i C\,, && (\sigma_{ij} C)^T = \sigma_{ij} C\,, \\ &\gamma_5^2 = -1\,, && A\gamma_5 A^{-1} = \gamma_5^+\,, && C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^T\,, \end{aligned} \tag{J.4}$$

gde je $\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j]$. Takodje,

$$\begin{aligned} &\gamma_i C \quad \text{i} \quad \sigma_{ij} C && \text{su simetrične}\,, \\ &C,\ \gamma_5 C \quad \text{i} \quad \gamma_5 \gamma_i C && \text{su antisimetrične}\,. \end{aligned}$$

Lako se proverava da su $A, A\gamma_i$ i $A\gamma_5\gamma_i$ hermitske, a $A\gamma_5$ i $A\sigma_{ij}$ antihermitske.

Komutacione relcije izmedju σ_{mn} i γ_l iste su kao i medju generatorima $M_{\mu\nu}$ i P_λ:

$$\begin{aligned} &[\sigma_{mn}, \gamma_l] = \eta_{nl}\gamma_m - \eta_{ml}\gamma_n\,, \\ &[\sigma_{mn}, \sigma_{lr}] = \eta_{nl}\sigma_{mr} - \eta_{ml}\sigma_{nr} + \eta_{mr}\sigma_{nl} - \eta_{nr}\sigma_{ml}\,. \end{aligned}$$

Ovo je zbog toga što se γ_i transformiše po n–dimenzionoj reprezentaciji $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ grupe SL(2,C), kao i P_λ, a σ_{mn} predstavljaju generatore u tom prostoru.

Dirakovi spinori. Dirakove matrice deluju u prostoru kompleksnih četvorokomponentnih spinora ψ_α. Pri Lorencovim transformacijama Dirakov spinor se transformiše po zakonu

$$\psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x)\,, \qquad S(\Lambda) \equiv \exp\bigl(\tfrac{1}{2}\omega^{mn}\sigma_{mn}\bigr)\,.$$

Uz pomoć matrica A, C i D može se pokazati ekvivalentnost reprezentacija S^{-1+}, S^{-1T} i S^* sa S. Znajući komutator γ^m i σ_{nl}, lako se dobija

$$\gamma^m = \Lambda^m{}_n S\gamma^n S^{-1}\,.$$

Operacije adjungovanja i konjugacije naboja definišu se relacijama

$$\bar\psi \equiv \psi^+ A\,, \qquad \psi_c \equiv C\bar\psi^T = D\psi^*\,. \tag{J.5}$$

Adjungovani spinor $\bar\psi$ se transformiše po zakonu $\bar\psi'(\Lambda x) = \bar\psi(x)S^{-1}$, dok se ψ_c transformiše isto kao ψ. U M_4 matrica D se može izabrati tako da važi $DD^* = 1$, tj. $(\psi_c)_c = \psi$. Polja ψ i ψ_c imaju suprotan naboj.

Za antikomutirajuće spinore važe identiteti

$$(\bar\psi M\chi)^+ = \begin{cases} \bar\chi M\psi & \text{za} \quad M = 1, \gamma_5, \gamma_i\,, \\ -\bar\chi M\psi & \text{za} \quad M = \gamma_5\gamma_i, \sigma_{ij}\,, \end{cases} \tag{J.6}$$

kao i relacije $\bar\psi_c\psi_c = \bar\psi\psi$ i $\bar\psi_c\gamma_i\psi_c = -\bar\psi\gamma_i\psi$. Operacija hermitske konjugacije je definisana tako da menja poredak spinora: $(\bar\psi\chi)^+ = \chi^+\bar\psi^+$.

Majorana spinori. U opštem slučaju četiri kompleksne komponente Dirakovog spinora su nezavisne. Uslov

$$\psi_c = \psi\,, \tag{J.7}$$

definiše Majorana spinor, koji ima samo dve nezavisne kompleksne komponente i opisuje *neutralno polje*. Definicija Majorana spinora u M_4 je konzistentna, jer je $(\psi_c)_c = \psi$.

Majorana uslov nije kompatibilan sa $U(1)$ faznom simetrijom, $\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$. Medjutim, kiralna fazna simetrija je konzistentno definisana:

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{\alpha\gamma_5}\psi\,, & \bar\psi' &= \bar\psi e^{\alpha\gamma_5}\,, \\ \psi_c' &= e^{\alpha\gamma_5}\psi_c\,, & \bar\psi_c' &= \bar\psi_c e^{\alpha\gamma_5}\,. \end{aligned}$$

Majorana spinori zadovoljavaju identitete

$$\bar\psi M\chi = \begin{cases} \bar\chi M\psi & \text{za} \quad M = 1, \gamma_5, \gamma_5\gamma_i\,, \\ -\bar\chi M\psi & \text{za} \quad M = \gamma_i, \sigma_{ij}\,. \end{cases} \tag{J.8}$$

Odavde se lako dobija da je $\bar\psi\gamma_i\psi = \bar\psi\sigma_{ij}\psi = 0$, kao i sledeće osobine realnosti:

$$(\bar\psi M\chi)^+ = \begin{cases} \bar\psi M\chi & \text{za} \quad M = 1, \gamma_5, \sigma_{ij}\,, \\ -\bar\psi M\chi & \text{za} \quad M = \gamma_i, \gamma_5\gamma_i\,. \end{cases} \tag{J.9}$$

Vajlovi spinori. Kiralni ili Vajlovi spinori su zadati relacijom

$$\psi_\mp \equiv P_\mp\psi\,, \qquad P_\mp \equiv \tfrac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)\,, \tag{J.10}$$

gde su $P_\mp$ (levi/desni) kiralni projektori koji zadovoljavaju uslove

$$P_\mp^T = C^{-1}P_\mp C\,, \qquad P_\pm^+ = AP_\mp A^{-1}\,, \qquad P_\mp\gamma_i = \gamma_i P_\pm\,.$$

Odavde se dobija $\bar\psi_\mp = \bar\psi P_\pm$, iz čega sledi

$$\bar\psi M\chi = \begin{cases} \bar\psi_+ M\chi_- + \bar\psi_- M\chi_+ & \text{za} \quad M = 1, \gamma_5, \sigma_{ij}\,, \\ \bar\psi_+ M\chi_+ + \bar\psi_- M\chi_- & \text{za} \quad M = \gamma_i, \gamma_5\gamma_i\,. \end{cases} \tag{J.11}$$

Svaki od Vajlovih spinora nosi posebnu reprezentaciju Lorencove grupe: $\psi_- \to S(\Lambda)\psi_-$, $\psi_+ \to S(\Lambda)\psi_+$ [koje označavamo sa $(\frac{1}{2},0)$ i $(0,\frac{1}{2})$, redom]. Za realizaciju prostorne inverzije potrebni su i ψ_- i ψ_+. Zaista, iz relacije $\gamma^m = \Lambda^m{}_n S\gamma^n S^{-1}$ u slučaju prostorne inverzije sledi $\gamma^0 = I_P\gamma^0 I_P^{-1}$, $\gamma^a = -I_P\gamma^a I_P^{-1}$, pa izbor $I_P = i\gamma^0$ daje $I_P\psi_\mp = i\psi_\pm$.

Vajlovi spinori opisuju *bezmasena polja* spina $j=\frac{1}{2}$, za koja kiralnost i helicitet stoje u korespondenciji 1–1: Vajlovi spinori $\psi_\mp$ (levi/desni) imaju helicitet $\lambda = \mp\frac{1}{2}$. Elektronski neutrino, na primer, ima levu kiralnost, dok antineutrino ima desnu. U odnosu na kiralne transformacije Vajlovi spinori imaju suprotan naboj:

$$\psi'_- = e^{-i\alpha}\psi_-\,, \qquad \psi'_+ = e^{i\alpha}\psi_+\,.$$

Majorana uslov izražen preko Vajlovih spinora ima oblik $(\psi_c)_\mp = C\bar\psi^T_\pm$.

Fircovi identiteti. Posmatrajmo skup od 16 Dirakovih matrica

$$\Gamma^A = \{\,1,\, i\gamma^5,\, \gamma^m,\, \gamma^5\gamma^m,\, 2i\sigma^{mn}\,|_{m>n}\}\,,$$

kao i skup tih istih matrica sa spuštenim tenzorskim indeksima, Γ_A. Ove matrice zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\,(\Gamma^A) = 0 \qquad (\Gamma^A \neq 1)\,,\\ &\Gamma^A\Gamma_A = 1\,, \qquad \mathrm{Tr}\,(\Gamma^A\Gamma_B) = 4\delta^A_B\,. \end{aligned}$$

Zbog zadnjeg uslova matrice Γ^A su linearno nezavisne. One čine kompletan skup, po kome se svaka kompleksna 4×4 matrica Γ može razložiti:

$$\Gamma = \sum c_A\Gamma^A\,, \qquad c_A = \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(\Gamma\Gamma_A)\,,$$

ili, pišući eksplicitno matrične indekse,

$$\Gamma_{mn} = \tfrac{1}{4}\sum \Gamma_{ik}(\Gamma_A)_{ki}(\Gamma^A)_{mn}\,.$$

Iz ove jednakosti za svako Γ sledi

$$\tfrac{1}{4}\sum (\Gamma_A)_{ki}(\Gamma^A)_{mn} = \delta_{im}\delta_{kn}\,.$$

Množeći ovu jednakost sa $\bar\psi^1_k\psi^2_i\bar\psi^3_m\psi^4_n$ dobija se Fircov identitet

$$(\bar\psi^1\psi^4)(\bar\psi^3\psi^2) = -\tfrac{1}{4}\sum(\bar\psi^1\Gamma_A\psi^2)(\bar\psi^3\Gamma^A\psi^4)\,, \tag{J.12}$$

kojim se proizvod dve bilinearne forme po nekim spinorima izražava preko drugih proizvoda sa različito sparenim spinorima. Drugi identiteti se dobijaju iz ovoga zamenom $\psi^4 \to \Gamma^B\psi^4$, $\psi^2 \to \Gamma^C\psi^2$.

Kao primer navedimo sledeće relacije koje važe za Majorana spinore:

$$
\begin{aligned}
&(\bar\varepsilon_2\psi)(\bar\chi\varepsilon_1) + (\bar\varepsilon_2\gamma_5\psi)(\bar\chi\gamma_5\varepsilon_1) - (\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2) = -(\bar\varepsilon_2\gamma_\mu\varepsilon_1)(\bar\chi\gamma^\mu\psi)\,,\\
&(\bar\varepsilon\gamma^m\psi_\nu)(\bar\psi_\mu\gamma_5\gamma_m\partial_\rho\psi_\lambda) - (\mu \leftrightarrow \nu) = 0\,,\\
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\bar\psi_\mu\gamma^i\psi_\nu\bar u\gamma_i\psi_\rho = 0\,.
\end{aligned}
$$

gde je ψ_μ vektor čija je svaka komponenta Majorana spinor.

Dvokomponentni formalizam. Dirakov spinor se često naziva i bispinor, jer je sastavljen od dva dvodimenziona spinora grupe $SL(2,C)$. Ova veza se najlakše vidi u tzv. spinorskoj reprezentaciji gama matrica,

$$
\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar\sigma^m & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

gde je $\sigma^m \equiv (1,\boldsymbol\sigma)$, $\bar\sigma^m \equiv (1,-\boldsymbol\sigma)$. U ovoj reprezentaciji matrice A, C i $D = CA^T$ su date izrazima

$$
A = \gamma^0\,, \qquad C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad D = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},
$$

i zadovoljavaju uslove $C^+ = C^{-1} = -C$, $DD^* = 1 \quad (\delta = 1)$.

Vajlovi spinori ψ_-, ψ_+ imaju samo dve gornje/donje komponente različite od nule, pa se esencijalno svode na dvokomponentne veličine:

$$
\psi_- = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar\eta \end{pmatrix}, \qquad \psi = \psi_- + \psi_+ = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar\eta \end{pmatrix}.
$$

Pošto su Lorencovi generatori dijagonalni,

$$
\sigma^{0a} = -\tfrac12\begin{pmatrix} \sigma^a & 0 \\ 0 & -\sigma^a \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{ab} = -\tfrac12 i\begin{pmatrix} \sigma^c & 0 \\ 0 & \sigma^c \end{pmatrix} \quad (a,b,c - \text{ciklični})\,,
$$

svaka od veličina ψ_-,ψ_+, tj. $\xi,\bar\eta$, realizuje dvodimenzionu reprezentaciju grupe $SL(2,C)$ sa generatorima

$$
\begin{aligned}
(\sigma^{mn})_- &= \tfrac14(\sigma^m\bar\sigma^n - \sigma^n\bar\sigma^m) = \left[-\tfrac12\boldsymbol\sigma, -\tfrac12 i\boldsymbol\sigma\right],\\
(\sigma^{mn})_+ &= \tfrac14(\bar\sigma^m\sigma^n - \bar\sigma^n\sigma^m) = \left[\tfrac12\boldsymbol\sigma, -\tfrac12 i\boldsymbol\sigma\right],
\end{aligned}
$$

Pri beskonačno malim transformacijama $\omega_{mn} = [\boldsymbol\beta,\boldsymbol\theta]$ (Lorencova transformacija brzinom $\boldsymbol\beta$ i rotacija za ugao $\boldsymbol\theta$) iz zakona transformacije ψ sledi

$$
\delta_0\xi = \left(-\tfrac12\boldsymbol{\beta\sigma} - \tfrac12 i\boldsymbol{\theta\sigma}\right)\xi\,, \qquad \delta_0\bar\eta = \left(\tfrac12\boldsymbol{\beta\sigma} - \tfrac12 i\boldsymbol{\theta\sigma}\right)\bar\eta\,.
$$

Crta iznad η služi da nas podseti da $\bar{\eta}$ ima različit zakon transformacije od ξ. Konačne Lorencove transformacije su oblika

$$
\begin{aligned}
& S(\Lambda) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1+} \end{pmatrix}, \\
& M = \exp\left[\tfrac{1}{2}\omega^{mn}(\sigma_{mn})_-\right], \qquad M^{-1+} = \exp\left[\tfrac{1}{2}\omega^{mn}(\sigma_{mn})_+\right],
\end{aligned}
$$

gde je $\det M = \det M^{-1+} = 1$ [ovaj uslov definiše grupu $SL(2,C)$]. U dvokomponentnom formalizmu veličine $(\sigma_{mn})_-$ i $(\sigma_{mn})_+$ se obično označavaju sa σ_{mn} i $\bar{\sigma}_{mn}$, redom.

Operacija konjugacije naboja dobija oblik

$$
\psi_c \equiv \begin{pmatrix} \eta^c \\ \bar{\xi}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 \bar{\eta}^* \\ -i\sigma^2 \xi^* \end{pmatrix}.
$$

Korisno je za spinore ξ i $\bar{\eta}$ koristiti različite vrste indeksa, $\xi = (\xi_a)$, $\bar{\eta} = (\bar{\eta}^{\dot{a}})$, pri čemu se tip indeksa menja pri kompleksnoj konjugaciji: $\xi^* = (\xi^*_{\dot{a}}) = (\bar{\xi}_{\dot{a}})$, i $\bar{\eta}^* = (\bar{\eta}^{*a}) = (\eta^a)$. Uvedimo, dalje, matrice

$$
g_{ab} = i(\sigma^2)_{ab} = \varepsilon_{ab}\,, \qquad (\bar{g}^{-1})^{\dot{a}\dot{b}} \equiv \bar{g}^{\dot{a}\dot{b}} = -i(\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}} = -\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\,,
$$

koje imaju ulogu metrike u prostoru dvokomponentnih spinora. Tada prethodne relacije dobijaju oblik

$$
(\eta^c)_a = g_{ab}(\bar{\eta}^*)^b \equiv (\bar{\eta}^*)_a\,, \qquad (\bar{\xi}_c)^{\dot{a}} = \bar{g}^{\dot{a}\dot{b}}(\xi^*)_{\dot{b}} \equiv (\xi^*)^{\dot{a}}\,,
$$

iz koga se vidi da operacija konjugacije naboja, na jeziku dvokomponentnih spinora, označava kompleksnu konjugaciju praćenu spuštanjem ili podizanjem indeksa.

Više detalja o formalizmu dvokomponentnih spinora može se naći u dodatku H.

Vajlove jednačine. Bezmasena Dirakova jednačina u spinorskoj reprezentaciji se razdvaja na dve linearno nezavisne, Vajlove jednačine:

$$
\begin{aligned}
i\bar{\sigma}\cdot\partial\xi &\equiv (i\partial_0 - i\sigma^a\partial_a)\xi = 0\,, \\
i\sigma\cdot\partial\bar{\eta} &\equiv (i\partial_0 + i\sigma^a\partial_a)\bar{\eta} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{J.13a}
$$

Posmatrajmo ravne talase "pozitivne učestanosti",

$$
\xi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} w_p e^{-ip\cdot x}\,, \qquad \bar{\eta}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} v_p e^{-ip\cdot x}\,, \qquad (p_0 = |\,\boldsymbol{p}\,|)\,.
$$

Vajlovi spinori w_p i v_p zadovoljavaju jednačine

$$
(p_0 + \boldsymbol{\sigma p})w_p = 0\,, \qquad (p_0 - \boldsymbol{\sigma p})v_p = 0\,, \tag{J.13b}
$$

iz kojih sledi da stanja odredjenog impulsa w_p, v_p imaju helicitete $\lambda = -\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, redom. Isti zaključak se dobija i za w_{-p}, v_{-p}.

Naivno računanje energije ravnih talasa dovelo bi do rezultata da talasi "negativne učestanosti" ($\sim e^{ip\cdot x}$) imaju negativnu energiju. Korektna interpretacija ovih rešenja u kvantnoj teoriji polja dovodi do pojma antičestice, koja, takodje, ima pozitivnu energiju. Rešenje w_p opisuje *neutrino,* dok se v_{-p} odnosi na odgovarajuću antičesticu — *antineutrino.*

Dirakova jednačina je invarijantna u odnosu na prostornu inverziju, dok se pri opisu čestice (jednom) Vajlovom jednačinom ta simetrija gubi. Prostorna inverzija je dobra simetrija samo uz istovremenu zamenu čestice i antičestice: $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$, $w_p \to v_{-p}$, $v_p \to w_{-p}$. Jednačina za $w^c = -i\sigma^2 w^*$ ima isti oblik kao i jednačina za v. Izborom $v = w^c$ Dirakov spinor ψ postaje Majorana spinor, koji opisuje pravu neutralnu česticu sa dve moguće vrednosti heliciteta (a ne česticu i antičesticu).

Bilinearna forma $j^\mu = w^+\bar{\sigma}^\mu w = (w^+w, -w^+\boldsymbol{\sigma}w)$, gde je $w^+ \equiv w^{*T}$, predstavlja četvorovektor u odnosu na Lorencove transformacije. Množeći jednačinu za w s leva sa w^+, dobija se jednačina neprekidnosti: $p \cdot j = 0$ (j^μ je gustina struje čestica).

Spinor w se može normirati kovarijantnim uslovom

$$w^+w = 2p^0 \,.$$

Zaista, iz jednačina kretanja za w i w^+ sledi $j^\mu = w^+(1, -\boldsymbol{\sigma})w = 2(p^0, \boldsymbol{p})$.

Uvedimo projektor na stanja heliciteta $-\frac{1}{2}$:

$$\rho_{a\dot{b}} = w_a w^+_{\dot{b}} \,.$$

Iz osobina $(p_0 + \boldsymbol{\sigma p})\rho = 0$, $\rho(p_0 + \boldsymbol{\sigma p}) = 0$ i uslova normalizacije sledi

$$\rho = p_0 - \boldsymbol{\sigma p} = \sigma \cdot p \,.$$

Na sličan način se za projektore na stanja heliciteta $+\frac{1}{2}$ dobija

$$\bar{\rho}^{\dot{a}b} = v^{\dot{a}} v^{+b} \,, \qquad \bar{\rho} = (p_0 + \boldsymbol{\sigma p}) = \bar{\sigma} \cdot p \,.$$

Prelazeći na četvorokomponentnu notaciju ukupan projektor postaje

$$\rho \oplus \bar{\rho} = ww^+ \oplus vv^+ = \begin{pmatrix} \sigma \cdot p & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \cdot p \end{pmatrix} = \hat{p}\gamma^0 \,. \qquad (J.14a)$$

Iz njega se ρ i $\bar{\rho}$ dobijaju kao kiralne projekcije: $\rho = P_-(\hat{p}\gamma^0)P_-$, $\bar{\rho} = P_+(\hat{p}\gamma^0)P_+$.

Veličine w i v se lako mogu prevesti u ekvivalentne četvorospinore, $w \to u_- = (w, 0)$, $v \to u_+ = (0, v)$. Ukupan projektor izražen preko $u_\mp$ dobija oblik

$$u_- u_-^+ + u_+ u_+^+ = \hat{p}\gamma^0 \,. \qquad (J.14b)$$

Zadaci

1. a) Dokazati da iz $C^{-1}\gamma_i C = -\gamma_i^T$ sledi $C = \eta C^T$.
   b) Dokazati da ako medju 16 linearno nezavisnih matrica $C\Gamma^A$ ima 10 simetričnih i 6 antisimetričnih, onda sledi $\eta = -1$.
2. Dokazati identitete:
$$\gamma^l\gamma_m\gamma_l = -2\gamma_m\,, \qquad \sigma^{mn}\sigma_{mn} = -3\,,$$
$$\gamma^l\gamma_m\gamma_n\gamma_l = 4\eta_{mn}\,, \qquad \sigma^{mn}\gamma_l\sigma_{mn} = 0\,,$$
$$\gamma^l\sigma_{mn}\gamma_l = 0\,, \qquad \sigma^{lr}\sigma_{mn}\sigma_{lr} = \sigma_{mn}\,,$$
$$\sigma^{ij}\sigma^{mn}\gamma_j = -\tfrac{1}{2}\sigma^{mn}\gamma^i\,, \qquad \sigma^{ij}\gamma^m\gamma_j = \tfrac{1}{2}\gamma^m\gamma^i - 2\eta^{im}\,.$$
3. Dokazati identitete:
$$\gamma_m\gamma_n\gamma_l = -\varepsilon_{mnlr}\gamma_5\gamma^r + \eta_{mn}\gamma_l - \eta_{ml}\gamma_n + \eta_{nl}\gamma_m\,,$$
$$\{\gamma_m, \sigma_{nl}\} = -\varepsilon_{mnlr}\gamma_5\gamma^r\,,$$
$$2\{\sigma_{mn}, \sigma_{lr}\} = \eta_{mr}\eta_{nl} - \eta_{ml}\eta_{nr} - \varepsilon_{mnlr}\gamma_5\,,$$
$$2\gamma_5\sigma_{mn} = -\varepsilon_{mnlr}\sigma^{lr}\,,$$
$$\varepsilon_{mnrl}\gamma_5\sigma^{lk} = -\delta^k_m\sigma_{nr} + \delta^k_n\sigma_{mr} - \delta^k_r\sigma_{mn}\,.$$
4. a) Dokazati relacije:
$$C^{-1}SC = S^{-1T}\,, \qquad ASA^{-1} = S^{-1+}\,,$$
$$D^{-1}SD = S^*\,, \qquad \gamma^m = \Lambda^m{}_n S\gamma^n S^{-1}\,.$$
   b) Naći zakone transformacija bilinearnih kombinacija $\bar\psi\Gamma^A\psi$ u odnosu na Lorencove transformacije.
5. a) Dokazati da je $\psi_c = C\bar\psi^T$ ekvivalentno sa $\psi = C\bar\psi_c^T$.
   b) Naći zakon transformacije ψ_c u odnosu na Lorencove transformacije.
6. Naći zakone transformacije bilinearnih kombinacija $\bar\psi\Gamma^A\psi$ u odnosu na kiralne transformacije.
7. Pokazati da Majorana spinori zadovoljavaju relacije
$$\bar\psi_\mp\gamma_i\chi_\mp = -\bar\chi_\pm\gamma_i\psi_\pm\,, \qquad \bar\psi_\mp\chi_\pm = \bar\chi_\mp\psi_\pm\,,$$
$$\bar\psi_\mp\sigma_{ij}\chi_\pm = -\bar\chi_\mp\sigma_{ij}\psi_\pm\,.$$
   Zatim izvesti relacije $\bar\psi_\mp\gamma_5\gamma_i\chi_\mp = \bar\chi_\pm\gamma_5\gamma_i\psi_\pm$ i $\bar\psi_\mp\gamma_5\chi_\pm = \bar\chi_\mp\gamma_5\psi_\pm$.
8. Pokazati eksplicitnim računom da matrice $A = \gamma^0$, $C = i\gamma^2\gamma^0$ i $D = CA^T$ u spinorskoj reprezentaciji zadovoljavaju relacije:
$$A\gamma_m A^{-1} = \gamma_m^+\,, \qquad C^{-1}\gamma_m C = -\gamma_m^T\,,$$
$$DD^* = 1\,, \qquad C^+ = C^{-1} = C^T = -C\,, .$$
   Zatim izvesti $(\psi_c)_c = \psi$.
9. Pokazati da uslov neutralnosti $\psi_c = \psi$ ne menja oblik pri delovanju prostorne inverzije $I_P = i\gamma^0$. Šta se dogadja u slučaju izbora $I_P = \gamma^0$?
10. Dokazati da u spinorskoj reprezentaciji važe relacije
$$\sigma^m = \Lambda^m{}_n M\sigma^n M^+\,, \qquad \bar\sigma^m = \Lambda^m{}_n M^{-1+}\bar\sigma^n M^{-1}\,.$$

K. GRUPE SIMETRIJE I MNOGOSTRUKOSTI

U ovom dodatku ćemo razmotriti neke aspekte simetrije Rimanovih prostora koji su važni za konstrukciju višedimenzionih Kaluca–Klajn teorija (Weinberg, 1972; Choquet–Bruhat, de Witt–Morette i Dillard–Bleick, 1977; Barut i Raczka, 1977; Dubrovin, Novikov i Fomenko, 1979; Zee, 1981).

Izometrije. Neka je X diferencijabilna mnogostukost dimenzije N. Posmatrajmo beskonačno malu transformaciju tačaka na X kojoj odgovara promena koordinata

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha + t\,E^\alpha(x)\,, \qquad |t| \ll 1\,, \tag{K.1}$$

gde je t beskonačno mali parametar, a E^α tangentni vektor na krivu $x'(t)$ u tački x. Ove transformacije indukuju transformaciju $T(x) \to T'(x')$ tenzorskog polja T. *Lijev izvod* tenzorskog polja karakteriše promenu forme tenzorskog polja u odnosu na posmatrane transformacije:

$$\mathcal{L}_E T|_x = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{t}\left[T'(x) - T(x)\right]\,. \tag{K.2}$$

Lijev izvod je blisko povezan sa pojmom varijacije forme: $\delta_0 T(x) = T'(x) - T(x)$.

Za skalarno polje važi $\phi'(x') = \phi(x)$, pa se iz $\phi'(x) = \phi(x - tE)$, posle razvoja desne strane u red, lako dobija $\mathcal{L}_E\phi(x) = E^\alpha\partial_\alpha\phi(x)$. Zakon transformacije vektorskog polja $u^\alpha(x)$ ima oblik

$$u'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\,u^\beta(x) \approx (\delta^\alpha_\beta + t\,\partial_\beta E^\alpha)u^\beta(x)\,.$$

Zamenom varijabli, $x' \to x' - tE = x,\ x \to x - tE$, i razvojem desne strane u red po t dobija se

$$\mathcal{L}_E u^\alpha(x) = E^\beta\partial_\beta u^\alpha - u^\beta\partial_\beta E^\alpha\,.$$

Kad je mnogostrukost X Rimanov prostor sa Kristofelovom koneksijom, onda se u prethodnoj jednačini obični izvodi mogu zameniti kovarijantnim. Na sličan način se izračunava Lijev izvod proizvoljnog tenzora T.

U Rimanovom prostoru $V(X, \boldsymbol{g})$ od posebne su važnosti one koordinatne transformacije koje ne menjaju funkcionalni oblik njegove metrike: $g'_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta}(y)$. Takve transformacije se nazivaju *izometrije* prostora V, i lokalno su definisane uslovom

$$\mathcal{L}_E g_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha E^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta E^\gamma g_{\alpha\gamma} + E^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{K.3a}$$

Zamenom parcijalnog izvoda kovarijantnim, i korišćenjem $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, ovaj uslov prelazi u jednačinu

$$E_{\alpha;\beta} + E_{\beta;\alpha} = 0\,, \tag{K.3b}$$

koja se naziva *Kilingova jednačina.* Prema tome, koordinatne transformacije $(K.1)$ predstavljaju izometriju prostora V ako vektor E^{α} zadovoljava Kilingovu jednačinu. Za datu metriku $\boldsymbol{g}$ problem nalaženja svih izometrija prostora V svodi se na nalaženje svih rešenja E_a^{α} Kilingove jednačine. Svakom skupu rešenju $\{E_a^{\alpha},\ a = 1, 2, ..., n\}$ odgovara transformacija izometrije sa n parametara t^a:

$$\delta x^{\alpha} = t^a E_a^{\alpha}(x) = t^a \boldsymbol{e}_a\, x^{\beta}\,, \qquad \boldsymbol{e}_a \equiv E_a^{\alpha} \partial_{\alpha}\,, \tag{$K.4$}$$

gde su diferencijalni operatori $\boldsymbol{e}_a$ generatori transformacija izometrije.

Kilingovi vektori su tangentni vektori prostora V, ali njihov broj može biti veći od dimenzije prostora V. Videćemo da je maksimalan broj Kilingovih vektora u prostoru dimenzije N jednak $N(N+1)/2$.

Za razumevanje strukture transformacija izometrije korisno je povezati ove transformacije sa pojmom grupe. Posle kratkog podsećanja na osnovne karakteristike topoloških i Lijevih grupa, i uvodjenja pojma Lijeve grupe transformacije na mnogostrukosti, vratićemo se ponovo na izometrije Rimanovih prostora.

Topološke grupe. Moguće je da jedan te isti skup G bude istovremeno i grupa i topološki prostor. Posmatran kao grupa, skup G je snabdeven binarnom operacijom $*$ koja se naziva grupni proizvod, i koja definiše pravilo množenja grupnih elemenata. Na istom skupu G može biti zadata topologija τ koja ga čini topološkim prostorom.

Skup elemenata G se naziva *grupa* ako je u G zadata binarna operacija $*$ (za svaka dva elementa $g, h \in G$ proizvod $g * h$ pripada G) koja zadovoljava sledeće osobine:

— Grupni proizvod je asocijativan: $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$.

— U skupu G postoji jedinični elemenat I takav da je $I * g = g * I = I$, za svaki g iz G.

— Za svaki g iz G postoji inverzni elemenat g^{-1} takav da je $g * g^{-1} = g^{-1} * g = I$.

Oznaku grupnog množenja $*$ ćemo često, zbog jednostavnosti, izostavljati.

Preslikavanje f grupe $\{G, *\}$ u grupu $\{H, \cdot\}$ koje zadovoljava uslov $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ naziva se *homomorfizam.* Homomorfizam postaje *izomorfizam* ako je f uzajamno jednoznačno preslikavanje. Sa stanovišta grupnih svojstava izomorfne grupe se mogu smatrati identičnim. Izomorfizam je za grupe isto što i homeomorfizam za topološke prostore.

Neka je $\{G, *\}$ grupa, a $\{G, \tau\}$ topološki prostor. Topologija τ definiše *topološku grupu* $\{G, *, \tau\}$ ako su grupne operacije *neprekidne* u odnosu na zadatu topologiju. Zahtev neprekidnosti znači da su zadovoljena sledeća dva uslova:

a) za svako $g \in G$, preslikavanje $G \to G$ definisano sa $g \mapsto g^{-1}$ je neprekidno, i

b) ako su g_1 i g_2 iz G, preslikavanje $G \times G \to G$ definisano sa $(g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2$ je neprekidno.

Skup elemenata G može biti i grupa i topološki prostor, a da pritom nije obavezno topološka grupa. Navedimo neke važne elemente strukture topoloških grupa.

1. U prostoru topološke grupe mogu se posmatrati neprekidne krive. Neka su dva elementa grupe ekvivalentna ako se nalaze na istoj neprekidnoj krivoj. Uz pomoć ove relacije ekvivalencije definiše se *komponenta jedinice* G_0 grupe G kao klasa elemenata ekvivalentnih sa jedinicom. G_0 je podgrupa od G.

2. Na nivou topoloških prostora postoji jedna važna osobina koja, kao što ćemo videti, predstavlja začetak ideje o simetriji Rimanovih prostora. Topološki prostor $\{X, \tau\}$ je *homogen* ako postoji homeomorfizam f prostora $\{X, \tau\}$ na samog sebe koji je tranzitivan, tj. koji svaku tačku $x \in X$ preslikava u proizvoljno zadatu tačku $y \in X$.

Svaka topološka grupa je homogena, jer za svake dve tačke g_1 i g_2 iz G postoji preslikavanje $g_1 \mapsto g_2 = \gamma g_1$, $\gamma \equiv g_2 g_1^{-1}$, koje je, zbog neprekidnosti i jedinstvenosti grupnog množenja, homeomorfizam grupe G na samu sebe. Homogenost topoloških grupa je veoma važno svojstvo koje osigurava da su topološke osobine grupe u okolini jedne tačke iste kao i u okolini proizvoljne druge tačke. Topološka struktura takvih grupa je odredjena njihovim lokalnim svojstvima.

3. Pojam kompaktnosti ima važnu ulogu pri razmatranju reprezentacija grupa. U Euklidovom prostoru E_3 za svaku zatvorenu površ koja ima konačan dijametar, kao što je sfera ili torus, kažemo da je zatvorena i ograničena. Pojam ograničenosti zatvorenih skupova u Euklidovom prostoru E_n može se povezati sa kolekcijom otvorenih skupova (pokrivač), uz pomoć Hajne–Borelove teoreme: X je zatvoren i ograničen potprostor od E_n ako i samo ako svaki pokrivač od X ima konačan potpokrivač. Takav opis ima prednost, jer izbegava upotrebu pojma ograničenosti, koji nije topološki, već metrički pojam.

Ovaj rezultat sugeriše sledeću definiciju: Topološki prostor $\{X, \tau\}$ je *kompaktan* ako svaki pokrivač od X ima konačan potpokrivač.

Prema tome, svaki ograničen i zatvoren podskup od E_n je kompaktan. Topološka grupa $\{G, *, \tau\}$ je kompaktna ako je $\{G, \tau\}$ kompaktan topološki prostor.

4. Definicija povezanosti je intuitivno potpuno jasna: topološki prostor je *povezan* ako se ne može predstaviti kao unija dva neprazna skupa čiji je presek prazan skup.

Dalju karakterizaciju povezanosti daje sledeće razmatranje. Posmatrajmo dve tačke $x, y \in X$ koje se mogu povezati neprekidnom krivom koja cela leži u X. Takvu krivu zvaćemo putem, ili putanjom, od x do y. Dve putanje $P_1(x, y)$ i $P_2(x, y)$ su homotopski ekvivalentne ako postoji neprekidna deformacija putanje $P_1(x, y)$ u $P_2(x, y)$. Putanja je zatvorena ako je njena krajnja tačka ista kao i početna. Zatvorena putanja u tački x je nula–putanja ako se cela svodi na x.

Kažemo da je topološki prostor *jednostruko povezan* ako je svaka zatvorena putanja $P(x,x)$ homotopski ekvivalentna sa nula–putanjom. Na sličin način se definiše višestruka povezanost.

PRIMER 1. Prethodno izlaganje ćemo ilustrovati na primeru grupe rotacija $SO(3)$. Rotacija euklidskog prostora E_3 je transformacija R: $E_3 \to E_3$ koja čuva euklidsko rastojanje prostora E_3, $d^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, i njegovu orijentaciju. Proizvoljna rotacija tačke $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ se opisuje delovanjem ortogonalne 3×3 matrice jedinične determinante: $x^\alpha \mapsto x'^\alpha = R^\alpha{}_\beta x^\beta$. Skup ovih matrica čini grupu $SO(3)$.

Svaka rotacija se može predstaviti kao rotacija oko neke ose $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}^2 = 1$) za ugao ω:

$$\boldsymbol{x}' \equiv R(\boldsymbol{n},\omega)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cos\omega + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x})(1-\cos\omega) + \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{n}\sin\omega \qquad (0 \le \omega \le \pi)\,,$$

dok se položaj ose $\boldsymbol{n}$ može opisati preko sfernih koordinata θ i φ:

$$\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\,, \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi)\,.$$

Izaberimo veličine $\boldsymbol{\rho} = \omega\boldsymbol{n}$ za parametre koji će identifikovati pojedine elemente grupe rotacije. Skup svih rotacija je odredjen skupom parametara $\boldsymbol{\rho}$, i dat je kao trodimenziona euklidska kugla poluprečnika π sa centrom u tački $\boldsymbol{\rho} = 0$. Medjutim, pošto parametri $\boldsymbol{\rho} = \pi\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{\rho} = -\pi\boldsymbol{n}$ opisuju jednu te istu rotaciju, tačke na krajevima svakog dijametra treba identifikovati. Tako dobijamo realni trodimenzioni projektivni prostor RP^3. Pri razmatranju putanja u ovoj mnogostrukosti, za putanju koja preseca granicu kugle u nekoj tački smatramo da ponovo ulazi u mnogostrukost kroz antipodnu tačku. Ovaj skup parametara se može snabdeti prirodnom topologijom, posle čega $SO(3)$ postaje topološka grupa. Navedimo neke topološke osobine grupe $SO(3)$.

1. Svaka rotacije je neprekidnom krivom povezana sa jediničnom rotacijom $\boldsymbol{\rho} = 0$.

2. Rotaciona grupa je kompaktna, jer je skup parametara $\boldsymbol{\rho}$ kompaktan.

3. Rotaciona grupa je, kao i svaka topološka grupa, homogena.

4. Iz centra kugle do proizvoljne tačke $\omega\boldsymbol{n}$ $(\omega \ge 0)$ može se stići duž dve putanje:

i) prva putanja l_1 je "direktna": $\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{n}t$ $(0 \le t \le \omega)$;

ii) druga putanja l_2 ide najpre "unazad", do kraja dijametra, $\boldsymbol{\rho}_1(t') = -\boldsymbol{n}t'$ $(0 \le t' \le \pi)$, zatim "skače" u antipodnu tačku $\boldsymbol{\rho} = \pi\boldsymbol{n}$, i nastavlja putem $\boldsymbol{\rho}_2(t'') = \boldsymbol{n}(\pi - t'')\,,$ $(0 \le t'' \le \pi - \omega)$.

Ove dve putanje nisu homotopski ekvivalentne. Slično razmatranje vredi za proizvoljne dve tačke iz kugle, pa zaključujemo da je $SO(3)$ dvostruko povezana grupa.

Lijeve grupe. Ako se u topološku grupu uvedu lokalne koordinate a zatim i pojam diferencijabilnosti, dolazimo do pojma diferencijabilne mnogostrukosti grupe, ili Lijeve grupe. Često se prethodna struktura proširuje pretpostavkom o analitičnosti, koja osigurava ne samo diferencijabilnost već i mogućnost razvoja u Tejlorov red.

Grupa $\{G, *\}$ je *Lijeva grupa* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) G je analitička mnogostrukost,

b) za svako $g \in G$, preslikavanje $G \to G$ definisano sa $g \mapsto g^{-1}$ je analitičko,

c) ako su g_1 i g_2 iz G, preslikavanje $G \times G \to G$ definisano sa $(g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2$ je analitičko.

Neka su t^α ($\alpha = 1, 2, ..., n$) parametri Lijeve grupe G koji u okolini jedinice predstavljaju lokalni koordinatni sistem, $c(t)$ neprekidna kriva u prostoru parametara koja prolazi kroz tačku $P_0 = c(0)$, a $\boldsymbol{e}_a = E_a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ njen tangentni vektor u P_0. Svakoj krivoj $c(t)$ odgovara kriva $C(t)$ u prostoru elemenata grupe, koja nastaje promenom parametara duž $c(t)$, pri čemu je $C(0) = 1$. Tangentni vektor na krivu $C(t)$ u tački $t = 0$ dat je izrazom

$$T_a = E_a^\alpha \partial_\alpha C(t)|_{t=0} \equiv \boldsymbol{e}_a C(t)|_{t=0} \,,$$

i naziva se *generator* grupe. Svakom generatoru T_a odgovara operator $\boldsymbol{e}_a = E_a^\alpha \partial_\alpha$ — tangentni vektor u prostoru parametara. Obično se kriva $c(t)$ bira tako da se poklapa sa nekom koordinatnom linijom, pa je tangentni vektor $\boldsymbol{e}_a$ jednak sa tangentom na tu koordinatnu liniju, iz čega sledi $\boldsymbol{e}_a = \delta_a^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$. Tada, u okolini jedinice i za male vrednosti parametara, svaki elemenat grupe $C(t)$ ima oblik $C(t) \approx 1 + t^a T_a$, gde je $t^a = \delta_\alpha^a t^\alpha$. Linearno nezavisni generatori grupe zadovoljavaju *Lijevu algebru*:

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c \,, \qquad f_{ab}{}^c = -f_{ba}{}^c \,, \qquad (K.5a)$$

a za strukturne konstante $f_{ab}{}^c$ važi Jakobijev identitet.

Od posebne važnosti je činjenica da svakoj Lijevoj algebri odgovara tačno jedna jednostruko povezana Lijeva grupa, $\overline{G}$. Elementi ove grupe u okolini jedinice imaju oblik

$$g(t) = e^{t^a T_a} \,. \qquad (K.5b)$$

Sve povezane Lijeve grupe sa istom Lijevom algebrom su lokalno izomorfne. U ovoj familiji grupa samo je $\overline{G}$ jednostruko povezana, dok su ostale višestruko povezane. Svaka grupa G iz posmatrane familije je izomorfna sa faktor grupom $\overline{G}/Z$, gde je Z invarijantna diskretna podgrupa od $\overline{G}$. Grupa $\overline{G}$ se naziva univerzalna pokrivajuća grupa za datu familiju.

Primer 1 (nastavak). Uz pogodno odabrane lokalne koordinatne sisteme grupa $SO(3)$ postaje Lijeva grupa dimenzije tri. Napominjemo da skup parametrara $\boldsymbol{\rho} = (\omega, \varphi, \theta)$ nije pogodan kao koordinatni sistem na celoj grupi jer je posmatrana parametrizacija degenerisana u tački $R = 1$, gde je $\omega = 0$ ali φ i θ nisu odredjeni. Sličan problem se pojavljuje i kod Ojlerove parametrizacije. Singularne tačke se pojavljuju u svakoj parametrizaciji matrica rotacione grupe, pa se zato koordinate mogu uvesti samo lokalno. Posmatrana parametrizacija je posebno neugodna zbog pojave singularnosti u blizini jediničnog elementa grupe, jer se time otežava mogućnost definisanja generatora grupe kao tangentnih vektora u tački $R = 1$.

Mnogo ugodnija parametrizacija je ona u kojoj se proizvoljna rotacija predstavlja kao kompozicija tri rotacije: prva je rotacija za ugao θ^1 oko x^1, zatim ide rotacija za θ^2 oko x^2, i najzad rotacija za θ^3 oko x^3. Matrica rotacije oko ose x^1 za ugao θ^1 ima oblik

$$R_1(\theta^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta^1 & \sin\theta^1 \\ 0 & -\sin\theta^1 & \cos\theta^1 \end{pmatrix},$$

i slično za $R_2(\theta^2)$ i $R_3(\theta^3)$. Proizvoljna matrica rotacije u ovoj parametrizaciji ima oblik

$$R(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = R_3(\theta^3) R_2(\theta^2) R_1(\theta^1)\,,$$

gde je $-\pi \leq \theta^1 < \pi\,,\ \ -\pi \leq \theta^2 < \pi\,,\ \ -\pi/2 \leq \theta^3 < \pi/2$. Ova parametrizacija nema singularne tačke u okolini $R = 1$, već pri $\theta^3 = \pm\pi/2$. Diferenciranjem matrice rotacije po parametrima θ^a u tački $\theta^a = 0$ dobijaju se odgovarajući generatori kao 3×3 matrice oblika $(T_a)^b_{\ c} = \varepsilon_{abc}$. Njihova algebra ima oblik

$$[T_a, T_b] = -\varepsilon_{abc} T_c\,.$$

Primer 2. Grupa $SU(2)$ je grupa svih unitarnih 2×2 kompleksnih matrica A jedinične determinante. Svaka matrica A iz $SU(2)$ se može se zapisati u obliku

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1\,.$$

Stavljajući $a = u_0 + iu_3$, $b = u_2 + iu_1$, prethodni uslov na parametre postaje

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1\,.$$

Svakoj $SU(2)$ transformaciji odgovara skup parametara (u_0, u_1, u_2, u_3) koji zadovoljava ovaj uslov. Prema tome, mnogostrukost grupe $SU(2)$ je jedinična trodimenziona sfera S_3 uronjena u E_4. Ako uslov na parametre zapišemo u obliku $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 - u_0^2$, lako se vidi da se posmatrana mnogostrukost S_3 može shvatiti kao jedinična kugla u E_3 opisana koordinatama (u_1, u_2, u_3). Ova mnogostrukost je kompaktna i jednostruko povezana.

Matrica A se može izraziti preko Paulijevih matrica σ^a:

$$A = \begin{pmatrix} u_0 + iu_3 & u_2 + iu_1 \\ -u_2 + iu_1 & u_0 - iu_3 \end{pmatrix} = u_0 I + iu_1\sigma^1 + iu_2\sigma^2 + iu_3\sigma^3\,.$$

Generatori grupe $T_a = i\sigma^a/2$ zadovoljavaju Lijevu algebru $[T_a, T_b] = -\varepsilon_{abc}T_c$, koja je izomorfna Lijevoj algebri grupe $SO(3)$. Prema tome, $SU(2)$ i $SO(3)$ su lokalno izomorfne grupe. Integracijom beskonačno malih transformacija $A = 1 + i\omega n^a\sigma^a/2$ ($\boldsymbol{n}^2 = 1$) dobijaju se konačne transformacije:

$$A = \exp(\tfrac{1}{2} i\omega \boldsymbol{n\sigma}) = \cos(\omega/2) + i\boldsymbol{n\sigma}\sin(\omega/2) \qquad -2\pi \leq \omega \leq 2\pi\,.$$

Pokažimo da postoji homomorfizam $SU(2)$ na $SO(3)$. Pridružimo svakoj tački $\boldsymbol{x}$ iz E_3 antihermitsku matricu X traga nula:

$$X = ix^a\sigma^a \equiv i\begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}, \qquad \det X = \boldsymbol{x}^2\,.$$

Svakoj $SU(2)$ transformaciji matrice X, $X \to X' = AXA^{-1}$, odgovara $SO(3)$ rotacija $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = R(A)\boldsymbol{x}$, jer je $\det X = \det X'$. Eksplicitan oblik rotacije glasi

$$x'^a = R^a{}_b x^b\,, \qquad R^a{}_b(A) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^a A \sigma^b A^{-1})\,.$$

Preslikavanje $A \mapsto R(A)$ je homomorfizam, jer je $R(A_1A_2) = R(A_1)R(A_2)$.

Dobijeni homomorfizam $SU(2) \to SO(3)$ je 2–1. To se lako vidi iz činjenice da je jezgro homomorfizma [skup elemenata iz $SU(2)$ koji se preslikavaju u jedinicu iz $SO(3)$] diskretna invarijantna podgrupa $Z_2 = (1, -1)$. Prema tome,

$$SO(3) = SU(2)/Z_2\,.$$

Grupa $SU(2)$ je jednostruko povezana, i ona predstavlja univerzalnu pokrivajuću grupu za $SO(3)$.

Razmotrimo sada pojam pridružene reprezentacije grupe i uvodjenje Kartanove metrike. Neka je G Lijeva grupa, a $\mathcal{A}_G$ odgovarajuća Lijeva algebra u tački $g = I$. Preslikavanje grupe G na samu sebe, zadato sa

$$U_\Omega : \quad g \mapsto g_\Omega = \Omega g \Omega^{-1}\,,$$

gde je Ω fiksni elemenat iz G, naziva se unutrašnji automorfizam grupe G. Svakom unutrašnjem automorfizmu grupe G odgovara automorfizam Lijeve algebre $\mathcal{A}_G$ oblika

$$Ad_\Omega : \quad T_a \mapsto (T_a)_\Omega = \Omega T_a \Omega^{-1}\,. \qquad (K.6a)$$

Svi automorfizmi grupe G čine grupu, $Aut(G)$. U prostoru $\mathcal{A}_G$ deluju pridruženi automorfizmi, koji, takodje, čine grupu G_A ($Ad_{\Omega_1\Omega_2} = Ad_{\Omega_1}Ad_{\Omega_2}$). Izmedju automorfizama grupe G i indukovanih automorfizama algebre $\mathcal{A}_G$ postoji korespodencija koja predstavlja homomorfizam. Grupa G_A se naziva *pridružena reprezentacija* grupe G na algebri $\mathcal{A}_G$.

U blizini jedinice elemenat grupe Ω ima oblik $\Omega = 1+\omega$ gde je $\omega = \omega^e T_e$, pa je pridruženi automorfizam zadat preslikavanjem

$$(T_a)_\Omega = T_a + [\omega, T_a] = T_a + \omega^e f_{ea}{}^c T_c\,, \quad \text{za svaki} \quad \Omega \in G\,. \qquad (K.6b)$$

Transformacije Ad_Ω grupe G_A imaju generatore oblika $(T'_e)^c_a = f_{ea}{}^c = [T_e, T_a]^c$. Oni definišu pridruženu (adjungovanu) reprezentaciju Lijeve algebre.

Neka su $U = u^a T_a$ i $V = v^b T_b$ elementi Lijeve algebre $\mathcal{A}_G$. Svakoj Lijevoj algebri se može pridružiti Kilngova bilinearna forma

$$(U, V) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(U'\,V')\,, \qquad (K.7a)$$

koja par U, V preslikava u realan broj. Ova forma je invarijantna u odnosu na delovanje pridruženih automorfizama G_A Lijeve algebre, što sledi iz

(K.6a) i standardnih osobina operacije traga. Izražena preko koordinata ona ima oblik $(U,V) = g_{ab}u^a v^b$, gde je

$$g_{ab} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(T'_a T'_b) = -\tfrac{1}{2} f_{ae}{}^c f_{bc}{}^e\,, \qquad (K.7b)$$

Kartanova metrika. Uočimo da Kartanova metrika predstavlja prirodnu definiciju metrike u tangentnom prostoru grupe u tački $g = I$. Ako umesto elemenata U, V iz $\mathcal{A}_G$ posmatramo odgovarajuće tangentne vektore $\boldsymbol{u} = u^a \boldsymbol{e}_a$ i $\boldsymbol{v} = v^a \boldsymbol{e}_a$, tada se skalarni proizvod vektora $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ u tački $g = I$ (ili $t = 0$) definiše relacijom

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (U, V) = g_{ab}u^a v^b\,. \qquad (K.7c)$$

Kasnije ćemo videti kako se metrika može uvesti u tangentni prostor proizvoljne tačke g, što je važno pri razmatranju Rimanove strukture grupe.

Pridružene automorfizme algebre $\mathcal{A}_G$ nazivamo delovanjem grupe u tangentnom prostoru grupe. Tangentni vektor $\boldsymbol{e}_a$ se, u odnosu na delovanje grupe, transformiše na isti način kao i T_a: $\delta'_0 \boldsymbol{e}_a = \varepsilon^e f_{ea}{}^c \boldsymbol{e}_c$. Odavde sledi pravilo transformacije za kontravarijantni vektor u^a, dok se transformacija kovarijantnog vektora v_a definiše tako da veličina $u^a v_a$ bude invarijantna:

$$\delta'_0 u^a = -\varepsilon^e f_{ec}{}^a u^c\,, \qquad \delta'_0 v_a = \varepsilon^e f_{ea}{}^c v_c\,.$$

Ove definicije su u skladu sa konvencijama u dodatku A, do na zamenu $\varepsilon \to -\theta$. Ako se $f_{ab}{}^c$ smatra tenzorom trećeg ranga, onda iz Jakobijevog identiteta sledi $\delta'_0 f_{ab}{}^c = 0$. Odatle se dobija da je Kartanov tenzor invarijantan u odnosu na delovanje grupe G (dodatak A).

Za poluproste grupe važi $\det(g_{ab}) \neq 0$, pa se tada može konstruisati inverzna Kartanova metrika g^{ab}, što omogućava razvoj standardnog tenzorskog računa.

Lijeve grupe transformacija. U fizici se Lijeva grupa najčešće pojavljuje kao grupa neprekidnih transformacija na nekoj mnogostrukosti. Svakom elementu grupe g odgovara transformacija T_g na mnogostrukosti, pri čemu se operacija grupnog proizvoda preslikava u analogno pravilo kompozicije transformacija (homomorfizam). Potrebno je jasno razlikovati mnogostrukost grupe G od mnogostrukosti X na kojoj se ostvaruje delovanje grupe preko transformacija T_g.

Lijeva grupa G je realizovana kao *Lijeva grupa transformacija* na diferencijabilnoj mnogostrukosti X, ako svakom njenom elementu g odgovara preslikavanje mnogostrukosti X u samu sebe, $x \mapsto T_g(x)$, sa osobinama:

a) $T_I(x) = x$ za svako $x \in X$,

b) $(T_{g_1}T_{g_2})(x) = T_{g_1 g_2}(x)$,

c) preslikavanje $(g, x) \mapsto T_g(x)$ je diferencijabilno.

Uslov $T_{g^{-1}} = [T_g]^{-1}$ je posledica *a*) i *b*). Preslikavanja T_g se nazivaju transformacije mnogostrukosti X, a opisana korespodencija elemenata grupe G i transformacija T_g predstavlja *realizaciju* Lijeve grupe G.

Kaže se da grupa deluje *efektivno* na X ako je $g = I$ jedini elemenat iz G za koji važi $T_g(x) = x$, za svaku tačku $x \in X$. Ovo znači da je preslikavanje grupe G na skup transformacija $\{T_g\}$ uzajamno jednoznačno, jer iz $g \neq h$ sledi $T_g \neq T_h$. Ovakvo preslikavanje definiše *tačnu* realizaciju grupe G.

Grupa deluje *tranzitivno* na X, ako za svako $x \in X$ postoji transformacija $x \mapsto T_g(x)$ koja tačku x preslikava u proizvoljno datu tačku $y \in X$.

Posmatrajmo delovanje beskonačno male transformacije $T_g = 1 + t^a \boldsymbol{e}_a$ na mnogostrukosti X:

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha(x,t) \approx x^\alpha + t^a \frac{\partial x'^\alpha}{\partial t^a}\bigg|_x \equiv x^\alpha + t^a E_a^\alpha(x)\,.$$

Skup transformacija T_g realizuje Lijevu grupu transformacija G na X ako odgovarajući generatori $\boldsymbol{e}_a = E_a^\alpha \partial_\alpha$ zadovoljavaju komutacione relacije

$$[\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b] = f_{ab}{}^c \boldsymbol{e}_c\,, \tag{$K.8a$}$$

koje karakterišu Lijevu algebru grupe G. Vektor $\boldsymbol{e}_a$ je definisan u svakoj tački $x \in X$ i predstavlja vektorsko polje na X, pri čemu su veličine $f_{ab}{}^c$ konstante. Iz komutacionih relacija ($K.8a$) sledi jednačina

$$E_a^\alpha \partial_\alpha E_b^\beta - E_b^\alpha \partial_\alpha E_a^\beta = f_{ab}{}^c E_c^\beta\,, \tag{$K.8b$}$$

poznata kao strukturna ili Lijeva jednačina.

Koristeći Lijev izvod jednačina ($K.8a$) se može napisati u ekvivalentnom obliku

$$\mathcal{L}_a \boldsymbol{e}_b = f_{ab}{}^c \boldsymbol{e}_c\,, \quad \text{ili} \quad \delta_0 \boldsymbol{e}_b = -t^a f_{ab}{}^c \boldsymbol{e}_c\,,$$

gde je $\mathcal{L}_a \equiv \mathcal{L}_{e_a}$. Prema tome, promena forme tangentnog vektora $\delta_0 \boldsymbol{e}_b$, u odnosu na koordinatne transformacije $\delta x^\alpha = t^a E_a^\alpha$ na X, jednaka je promeni $\delta_0' \boldsymbol{e}_b$, nastaloj pri delovanju grupe u tangentnom prostoru od X sa parametrom $-t^a$.

Iz poznatih zakona transformacije za E_a^α i u_α lako se dobija zakon transformacije za $u_a = E_a^\alpha u_\alpha$. Ova transformacija se pojavljuje kao rezultat transformacije koordinata u X, i nju treba razlikovati od delovanja grupe u tangentnom prostoru.

Ako samu grupu posmatramo kao mnogostrukost, onda se pomeranje tačaka u toj mnogostrukosti može opisati delovanjem elemenata te iste grupe. Transformacije grupe na samu sebe definisane sa

$L_g: \quad h \mapsto gh$ (leva translacija), ili

$D_g: \quad h \mapsto hg$ (desna translacija),

imaju posebno važnu ulogu u izučavanju strukture grupe kao mnogostrukosti. U daljem izlaganju ograničićemo se na leve translacije L_g (desne translacije se tretiraju analogno).

Uvedimo pojam levo invarijantnog vektorskog polja na G. Transformacija L_g prevodi krivu $C(t)$ koja prolazi kroz jedinicu u krivu $C_g(t) = gC(t)$ koja prolazi kroz tačku $g = g(\tau)$. Za malo t važi $C_g(t^\alpha) = g(\tau^\alpha + t^a E_a^\alpha(\tau))$, gde veličine E_a^α zavise od pravila kompozicije grupe, pa sledi

$$T_a(\tau) = \partial_a C_g(t)|_{t=0} = E_a^\alpha \partial_\alpha g(\tau) \equiv \boldsymbol{e}_a(g)\,,$$

gde je $\partial_a = \partial/\partial t^a$. Posmatrana transformacija indukuje preslikavanje L'_g tangentnog vektora $\boldsymbol{e}_a$ parametarske krive $c(t)$ u odgovarajući tangentni vektor $\boldsymbol{e}_a(\tau)$ transformisane krive $c_g(t)$. Tako se, polazeći od proizvoljnog vektora $\boldsymbol{u}$, može generisati *vektorsko polje* $\boldsymbol{u}_g = L'_g\boldsymbol{u}$. Dobijeno vektorsko polje je po konstrukciji levo invarijantno, tj. invarijantno u odnosu na delovanje leve translacije: $L'_g\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_{gh}$.

Sedeća dva stava bliže karakterišu opisanu strukturu:

i) Levom translacijom se tangentni prostor u tački $g = I$ preslikava u tangentni prostor u tački g, i ovo preslikavanje je 1–1.

ii) Leva translacija čuva strukturu komutatora: ako u tački $g = I$ grupe važi relacija $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{w}$, tada u tački g važi $[\boldsymbol{u}_g, \boldsymbol{v}_g] = \boldsymbol{w}_g$.

Iz prvog stava sledi da se levom translacijom baza $\boldsymbol{e}_a$ u jedinici preslikava u skup vektora $\boldsymbol{e}_a(\tau)$, koji čini bazu u tački $g(\tau)$. Baza $\boldsymbol{e}_a(\tau)$ se razlikuje od koordinatne baze $\boldsymbol{e}_\alpha(\tau) = \partial_\alpha$; medju njima postoji veza

$$\boldsymbol{e}_a(\tau) = E_a^\alpha(\tau)\boldsymbol{e}_\alpha(\tau)\,, \qquad (K.9a)$$

gde koeficijenti E_a^α zavise od tačke $g(\tau)$; specijalno, u tački $g = I$ imamo $E_a^\alpha = \delta_a^\alpha$. Drugi stav znači: ako baza $\boldsymbol{e}_a$ zadovoljavu algebru $(K.8a)$, istu algebru zadovoljava i baza $\boldsymbol{e}_a(\tau)$,

$$[\boldsymbol{e}_a(\tau), \boldsymbol{e}_b(\tau)] = f_{ab}{}^c\boldsymbol{e}_c(\tau)\,. \qquad (K.9b)$$

Koristeći relaciju $(K.9a)$ prethodni uslov prelazi u Lijevu strukturnu jednačinu $(K.8b)$.

Posmatrajmo, dalje, veličinu $\boldsymbol{w} = g^{-1}\boldsymbol{d}g$, gde je $\boldsymbol{d}g$ diferencijal elementa $g(t)$. Ova veličina je linearna po $\boldsymbol{d}t^\alpha$ i predstavlja 1–formu. Ona je invarijantna u odnosu na leve translacije $g(t) \to hg(t)$, gde je h fiksan element iz G. Njen smisao se najlakše uočava posmatranjem odgovarajućih transformacija grupe na nekoj mnogostrukosti X. Neka elementu $g \in G$ odgovara transformacija tačaka u X definisana relacijom $x \mapsto x' = T_g^{-1}x$. Transformacija generisana elementom $\boldsymbol{d}T_g^{-1}$ ima oblik $\delta x' = \boldsymbol{d}T_g^{-1}x = -T_g^{-1}\boldsymbol{d}T_g x'$, odakle sledi da je $\boldsymbol{w}$ generator beskonačno malih transformacija. Prema tome, $\boldsymbol{w}$ je 1–forma u tački g sa vrednošću u Lijevoj algebri:

$$\boldsymbol{w} \equiv g^{-1}\boldsymbol{d}g = \boldsymbol{\theta}^a T_a\,, \qquad \boldsymbol{\theta}^a \equiv \boldsymbol{d}t^\alpha E_\alpha^a\,. \qquad (K.10a)$$

Iz definicije $\boldsymbol{w}$ sledi $\boldsymbol{d}g = g\boldsymbol{w}$, pa se ponovnim delovanjem spoljašnjeg izvoda $\boldsymbol{d}$ dobija relacija

$$\boldsymbol{dw} + \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w} = 0\,. \qquad (K.10b)$$

poznata kao More-Kartanova strukturna jednačina. Ona se može napisati u sledećim ekvivalentnim oblicima:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{d\theta}^a + \tfrac{1}{2} f_{bc}{}^a \boldsymbol{\theta}^b \wedge \boldsymbol{\theta}^c = 0\,, \\
&\partial_\alpha E^a_\beta - \partial_\beta E^a_\alpha + f_{bc}{}^a E^b_\alpha E^c_\beta = 0\,.
\end{aligned}
\tag{$K.10c$}
$$

Sada ćemo pokazati da je More–Kartanova jednačina u direktnoj vezi sa Lijevom jednačinom ($K.8b$). Uvedimo veličine H^α_a koje su inverzne od E^a_α: $H^\alpha_a E^b_\alpha = \delta^b_a$. Množeći zadnju jednačinu u ($K.10c$) sa $H^\alpha_m H^\beta_n H^\gamma_a$, i koristeći uslov ortogonalnosti, dobija se da H^γ_a zadovoljava Lijevu strukturnu jednačinu ($K.8b$). Drugim rečima, koeficijenti E^α_a i E^a_α su medjusobno inverzni. Dok Lijeva jednačina definiše strukturne konstante za bazu tangentnih vektora $\boldsymbol{e}_a = E^\alpha_a \partial_\alpha$, dotle More–Kartanova jednačina daje ekvivalentnu informaciju na jeziku 1–formi $\boldsymbol{\theta}^a = \boldsymbol{d}t^\alpha E^a_\alpha$. Forme $\boldsymbol{\theta}^a$ su dualne sa bazom tangentnih vektora $\boldsymbol{e}_a$, jer su koeficijenti E^a_α i E^α_a medjusobno inverzni. Jednačine ($K.8$) i ($K.10$) treba uporediti sa odgovarajućim jednačinama ($B.7a, b$) u dodatku B.

Primer 3. Proizvoljna matrica A iz $SU(2)$ se može napisati u obliku $A(\psi,\theta,\phi) = A_3(\psi)A_1(\theta)A_3(\phi)$ (Ojlerova parametrizacija). Koristeći $A_a(\omega) = \cos(\omega/2) + i\boldsymbol{\sigma}^a \sin(\omega/2)$, dobija se

$$
A(\psi,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{i(\psi+\phi)/2} & i\sin(\theta/2)e^{i(\psi-\phi)/2} \\ i\sin(\theta/2)e^{-i(\psi-\phi)/2} & \cos(\theta/2)e^{-i(\psi+\phi)/2} \end{pmatrix}.
$$

$(0 \le \psi \le 4\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$. Neka je $A_3(t)$ kriva u $SU(2)$ koja prolazi kroz jedinicu, $A_3(0) = 1$, a $C_3(t)$ kriva dobijena iz $A_3(t)$ levom translacijom: $C_3(t) = AA_3(t)$. Tangentni vektor krive $C_3(t)$ ima oblik

$$
T_{3A} = (d/dt)C_3(t)|_{t=0} \equiv \boldsymbol{e}_3(A)\,,
$$

gde je $\boldsymbol{e}_3 = \partial/\partial\phi$ levo invarijantno vektorsko polje u $SU(2)$. Definišimo na sličan način tangentne vektore na krive $C_1(t) = AA_1(t)$ i $C_2(t) = AA_2(t)$, redom:

$$
T_{1A} = (d/dt)C_1(t)|_{t=0} \equiv \boldsymbol{e}_1(A) \qquad T_{2A} = (d/dt)C_2(t)|_{t=0} \equiv \boldsymbol{e}_2(A)\,.
$$

Iz prve jednačine sledi relacija $A(\psi,\theta,\phi)(i\sigma^1/2) = E^\alpha_1 \partial_\alpha A(\psi,\theta,\phi)$, iz koje nije teško odrediti komponente vektorskog polja $\boldsymbol{e}_1 = E^\alpha_1 \partial_\alpha$. Na sličan način se izračunava $\boldsymbol{e}_2 = E^\alpha_2 \partial_\alpha$. Rezultat se može napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi \left(\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} \right), \\
\boldsymbol{e}_2 &= \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi \left(\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} \right), \\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{\partial}{\partial\phi}\,.
\end{aligned}
$$

Komutacione relacije generatora $\boldsymbol{e}_a$ imaju oblik $[\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b] = -\varepsilon_{abc}\boldsymbol{e}_c$.
Od matrice A može se konstruisati 1–forma $\boldsymbol{w} = A^{-1}\boldsymbol{d}A$. Eksplicitan račun dovodi do rezultata

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} =&(\boldsymbol{d}\psi \sin\theta \sin\phi + \boldsymbol{d}\theta \cos\phi)T_1 \\ &+ (-\boldsymbol{d}\psi \sin\theta \cos\phi + \boldsymbol{d}\theta \sin\phi)T_2 + (\boldsymbol{d}\psi \cos\theta + \boldsymbol{d}\phi)T_3 \equiv \boldsymbol{d}t^\alpha E^a_\alpha T_a\,,\end{aligned}$$

gde je $T_a = (i/2)\sigma^a$. Ako od koeficijenata E^a_α napravimo inverznu matricu E^α_a i definišemo vektorsko polje $\boldsymbol{e}'_a = E^\alpha_a \partial_\alpha$, rezultat se poklapa sa prethodno dobijenim izrazima za $\boldsymbol{e}_a$: $\boldsymbol{e}'_a = \boldsymbol{e}_a$.

Rimanova struktura grupe. Lijeva jednačina i More–Kartanova jednačina, kao i Kartanova metrika u $g = I$, predstavljaju karakteristike koje su važne sa gledišta grupne strukture mnogostrukosti grupe. Uvodjenjem metrike u svakoj tački mnogostrukosti, kao i pogodnim izborom koneksije, mnogostrukost grupe postaje Rimanov prostor.

Posmatrajmo u proizvoljnoj tački grupe veličine $\boldsymbol{u}_g = u^a\boldsymbol{e}_a$ i $\boldsymbol{v}_g = v^b\boldsymbol{e}_b$, koje uzimaju vrednosti u skupu levo invarijantnih vektorskih polja $\boldsymbol{e}_a = E^\alpha_a \boldsymbol{e}_\alpha$. Skalarni proizvod dva levo invarijantna vektorska polja $\boldsymbol{u}_g$ i $\boldsymbol{v}_g$ u tački g je, po definiciji, identično jednak njihovom skalarnom proizvodu u tački $g = I$:

$$(\boldsymbol{u}_g, \boldsymbol{v}_g) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,. \qquad (K.11a)$$

Na jeziku komponenti prethodni uslov postaje

$$g_{\alpha\beta}E^\alpha_a E^\beta_b = g_{ab}\,, \qquad (K.11b)$$

gde je $g_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta)$ *Kilingova metrika* grupe G; u tački $g = I$ ona se svodi na g_{ab}, jer je tamo $E^a_\alpha = \delta^a_\alpha$.

Metrika se, takodje, može definisati koristeći 1–formu $\boldsymbol{w} = g^{-1}\boldsymbol{d}g = \boldsymbol{d}t^\alpha E^a_\alpha T_a$. Zaista, Kilingova kvadratična forma $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ ima oblik

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{d}t^\alpha \boldsymbol{d}t^\alpha E^a_\alpha E^b_\beta g_{ab} \equiv \boldsymbol{d}t^\alpha \boldsymbol{d}t^\beta g_{\alpha\beta}\,, \qquad (K.12)$$

odakle se, ako primetimo da je $E^a_\alpha E^\alpha_b = \delta^a_b$, dobija izraz za metriku $g_{\alpha\beta}$ ekvivalentan sa $(K.11b)$. Iz definicije Kilingove forme $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ sledi da je Kilingova metrika invarijantna u odnosu na leve i desne translacije.

Uvedimo *koneksiju* u G definisanjem kovarijantnog izvoda:

$$D_u\boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_u\boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\,, \qquad (K.13a)$$

gde su $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ levo invarijantna vektorska polja na G. Koeficijenti koneksije su odredjeni promenom baze,

$$D\boldsymbol{e}_a \equiv \boldsymbol{\theta}^e \otimes D_e\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{\omega}^c{}_a \otimes \boldsymbol{e}_c\,, \qquad \boldsymbol{\omega}^c{}_a = \tfrac{1}{2}f_{ea}{}^c\boldsymbol{\theta}^e\,. \qquad (K.13b)$$

Pokazaćemo da je ovako definisana koneksija Rimanova, tj. da je torzija jednaka nuli, a $Dg_{ab} = 0$.

Neka je $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}^a \boldsymbol{e}_a$ 1–forma sa vrednošću u skupu vektora, tj. tenzor tipa (1,1). Delovanjem uopštenog spoljašnjeg izvoda (dodatak B) na $\boldsymbol{w}$ dobija se

$$\boldsymbol{dw} = \boldsymbol{d\theta}^a \boldsymbol{e}_a - \boldsymbol{\theta}^a D\boldsymbol{e}_a = (\boldsymbol{d\theta}^c + \boldsymbol{\omega}^c{}_a \boldsymbol{\theta}^a)\boldsymbol{e}_c \equiv \mathcal{T}^c \boldsymbol{e}_c \,,$$

gde je $\mathcal{T}^c$ torzija. Koristeći koneksiju $(K.13b)$ vidi se da se More–Kartanova jednačina $(K.10c)$ podudara sa uslovom $\mathcal{T}^c = 0$. S druge strane,

$$D_c g_{ab} = D_c(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b) = \tfrac{1}{2}(f_{ca}{}^e g_{eb} + f_{cb}{}^e g_{ea}) = 0 \,,$$

pošto je, na osnovu Jakobijevog identiteta, strukturna konstanta $f_{abc} = f_{ab}{}^e g_{ec}$ potpuno antisimetrična.

Posle zadavanja kovarijantnog izvoda krivina se izračunava po pravilu $(B.10)$:

$$R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = D_u D_v \boldsymbol{w} - D_v D_u \boldsymbol{w} - D_{[u,v]}\boldsymbol{w} = -\tfrac{1}{4}\,[[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}],\boldsymbol{w}] \,. \qquad (K.14a)$$

Koristeći, dalje, $R(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)\boldsymbol{e}_c = \boldsymbol{e}_e \, R^e{}_{cab}$, za tenzor krivine se dobija

$$R^e{}_{cab} = -\tfrac{1}{4}\, f_{ab}{}^d f_{dc}{}^e \,, \qquad R_{cb} = \tfrac{1}{2} g_{cb} \,. \qquad (K.14b)$$

Simetrije Rimanovih prostora. Ono što je od važnosti za simetriju nekog prostora nije struktura transformacija koje vršimo na njemu, već pitanje da li pri takvim transformacijama neke bitne karakteristike prostora ostaju nepromenjene. Grupa $SO(3)$ je simetrija euklidskog prostora E_3, jer se pri ovim transformacijama ne menja metrika i orijentacija ovog prostora. To nas ponovo vraća na Rimanove prostore i ideju izometrije.

Videli smo da su izometrije Rimanovog prostora transformacije koje ne menjaju formu metrike, i one su odredjene rešenjima Kilingove jednačine. Ako Kilingovi vektori zadovoljavaju relaciju $(K.8b)$, izometrije imaju strukturu odgovarajuće Lijeve grupe.

Smisao Kilingovih vektora je u tome da oni povezuju bliske tačke koje su, sa gledišta oblika metrike, ekvivalentne. Broj Kilingovih vektora, koje poseduje prostor V u tački x, zavisi od oblika metrike, i on nam kazuje na koliko se načina iz date tačke x možemo pomeriti, a da pritom ne promenimo formu metrike.

Rimanov prostor V je *homogen* ako su njegove metričke osobine iste u svakoj tački, tj. ako u njemu postoji grupa simetrije (izometrija) koja dozvoljava transformaciju bilo koje zadate tačke u svaku drugu tačku (grupu deluje tranzitivno na V). Drugim rečima, u datoj tački postoje Kilingovi vektori koji imaju proizvoljnu orijentaciju. Broj linearno nezavisnih Kilingovih vektora u homogenom prostoru dimenzije N jednak je N. To znači da se u svakoj tački ovog prostora može uvesti skup od N Kilingovih vektora oblika $E_a^\alpha = \delta_a^\alpha$.

Rimanov prostor V je *izotropan* u tački x ako postoji grupa izometrije H_x koja ne pomera tačku x. Pritom je $E_a^\alpha(x) = 0$, a prvi izvodi $E_a^{\alpha,\beta}(x)$ u toj tački uzimaju sve moguće vrednosti, uz poštovanje uslova antisimetričnosti ($K.3b$). To, specijalno, znači da se u prostoru od N dimenzija može zadati skup od $N(N-1)/2$ Kilingova vektora E_{mn}^α koji zadovoljavaju uslove:

$$
\begin{aligned}
&E_{mn}^\alpha(x) = 0\,, \qquad E_{mn}^\alpha(x) = -E_{nm}^\alpha(x)\,,\\
&E_{mn}^{\alpha,\beta}(x) = \delta_m^\alpha\delta_n^\beta - \delta_n^\alpha\delta_m^\beta\,.
\end{aligned}
$$

Koristeći opštu relaciju $E_{\alpha;\beta;\gamma} - E_{\alpha;\gamma;\beta} = E_\delta R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}$, i ciklički identitet za tenzor krivine, $R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma} + R^\delta{}_{\gamma\alpha\beta} + R^\delta{}_{\beta\gamma\alpha} = 0$, dobija se da Kilingov vektor E_α zadovoljava uslov

$$
E_{\gamma;\beta;\alpha} = E_\epsilon R^\epsilon{}_{\alpha\beta\gamma}\,.
$$

Diferenciranjem ove relacije vidimo da se treći izvod od E_α u tački y može izraziti preko vektora $E_\alpha(y)$ i njegovog prvog izvoda $E_{\alpha;\beta}(y)$, a posle toga, ponavljanjem postupka, isto to zaključujemo i za sve ostale izvode u tački y. Vrednost Kilingovog vektora u nekoj tački x, koja leži u okolini od y, može se izračunati razvojem u Tejlorov red po stepenima od $x - y$. Ta funkcija će biti izražena kao linearna kombinacija veličina $E_\alpha(y)$ i $E_{\alpha;\beta}(y)$:

$$
E_\alpha(x) = A_\alpha{}^\beta(x,y)E_\beta(y) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,y)E_{\beta;\gamma}(y)\,,
$$

gde A i B ne zavise od E_α i $E_{\alpha;\beta}$, a $B_\alpha{}^{\beta\gamma} = -B_\alpha{}^{\gamma\beta}$. Odavde sledi da u prostoru od N dimenzija ne može postojati više od $N(N+1)/2$ linearno nezavisnih Kilingovih vektora. Zaista, za svaki $E_\alpha(x)$ postoji N linearno nezavisnih veličina $E_\alpha(y)$, i $N(N-1)/2$ linearno nezavisnih $E_{\alpha;\beta}(y)$, pa iz prethodne jednačine sledi da je maksimalan broj linearno nezavisnih $E_\alpha(x)$ jednak zbiru $N + N(N-1)/2 = N(N+1)/2$.

Rimanov prostor V je *maksimalno simetričan* ako ima maksimalan broj od $N(N+1)/2$ Kilingova vektora.

Specijalno, homogen prostor, koji je izotropan u nekoj tački, je i maksimalno simetričan. Izotropnost u jednoj tački implicira, zbog homogenosti, izotropnost u svakoj tački; odatle sledi da postoji N Kilingovih vektora koji opisuju homogenost, i još $N(N-1)/2$ onih koji odgovaraju izotropnosti, što ukupno daje maksimalan broj od $N(N+1)/2$ linearno nezavisnih Kilingovih vektora.

Navedimo dve važne osobine ovih prostora:

a) Tenzor krivine maksimalno simetričnog prostora V ima oblik

$$
R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})\,. \tag{$K.15$}
$$

Prostori ovog tipa se nazivaju prostori konstantne krivine.

b) Maksimalno simetrični prostori su *jedinstveni*: ako dve metrike imaju istu signaturu i isto Λ, onda postoji koordinatna transformacija koja prevodi jednu metriku u drugu.

Osobina jedinstvenosti je veoma značajna sa gledišta ispitivanja maksimalno simetričnih prostora: za nalaženje osobina ovih prostora dovoljno je konstruisati i ispitati bilo kog predstavnika date klase.

Primer 4. Prethodna razmatranja ćemo ilustrovati na primeru dvodimenzione jedinične sfere S_2, čija metrika u sfernim koordinatama (θ, φ) ima oblik

$$ds^s = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 .$$

Ovaj koordinatni sistem je dobro definisan u oblasti $\theta \neq 0, \pi$. Kilingove jednačine imaju oblik

$$\begin{aligned}
&E_{\varphi,\varphi} + \sin\theta\cos\theta\, E_\theta = 0 ,\\
&E_{\theta,\theta} = 0 ,\\
&E_{\theta,\varphi} + E_{\varphi,\theta} - 2\mathrm{ctg}\,\theta\, E_\varphi = 0 .
\end{aligned}$$

Integracijom prve dve jednačine dobija se $E_\theta = f(\varphi)$, $E_\varphi = -F(\varphi)\sin\theta\cos\theta + G(\theta)$, gde je $F(\varphi) = \int f(\varphi)d\varphi$, a f i G su proizvoljne funkcije. Zamenom ovih izraza u treću jednačinu odredjuju se funkcije f i G: $f = a\sin\varphi + b\cos\varphi$, $G = c\sin^2\theta$, gde su a, b, c proizvoljne konstante. Posle toga rešenje za Kilingov vektor dobija oblik

$$\begin{aligned}
&E_\theta = a\sin\varphi + b\cos\varphi = E^\theta ,\\
&E_\varphi = (a\cos\varphi - b\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta = \sin^2\theta E^\varphi .
\end{aligned}$$

Prisustvo tri proizvoljna parametra a, b, c znači da postoje tri nezavisna rešenja. Uvodeći oznaku $\boldsymbol{e} = E^\theta\partial_\theta + E^\varphi\partial_\varphi$ i izdvajajući članove uz a, b i c dobijaju se tri nezavisna generatora:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1 = \sin\varphi\partial_\theta + \mathrm{ctg}\,\theta\cos\varphi\partial_\varphi ,\\
&\boldsymbol{e}_2 = \cos\varphi\partial_\theta - \mathrm{ctg}\,\theta\sin\varphi\partial_\varphi ,\\
&\boldsymbol{e}_3 = \partial_\varphi .
\end{aligned}$$

Ovi generatori zadovoljavaju komutacione relacije $[\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b] = -\varepsilon_{abc}\boldsymbol{e}_c$. Prema tome, grupa izometrije sfere S_2 je rotaciona grupa $SO(3)$. Primećujemo da je broj generatora izometrije veći od dimenzije prostora S_2.

Pokazaćemo sada da rotaciona grupa deluje tranzitivno na S_2. Podjimo, na primer, od tačke $P \in S_2$ čije su Dekartove koordinate $x^a_P = (1, 0, 0)$. Nije teško videti da se proizvoljna tačka (x^1, x^2, x^3) na sferi može dobiti pogodno odabranom rotacijom tačke P: $x^a = R^a{}_b x^b_P = R^a{}_1$.

Primetimo da izbor rotacije, kojom se vrši prelaz od P do (x^1, x^2, x^3), nije jednoznačan, pošto postoji podgrupa $H = SO(2)$ grupe $SO(3)$ koja ne pomera tačku P:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2{}_2 & R^2{}_3 \\ 0 & R^3{}_2 & R^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Prema tome, ako transformacija R pomera tačku P u (x^1, x^2, x^3), onda to isto radi i RR_H, $R_H \in H$. Podgrupa $H = SO(2)$ predstavlja podgrupu izotropije. Homogenost i izotropnost sfere S_2 impliciraju da je ona maksimalno simetričan prostor. Zaista, metrika sfere dozvoljava postojanje tri Kilingova vektora.

Konstrukcija maksimalno simetričnih prostora. U prethodnim razmatranjima definisali smo uslove koji obezbedjuju da Rimanov prostor V bude maksimalno simetričan u odnosu na delovanje Lijeve grupe G. Jedinstvenost prostora omogućava da se njegove osobine izuče posmatranjem bilo koje realizacije prostora konstantne krivine.

Razmotrimo, kao primer, konstrukciju *trodimenzionog* maksimalno simetričnog prostora signature $(+,+,+)$ i krivine Λ, imajući na umu da se opisani postupak može lako uopštiti. Neka je E_4 četvorodimenzioni euklidski prostor čija je metrika u Dekartovim koordinatama zadana intervalom

$$ds^2 = \delta_{ab} dx^a dx^b + dz^2 \,. \qquad (K.16a)$$

Posmatrajmo, dalje, trodimenzionu hipersferu S_3 u E_4 definisanu jednačinom

$$\delta_{ab} x^a x^b + z^2 = \kappa^2 \,. \qquad (K.16b)$$

Na ovoj hiperpovrši važi $\delta_{ab} x^a dx^b + z dz = 0$. Rešavanjem ove relacije po dz i zamenom u interval ds^2 dobija se izraz za elemenat rastojanja na S_3:

$$ds^2|_{S_3} = \delta_{ab} dx^a dx^b + \frac{(\delta_{ab} x^a dx^b)^2}{\kappa^2 - \delta_{cd} x^c x^d} \equiv g_{ab} dx^a dx^b \,. \qquad (K.17)$$

Metrika g_{ab} je metrika na S_3.

Elemenat rastojanja $(K.16a)$ prostora E_4, kao i uslov $(K.16b)$ koji definiše hipersferu S_3, invarijantni su u odnosu na $SO(4)$ rotacije prostora E_4, koje imaju sledeći oblik:

$$x'^a = R^a{}_b x^b + R^a{}_4 z \,, \qquad z' = R^4{}_b x^b + R^4{}_4 z \,,$$

gde je R 4×4 matrica koja zadovoljava uslove $R^T R = I$ i $\det R = 1$. Invarijantnost sledi iz činjenice da je grupa $SO(4)$ izometrija prostora E_4, a može se i direktno proveriti. Grupa $SO(4)$ ima šest generatora: broj antisimetričnih matrica 4×4 sa tragom nula iznosi $4 \cdot 3/2 = 6$. To znači da metrika hipersfere ima maksimalan broj od šest Kilingovih vektora, odakle sledi da je S_3 maksimalno simetričan prostor.

Zbog maksimalne simetrije dovoljno je krivinu prostora S_3 izračunati u tački $x^a = 0$. Direktan račun daje $g_{ab} \approx \delta_{ab} + x_a x_b/\kappa^2$, $\Gamma^a_{bc} \approx x^a \delta_{bc}/\kappa^2$, odakle se dobija

$$R_{abcd} = \frac{1}{\kappa^2}(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \,, \qquad R = \frac{6}{\kappa^2} \,.$$

Prelazeći na sferne koordinate r, θ i φ metrika hipersfere S_3 dobija oblik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/\kappa^2} + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)\,.$$

iz koga se jasnije vide neke geometrijske karakteristike ovog prostora.

U prethodnom razmatranju konstruisali smo maksimalno simetričan prostor grupe $SO(4)$ — hipersferu S_3. Po vrednosti konstante krivine $\Lambda = 1/\kappa^2$ razlikujemo sledeća tri slučaja:

a) $\Lambda > 0$, prostor konstantne pozitivne krivine,

b) $\Lambda < 0$, prostor konstantne negativne krivine, i

c) $\Lambda = 0$, ravan prostor.

Ova konstrukcija se lako uopštava na druge grupe simetrija. U dodatku C je izložena odgovarajuća konstrukcija kad je grupa simetrije de Siterova grupa $SO(2,3)$.

Struktura maksimalno simetričnih prostora je u velikoj meri odredjena grupom simetrije: za datu grupu G jedina sloboda koju imamo sastoji se u izboru krivine Λ. Ostaje nam da ovo pitanje proučimo sa još jedne strane, pokazujući da postoji direktna veza metrike maksimalno simetričnog prostora sa strukturom grupe simetrije.

Koset prostor. U narednom razmatranju ukazaćemo na vezu izmedju koset prostora i maksimalno simetričnog prostora Lijeve grupe.

Neka je $\{G, *\}$ grupa. Podskup H grupe G je *podgrupa* od G ako iz $h_1, h_2 \in H$ sledi: *a*) $h_1 h_2 \in H$ i *b*) $h_1^{-1} \in H$, tj. ako je $\{H, *\}$ takodje grupa. Grupa rotacija oko x ose, $SO(2)$, je podgrupa svih rotacija $SO(3)$ euklidskog prostora E_3.

Neka je H podgrupa od G. Skup elemenata $gH = \{gh | h \in H\}$, za dato $g \in G$, naziva se *levi koset* od H u G. Za različite elemente g_i iz G dobićemo kolekciju levih koseta $g_i H$. Definišimo sledeću relaciju ekvivalencije: $g_1 \sim g_2$ ako je $g_1 \in g_2 H$. Ova relacija ekvivalencije definiše klase ekvivalencije koje se podudaraju sa levim kosetima grupe G. Sve transformacije iz $SO(3)$ oblika RR_x, gde je R_x neka rotacija oko x ose, a R proizvoljna rotacija, predstavljaju levi koset od R_x u $SO(3)$. Interesantno je uočiti da transformacije RR_x, delujući na tačku $(1,0,0)$ sfere S_2, deluju isto kao i transformacije cele grupe $SO(3)$.

Na sličan način, svaki skup $Hg = \{hg | h \in H\}$ se naziva *desni koset* od H u G.

Podgrupa H od G je *invarijantna* (ili normalna) podgrupa ako se delovanjem proizvoljnog elementa g iz G podgrupa H preslikava u samu sebe: za svako $h \in H$ važi $h \mapsto ghg^{-1} \in H$. Levi koset gH i desni koset Hg invarijantne podgrupe H su identični.

Kolekcija svih koseta invarijantne podgrupe H se naziva *faktor grupa* G u odnosu na H, i označava se sa G/H. Grupna operacija u G/H je zadata sa

$$[g_1][g_2] = [g_1 g_2]\,.$$

Koset $[h]$, $h \in H$, ima ulogu jediničnog elementa u G/H. Ako postoji homomorfizam $G \to G/H$ zadat sa $g \mapsto [g]$, on se naziva prirodni ili kanonski homomorfizam.

Ako je G topološka grupa, onda se skup koseta G/H može snabdeti prirodnom, indukovanom topologijom i postati topološki prostor, koji nazivamo *koset prostor*. U slučaju Lijevih grupa, koset prostor ima strukturu analitičke mnogostrukosti.

Označimo skup generatore iz H sa $\Gamma_H = \{H_{\bar a}\}$, a ostale generatore sa $\Gamma_M = \{M_{a'}\}$. Tada je, simbolično, $\Gamma = \Gamma_H + \Gamma_M$. Skup generatora Γ_H zadovoljava Lijevu algebru $\mathcal{A}_H$, dok sa Γ_M to nije slučaj. Ako je grupa poluprosta, njena algebra ima oblik

$$\begin{aligned}
&[H_{\bar a}, H_{\bar b}] = f_{\bar a\bar b}{}^{\bar c} H_{\bar c}\,, \\
&[H_{\bar a}, M_{b'}] = f_{\bar a b'}{}^{c'} M_{c'}\,, \\
&[M_{a'}, M_{b'}] = f_{a'b'}{}^{\bar c} H_{\bar c} + f_{a'b'}{}^{c'} M_{c'}\,.
\end{aligned} \tag{K.18}$$

Zaista, za poluproste grupe strukturne konstante $f_{abc} = f_{ab}{}^{e} g_{ec}$ su potpuno antisimetrične, pa činjenica postojanja podalgebre $\mathcal{A}_H$ implicira $f_{\bar a\bar b}{}^{c'} = 0$ i $f_{\bar a b'}{}^{\bar c} = 0$.

Neka je grupa G zadata skupom parametara $t^a = (t^{\bar a}, t^{a'})$. Imajući u vidu činjenicu da se u faktor grupi elementu $[h]$, koji sadrži H, pridružuje jedinični elemenat, vidimo da se faktor grupa može opisati skupom parametara $t^{a'}$. Uvodeći u faktor grupu indukovanu topologiju, ona postaje koset prostor dimenzije $\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$.

Primer 5. Razmotrimo vezu grupe $SO(3)$ i sfere S_2. Uočavamo, najpre, da $SO(3)$ sadrži invarijantnu podgrupu $H = SO(2)_3$, definisanu rotacijama oko z ose. Pridružimo, sada, fiksnom elementu $R_{\mathbf{n}}(\omega)$ (rotacija oko $\boldsymbol{n}$ za ugao ω) koset $[R_{\mathbf{n}}(\omega)] = R_{\mathbf{n}}(\omega)H$.

Grupa $H = SO(2)_3$ je grupa izotropije u tački $x_0 = (0,0,1)$ homogenog prostora S_2: $Hx_0 = x_0$. Svakom kosetu $R_{\mathbf{n}}(\omega)H$ pridružimo tačku $T_{\mathbf{n}}(\omega)(x_0)$ iz S_2. Ta korespodencija je uzajamno jednoznačna, i ne zavisi od izbora predstavnika iz koseta. Prema tome, *sfera S_2 se poklapa sa koset prostorom $SO(3)/SO(2)$.*

Na sličan način se dokazuje opšta teorema:

T. Postoji uzajamno jednoznačna korespodencija tačaka homognog prostora V grupe G i levih koseta iz G/H, gde je H grupa izotropije.

Rimanova struktura koseta. Neka je V maksimalno simetričan prostor grupe G, $H = H_{x_0}$ podgrupa izotropije tačke $x_0 \in V$, a $X_a = E^{\alpha}_a \partial_\alpha$ generatori grupe G na V. Pošto je prostor V kompletno odredjen strukturom grupa G i H, očekujemo da se njegova metrika $g_{\alpha\beta}$ može izraziti preko strukture odgovarajuće Lijeve algebre, tj. preko Kilingovih vektora

E_a^α i strukturnih konstanti $f_{ab}{}^c$. Pošto je prostor V esencijalno dat kao G/H, problem konstrukcije metrike, na bazi poznate strukture grupe, može se shvatiti i kao problem uvodjenja Rimanove strukture na mnogostrukosti G/H.

Metrika mnogostrukosti V mora biti takva da transformacije grupe G predstavljaju izometrije. Pokazaćemo da veličina

$$g^{\alpha\beta} = E_a^\alpha E_b^\beta g^{ab}\,, \qquad (K.19)$$

gde je g^{ab} Kartanova metrika, zadovoljava postavljene zahteve. Uslov da su E_a^α Kilingovi vektori metrike $(K.19)$ ima oblik

$$\mathcal{L}_c g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\varepsilon}\partial_\varepsilon E_c^\beta + g^{\varepsilon\beta}\partial_\varepsilon E_c^\alpha - E_c^\varepsilon \partial_\varepsilon g^{\alpha\beta} = 0\,.$$

Koristeći Lijevu jednačinu prethodna relacija postaje

$$E_a^\alpha E_b^\beta \left(f_{ec}{}^b g^{ae} + f_{ec}{}^a g^{eb} - E_c^\varepsilon \partial_\varepsilon g^{ab} \right) = 0\,.$$

Ovaj uslov je zadovoljen, pošto je g^{ab} Kartanova metrika. Time smo dokazali da je metrika $(K.19)$ invarijantna u odnosu na koordinatne transformacije odredjene Kilingovim vektorima E_a^α.

Nadjimo sada izraz za krivinu Rimanovog prostora V čija je metrika definisana jednačinom $(K.19)$. Korisno je uvesti veličinu

$$h_{ab} = E_a^\alpha E_b^\beta g_{\alpha\beta}\,,$$

koja zadovoljava relacije $h_{ab}h^{bc} = h_a^c$ i $h_a^b E_b^\alpha = E_a^\alpha$. Prema tome, h je projektor i deluje kao jedinica na Kilingove vektore. Ako je podgrupa H od G trivijalna, tada je h_{ab} Kartanova metrika, inače je restrikcija od g_{ab} na koset. Grupne indekse ćemo dizati i spuštati pomoću Kartanove metrike, a koordinatne pomoću $g_{\alpha\beta}$.

Krivinu ćemo izračunati polazaći od Lijeve i Kilingove jednačine, napisanih u kovarijantnom obliku:

$$\begin{aligned} &E_a^\alpha E^\beta_{b;\alpha} - E_b^\alpha E^\beta_{a;\alpha} = f_{ab}{}^c E_c^\beta\,,\\ &E_{b\beta;\alpha} + E_{b\alpha;\beta} = 0\,. \end{aligned}$$

Množeći Lijevu jednačinu sa $E^{b\gamma}$, koristeći Kilingovu jednačinu i uslov $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, dobija se relacija $E_b^{\gamma;\beta} h_a^b - E_a^{\beta;\gamma} = f_a{}^{bc} E_b^\gamma E_c^\beta$, iz koje sledi

$$E_{a\gamma;\beta} = f_e{}^{bc}(\delta_a^e - \tfrac{1}{2}h_a^e) E_{b\gamma} E_{c\beta}\,.$$

Ponovljenim korišćenjem ove jednačine dobija se

$$\begin{aligned} E_{a\gamma;\beta;\alpha} &= (f_a{}^{bc} - \tfrac{1}{2} f_e{}^{bc} h_a^e) E_{b\gamma;\alpha} E_{c\beta} - (\beta \leftrightarrow \gamma) \\ &= (f_a{}^{bc} - \tfrac{1}{2} f_e{}^{bc} h_a^e)(f_b{}^{pq} - \tfrac{1}{2} f_m{}^{pq} h_b^m) E_{p\gamma} E_{q\alpha} E_{c\beta} - (\beta \leftrightarrow \gamma)\,. \end{aligned}$$

Zbog maksimalne simetrije računanje krivine možemo pojednostaviti prelazeći u tačku x_0. U toj tački je $E_a^\alpha = 0$ ako je indeks $a = \bar{a}$ (tj. iz H), dok je $E_{a'}^\alpha = \delta_{a'}^\alpha$. Tako vidimo da je $h_{ab} = \delta_a^{a'} \delta_b^{b'} g_{a'b'}$ restrikcija Kartanove metrike na koset. Prema tome,

$$(E_{a\gamma;\beta;\alpha})_0 = \tfrac{1}{2} f_{ab\beta} f^b{}_{\gamma\alpha} - \tfrac{1}{4} f_{ab'\beta} f^{b'}{}_{\gamma\alpha} - (\beta \leftrightarrow \gamma)\,,$$

odakle se, antisimetrizacijom po α i β i zamenom $a \to \varepsilon$, dobija tenzor krivine:

$$(R_{\varepsilon\gamma\beta\alpha})_0 = \tfrac{1}{2} f_{\varepsilon\gamma b} f_{\beta\alpha}{}^b - \tfrac{1}{2} f_{\varepsilon\gamma b'} f_{\beta\alpha}{}^{b'} + \tfrac{1}{4}(f_{\varepsilon\beta b'} f_{\gamma\alpha}{}^{b'} - f_{\varepsilon\alpha b'} f_{\gamma\beta}{}^{b'})\,. \qquad (K.20)$$

Interesantan slučaj predstavljaju grupe za koje je $f_{a'b'}{}^{c'} = 0$ (involutivne algebre), što implicira $f_{a'ce} f_{b'}{}^{ce} = 2 f_{a'c'e} f_{b'}{}^{c'e}$. Tada,

$$(R_{\alpha\gamma})_0 = \tfrac{1}{2} g_{\alpha\gamma}\,, \qquad R = \tfrac{1}{2} \dim(G/H)\,,$$

pa je skalarna krivina prostora G/H potpuno odredjena njegovom dimenzijom.

Zadaci

1. Pokazati da se u Rimanovom prostoru Lijevi izvodi $\mathcal{L}_E u^\alpha$ i $\mathcal{L}_E g_{\alpha\beta}$, kao i Lijeva strukturna jednačina, mogu napisati u kovarijantnom obliku:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_E u^\alpha(x) = E^\beta u^\alpha_{;\beta} - u^\beta E^\alpha_{;\beta}\,, \qquad \mathcal{L}_E g_{\alpha\beta} = E_{\alpha;\beta} + E_{\beta;\alpha}\,, \\ &E_a^\alpha E^\beta_{b;\alpha} - E_b^\alpha E^\beta_{a;\alpha} = f_{ab}{}^c E_c^\beta\,. \end{aligned}$$

2. *a*) Dokazati da je rotaciona grupa $SO(2)$ kompaktna i beskonačno povezana, dok je grupa translacija u jednoj dimenziji T^1 nekompaktna i jednostruko povezana.
   b) Dokazati da su ove grupe lokalno izomorfne, i da je $SO(2) = T^1/N$, gde je N diskretna invarijantna podgrupa koja je jednaka sa grupom svih celih brojeva (grupna operacija: $+$).
3. Matrica A iz $SU(2)$ je parametrizovana preko Ojlerovih uglova, kao u primeru 3. Pokazati da odgovarajuća matrica R iz $SO(3)$ ima oblik $R = R_3(\psi) R_1(\theta) R_3(\phi)$.
4. Dati su generatori grupa $SU(2)$ i $SO(3)$, redom: $\tau_a = i\sigma^a/2$, $(T_a)^b{}_c = \varepsilon_{abc}$.
   a) Naći oblik konačnih transformacija $A_1 = \exp(\theta\tau_1)$ i $R_1 = \exp(\theta T_1)$, koristeći razvoj u red.

b) Pokazati da je preslikavanje $A_1(\theta) \mapsto R_1(\theta)$ homomorfizam $SU(2)$ na $SO(3)$ tipa 2–1. Na osnovu toga dokazati da je $SU(2)$ dvostruko pokrivajuća grupa za $SO(3)$.

5. Matrica R iz $SO(3)$ je data preko Ojlerovih uglova: $R = R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)$.
a) Definisati vektor $\boldsymbol{e}_3$ u tački R kao tangentni vektor na krivu $C_3(t) = RR_3(t)$; pokazati da je $\boldsymbol{e}_3 = \partial/\partial\phi$.
b) Zatim naći tangentne vektore $\boldsymbol{e}_1$ i $\boldsymbol{e}_2$ na krive $C_1(t) = RR_1(t)$ i $C_2(t) = RR_2(t)$, redom.
c) Dokazati da važi $[\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b] = -\varepsilon_{abc}\boldsymbol{e}_c$.

6. Koristeći relaciju $\boldsymbol{d\omega}^a{}_b + \boldsymbol{\omega}^a{}_c \wedge \boldsymbol{\omega}^c{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\boldsymbol{\theta}^c \wedge \boldsymbol{\theta}^d$, gde je $\boldsymbol{\omega}^a{}_b = \frac{1}{2}f_{cb}{}^a\boldsymbol{\theta}^c$ koneksija, izračunati krivinu Lijeve grupe.

7. *a*) Dokazati da je More–Kartanova jednačina invarijantna u odnosu na lokalne transformacije $\delta_\lambda \boldsymbol{w} = \boldsymbol{d\lambda} + [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}]$, gde je $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^a T_a$ 1–forma.
b) Koristeći $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}t^\alpha E^c_\alpha T_c$ i uvodeći varijablu ε^α relacijom $\lambda^a = \varepsilon^\alpha E^a_\alpha$ dokazati jednačine:
$$\delta_\varepsilon E^a_\alpha = \varepsilon^\gamma \partial_\gamma E^a_\alpha + E^a_\gamma \partial_\alpha \varepsilon^\gamma \,,$$
$$\delta_\varepsilon g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varepsilon^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta \varepsilon^\gamma g_{\gamma\alpha} + \varepsilon^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \,.$$

8. Naći oblik tenzora krivine za dvodimenzionu sferu i pokazati da je sfera maksimalno simetričan Rimanov prostor.

9. *a*) Pokazati direktnom konstrukcijom da je Kilingova metrika grupe izometrija dvodimenzione sfere S_2, $g^{\alpha\beta} = g^{ab}E^\alpha_a E^\beta_b$, jednaka standardnoj metrici na S_2.
b) Konstruisati veličinu $h_{ab} = E^\alpha_a E^\beta_b g_{\alpha\beta}$ i uporediti je sa Kilingovom metrikom g_{ab} rotacione grupe $SO(3)$.

10. Posmatrajmo trodimenzionu sferu S_3 uronjenu u E_4: $\delta_{ab}x^a x^b + z^2 = \kappa^2$.
a) Pokazati da su $SO(4)$ rotacije definisane matricom
$$R^a{}_b = (R_3)^a{}_b \,, \qquad R^4{}_4 = 1 \,, \qquad R^a{}_4 = R^4{}_b = 0 \,,$$
gde je R_3 matrica trodimenzionih rotacija, izometrije sfere S_3.
b) Pokazati da preostale tri izometrije u Dekartovim koordinatama imaju sledeći komplikovan, nelinearan oblik:
$$R^a{}_b = \delta^a_b - \rho c^a c_b \,, \qquad R^a{}_4 = c^a \,,$$
$$R^4{}_b = -c_b \,, \qquad R^4{}_4 = (1 - c^2)^{1/2} \,,$$
gde je $c^2 = \delta_{ab}c^a c^b$, a $\rho = [1 - (1 - c^2)^{1/2}]/c^2$

11. *a*) Pokazati da metrika hipersfere S_3 u sfernim koordinatama r, θ i φ ima oblik:
$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/\kappa^2} + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) \,.$$
b) Neka je $\kappa^2 > 0$. Naći dužinu kružnice $r, \theta = \text{const.}$ i dužinu "radijusa" $\theta, \varphi = \text{const.}$ Uporediti njihov odnos sa euklidskom vrednošću 2π. Zatim, uvodeći smenu $r = \kappa \sin\chi$, izračunati oblik ds^2 i zapreminu prostora S_3.

12. Neka je G/H faktor grupa u kojoj je množenje definisano na uobičajen način. Dokazati da je jedinični element faktor grupe koset $[h]$ koji sadrži invarijantnu podgrupu H.

L. FURIJEOV RED

U ovom dodatku biće dat kratak pregled osnovnih formula teorije Furijeovih redova, koje se često koriste u teoriji struna.

Interval $[-\pi, \pi]$**.** Posmatrajmo funkciju $f(x)$ koja je zadana na intervalu $[-\pi, \pi]$ i ima period 2π. Furijeov red ove funkcije (kad postoji) definisan je relacijom

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)\,, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\cos nx\,, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\sin nx\,. \end{aligned} \tag{$L.1$}$$

Ovaj izraz se lako može prevesti u tzv. kompleksnu formu

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0 + \sum_{n\geq 1}\big(C_n e^{inx} + C_n^* e^{-inx}\big)\,, \\ C_n &= \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}\,, \end{aligned} \tag{$L.2a$}$$

koja se može uprostiti uvodjenjem $C_{-n} = C_n^*$:

$$f(x) = \sum_n C_n e^{inx}\,, \tag{$L.2b$}$$

gde suma po n ide od $-\infty$ do $+\infty$.

Ako je funkcija $f(x)$ *simetrična* u osnovnom intervalu, $f(-x) = f(x)$, onda je $b_n = 0$, pa se dobija

$$f(x) = \sum_n C_n e^{inx} = C_0 + 2\sum_{n\geq 1} C_n \cos nx\,, \tag{$L.3$}$$

zbog $C_n = C_{-n}$.

Interval $[0, \pi]$**.** U slučaju funkcije $f(x)$ zadane na $[0, \pi]$ koja ima period π važe analogne relacije.

a) Realna forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\big(a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx\big)\,, \\ a_n &= \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi} dx f(x)\cos 2nx\,, \qquad b_n = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi} dx f(x)\sin 2nx\,. \end{aligned} \tag{$L.4$}$$

b) Kompleksna forma:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_n C_n e^{2inx}\,, \\
C_n &= \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx f(x) e^{-2inx}\,.
\end{aligned}
\tag{$L.5$}
$$

Periodična δ–funkcija. Za periodične funkcije zadane Furijeovim redom, odgovarajuća periodična Dirakova δ–funkcija se može odrediti iz relacije kompletnosti.

Posmatrajmo, najpre, slučaj intervala $[-\pi, \pi]$, na kome je Furijeov razvoj funkcije $f(x)$ oblika $(L.2)$,

$$
f(x) = \sum_n C_n f_n(x)\,, \qquad f_n(x) \equiv e^{inx}\,.
$$

Koristeći izraz za C_n dobija se relacija

$$
f(x) = \sum_n \frac{1}{2\pi}\int dx' f(x') f_n^*(x') f_n(x)\,,
$$

iz koje, nakon zamene redosleda integracije i suma po n, sledi

$$
\begin{aligned}
\delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi}\sum_n f_n^*(x') f_n(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_n e^{in(x-x')} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\cos n(x - x')\,.
\end{aligned}
\tag{$L.6$}
$$

Ako je funkcija simetrična onda je $C_n = C_{-n}$, pa se iz prethodnih izraza dobija

$$
\begin{aligned}
\delta_S(x, x') &= \frac{1}{2}\big[\delta(x - x') + \delta(x + x')\big] \\
&= \frac{1}{4\pi}\sum\big[e^{in(x-x')} + e^{in(x+x')}\big] = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\cos nx \cos nx'\,.
\end{aligned}
\tag{$L.7$}
$$

U slučaju intervala $[0, \pi]$ analogna razmatranja daju rezultat

$$
\delta(x - x') = \frac{1}{\pi}\sum_n e^{2in(x-x')} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\cos 2n(x - x')\,. \tag{$L.8$}
$$

LITERATURA

Pored literature koja se direktno odnosi na predmet izlaganja, u ovaj spisak je uključen i izvestan broj standardnih knjiga iz teorije gravitacije, teorije polja i diferencijalne geometrije, kako bi čitalac, po potrebi, mogao da proširi svoje znanje iz ovih oblasti. Spisak literature nije kompletan, ali je reprezentativan sa tačke gledišta sadržine i nivoa izloženog materijala.

U svakoj glavi nekoliko opštih referenci, za koje smatramo da su posebno pogodne za dalje čitanje, označene su simbolom •, da bi se čitaocu dao putokaz za efikasnije korišćenje literature.

Literatura uz gl. I

— *Adler R., M. Bazin i M. Schiffer*, 1965, *Introduction to General Relativity* (McGraw–Hill, New York).

— *Edington A.*, 1966, *Space, Time and Gravitation*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge).

— *Einstein A.*, 1965, *Sobranie naučnih trudov*, tom 1 i 2, ed. I. E. Tamm, J. A. Smorodinski i B. G. Kuznecov (Nauka, Moskva).

— *Einstein A. i L. Infeld*, 1954, *The Evolution of Physics* (Simon and Schuster, New York).

— *Feynman R. P., R. B. Leighton i M. Sands*, 1963, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 1 (Addison–Wesley, Reading, Mass.), vol 1. Postoji ruski prevod (1976).

• *Hoffmann B.*, 1983, *Relativity and Its Roots* (Freeman and Co., New York).

• *Kittel C., W. D. Knight i M. A. Ruderman*, 1965, *Mechanics — Berkeley Physics Course*, vol. 1 (McGraw–Hill). Postoji ruski prevod (1975), kao i prevod na srpski jezik.

— *Landau L. D. i E. M. Lifšic*, 1973, *Teorija polja* (Nauka, Moskva).

— *Lucas J. R.*, 1973, *A Treatise on Space and Time* (Methuen & Co. Ltd., London).

— *Mach E.*, (1912) 1960, *The Science of Mechanics*, engleski prevod sa nemačkog knjige iz 1912 godine, T. J. McCorwick (Open Court, La Salle, Ill.).

— *Misner C. H., K. S. Thorne and J. A. Wheeler*, 1970, *Gravitation* (Freeman, San Francisco).
— *Moeller C.*, 1972, *The Theory of Relativity* (Clarendon Press, Oxford).
• *Rindler W.*, 1977, *Essential Relativity*, Second Edition (Springer, New York).
— *Rindler W.*, 1982, *Introduction to special relativity* (Clarendon Press, Oxford).
— *Schlick M.*, 1969, *Space and time in contemporary physics* (Dover Publications, New York).
— *Schmutzer E.*, 1979, *Relativitätstheorie — Aktuel* (Teubner Verlaggeselschaft, Leipzig).
• *Sciama D. W.*, 1969, *The Physical Foundations of General Relativity* (Doubleday and Co., New York).
— *Tolman R. C.*, 1969, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Clarendom Press, Oxford).
— *Wald R.*, 1984, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago).
— *Weinberg S.*, 1972, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York).
— Simpozijum *Prisustvo misli Alberta Ajnštajna u savremenoj fizici*, 1979, Zbornik radova u časopisu *Teorija*, broj **14** (Beograd).
— Simpozijum *Savremena istraživanja u fizici*, 1982, Zbornik radova, ed. B. Dragović (Naučna knjiga, Beograd).
— Simpozijum *Nils Bor i savremena fizika*, 1985, Zbornik radova (Beograd).
— Zbornik radova *Gravitacija i kosmologija*, 1989, SFIN **II**(2) (posvećen sećanju na Djordja Živanovića), ed. D. Popović.

Literatura uz gl. II

— *Abers E. S. i B. W. Lee*, 1973, "Gauge theories", Phys. Reports **C9**, 1.
— *Barut A. O.*, 1970, "Introduction to de Sitter and conformal groups and their physical applications", The symposium at the University of Colorado.
— *Barut A. O. i R. Raczka*, 1977, *Theory of group representations and applications* (PWN — Polish Scientific Publishers, Warszawa).
— *Belinfante F. J.*, 1940, "On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields" Physica **7**, 449.
— *Bergshoeff E. A.*, 1983, *Conformal invariance in supergravity*, Ph.D. Thesis, Leiden University, RX–1008 (LEIDEN)–mc (microfishe).
— *Boyanovsky D. i M. N. Carlos*, 1987, "Informal introduction to conformal invariance in statistical mechanics", Lectures presented at the Latin American School of Physics, La Plata, preprint PITT–87–12.

— *Callan C., S. Coleman i R. Jackiw*, 1970, “A New Improved Energy–Momentum Tensor”, Ann. Phys. (N.Y.) **59**, 42.
— *Carruthers P.*, 1971, “Broken scale invariance in particle physics”, Phys. Reports **1C**, 3.
— *Choquet–Bruhat Y., C. de Witt–Morette i M. Dillard–Bleick*, 1977, *Analysis, Manifolds and Physics* (North Holland, Amsterdam).
• *Coleman S.*, 1971, “An improved energy–momentum tensor”, i “Dilatations”, Proceedings of the 1971 International Summer School of Physics ”Ettore Majorana”, ed. A. Zichichi (Plenum, London).
— *Coleman S.*, 1973, “Secret symmetry: An introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields”, Proceedings of the 1973 International Summer School of Physics ”Ettore Majorana”, ed. A. Zichichi (Plenum, London).
— *Dubrovin B., S. Novikov i A. Fomenko*, 1979, *Sovremennaja geometrija* (Nauka, Moskva).
— *Felsager B.*, 1981, *Geometry, Particles and Fields* (Odense University Press, Odense).
— *Ferrara S., R. Gatto i A. Grillo*, 1973, *Conformal algebra in space–time and operator product expansion*, Springer Tracts in Modern Physics **67**, 1.
• *Fulton T., F. Rohrlich i L. Witten*, 1962, “Conformal invariance in physics”, Rev. Mod. Phys. **34**, 442.
— *Ginsparg P.*, 1988, “Applied conformal field theory”, Lectures at the Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Les Houches, France, objavljeno u: Les Houches Summer School, 1988, p. 1.
• *Kibble T. W. B.*, 1961, “Lorentz invariance and the gravitational field”, J. Math. Phys. **2**, 212.
— *Novožilov Yu. V.*, 1972, *Vvedenie v teoriju elementarnih častic* (Nauka, Moskva).
— *Sohnius M.*, 1985, “Supersymmetry”, Phys. Reports **C128**, 39.
• *Treiman S., R. Jackiw i D. Gross*, 1972, *Lectures on current algebra and its applications* (Princeton University Press, Princeton).
— *Van Holten J. W.*, 1986, “D=2 conformal gauge theory”, Acta Phys. Polon. **B18** (1987) 163.
— *Wess J.*, 1971, *Conformal invariance and the energy–momentum tensor*, Springer Tracts in Modern Physics, **60**, 1.
— *Zumino B.*, 1970, “Effective lagrangians and broken symmetries”, u: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Brandeis University Summer Institute, ed. S. Deser i dr., vol. 2 (MIT Press, Cambridge, MA).

Literatura uz gl. III

— *Baekler P., F. W. Hehl i E. W. Mielke*, 1986, “Nonmetricity and torsion: Facts and fancies in gauge approaches to gravity”, Proceedings of the fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, ed. R. Rufini (Elsevier, Amsterdam).

— *Battiti R. i M. Toller*, 1985, "Zero–Mass Normal Modes in Linearized Poincaré Gauge Theories", Lett. Nuovo Cim. **44**, 35.

— *Blagojević M. i I. Nikolić*, 1983, "Hamiltonian dynamics of Poincaré gauge theory: General structure in the time gauge", Phys. Rev. **D28**, 2455.

— *Blagojević M., I. Nikolić, D. Popović i Dj. Živanović*, 1981, "Poincaré gauge theory of gravitation and its Hamiltonian formulation", Nuovo Cim. **B62**, 257.

— *Blagojević M., D. Popović i Dj. Živanović*, 1982, "Gravitational singularity in Poincaré gauge theory", Phys. Lett. **B109**, 431.

— *Blagojević M. i M. Vasilić*, 1987, "Extra gauge symmetries in a weak–field approximation of an $R + T^2 + R^2$ theory of gravity", Phys. Rev. **D35**, 3748.

— *Choquet–Bruhat Y., C. de Witt–Morette i M. Dillard–Bleick*, 1977, *Analysis, Manifolds and Physics* (North Holland, Amsterdam).

— *Dimakis A.*, 1989, "The initial value problem of the Poincaré gauge theory in vacuum. I. Second order formalism, II. First order formalism", Ann. Inst. H. Poincaré **A51**, 371, 389.

— *Dubrovin B., S. Novikov i A. Fomenko*, 1979, *Sovremennaja geometrija* (Nauka, Moskva).

— *Fairtchild E. E.*, 1976, "Gauge theory of gravitation", Phys. Rev. **D14**, 384.

— *Frolov B.*, 1963, "Princip lokalnoj invarijantnosti i teorema Neter", Vesnik Mosk. Univ. No.**6**, 48.

— *Grignani G. i G. Nardelli*, 1992, "Gravity and the Poincaré group", Phys. Rev. **D45**, 2719.

— *Hamamoto S.*, 1983, "Manifestly covariant canonical formalism of Poincaré gauge theories", Z. Phys. **C10**, 353.

— *Hayashi K.*, 1968, " Gauge theories of massive and massless tensor fields", 1968, Prog. Theor. Phys. **39**, 495.

— *Hayashi K., i A. Bregman*, 1975, "Poincaré Gauge Invariance and the Dynamical Role of Spin in Gravitational Theory", Ann. Phys. (N. Y.) **75**, 562.

— *Hayashi K. i T. Shirafuji*, 1979, "New general relativity", Phys. Rev. **D19**, 3524.

• *Hayashi K. i T. Shirafuji*, 1980–81, "Gravity from the Poincaré gauge theory of fundamental particles. I. General formulation, II. Equations of motion for test bodies and various limits, III. Weak field approximation, IV. Mass and energy of particle spectrum, V. The extended Bach–Lanczos identity, VI. Scattering amplitudes, VII. The axial–vector model", Prog. Theor. Phys. **64**, 866, 883, 1435, 2222; **65**, 525; **66**, 318, 2258.

— *Hayashi K. i T. Shirafuji*, 1988, "Gauge theory of gravitation — A unified formulation of Poincaré and (Anti–) De Sitter gauge theories", Prog. Theor. Phys. **80**, 711.
— *Hehl F. W.*, 1973, "Spin and torsion in general relativity: I. Foundations", Gen. Rel. Grav. **4**, 333.
— *Hehl F. W.*, 1974, "Spin and torsion in general relativity: II. Geometry and field equations", Gen. Rel. Grav. **5**, 491.
— *Hehl F. W.*, 1980, "Four lectures in Poincaré gauge theory", Proceedings of the 1979 International Summer School of Physics "Ettore Majorana", ed. P. G. Bergman i V. de Sabbata (Plenum, New York).
— *Hehl F. W., G. P. Kerlick i P. von der Heyde*, 1976, "On a new metric affine theory of gravitation", Phys. Lett. **B63**, 446.
— *Hehl F. W., J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman*, 1995, "Metric–Affine Gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors and Breaking of Dilation Invariance", Phys. Rep. **C258**, 1.
— *Hehl F. W., J. Nietsch i P. von der Heyde*, 1980, " Gravitation and the Poincaré gauge field theory with quadratic Lagrangian", u: *General Relativity and Gravitation* — One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein, ed. A. Held (Plenum, New York).
— *Hehl F. W. i Dj. Šijački*, 1980, "Towards a unified gauge theory of gravitational and strong interactions", Gen. Rel. Grav. **12**, 83.
• *Hehl F. W., P. von der Heyde, D. Kerlick i J. Nester*, 1976, "General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects", Rev. Mod. Phys. **48**, 393.
— *Ivanenko D. i G. Sardanashvily*, 1983, "The gauge treatment of gravity", Phys. Rep. **C94**, 1.
— *Katanaev M. i I. V. Volovich*, 1990, "Two–dimensional gravity with dynamical torsion and strings", Ann. Phys. (N. Y.) **197**, 1.
— *Kawai T.*, 1986, "A Poincaré gauge theory of gravity", Gen. Rel. Grav. **18**, 995.
• *Kibble T. W. B.*, 1961, "Lorentz invariance and the gravitational field", J. Math. Phys. **2**, 212.
— *Kuhfuss R. i J. Nitsch*, 1986, "Propagating modes in gauge field theories of gravity", Gen. Rel. Grav. **18**, 1207.
— *Mansouri F. i L. N. Chang*, 1976, "Gravitation as a gauge theory", Phys. Rev. **D13**, 3192.
— *Mielke E. W.*, 1987, *Geometrodynamics of Gauge Fields — On the geometry of Yang–Mills fields and gravitational gauge theories* (Akademie–Verlag, Berlin).
— *Minkevich A.*, 1980, "Generalised cosmological Friedmann equations without gravitational singularity", Phys. Lett. **A80**, 232.
— *Mišenko A. S. i A. T. Fomenko*, 1980, *Kurs diferencijalnoj geometrii i topologii* (Moskovski univ., Moskva).

— *Moffat J. W.*, 1978, "A geometrical gauge theory of gravity and elementary particle forces", Phys. Rev. **D17**, 1965.
— *Ne'eman Y.*, 1978, "Gravity is the gauge theory of the parallel transport modification of the Poincaré group", u: *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics*, ed. K. Bleuler, H. Petry, A. Reetz, Lecture Notes in Mathematics Vol. **676**, 189 (Springer, Berlin).
— *Ne'eman Y. i Dj. Šijački*, 1979, "Unified Affine Gauge Theory of Gravity and Strong Interactions with Finite and Infinite $GL(4, R)$ Spinor fields", Ann. Phys. (N. Y.) **120**, 292.
— *Nikolić I.*, 1984, "Dirac Hamiltonian structure of $R + R^2 + T^2$ Poincaré gauge theory of gravity without gauge fixing", Phys. Rev. **D30**, 2508.
— *Nitsch J.*, 1979, "The macroscopic limit of the Poincaré gauge field theory of gravitation", Proceedings of the 1979 International Summer School of Physics "Ettore Majorana", ed. P. G. Bergman i V. de Sabbata (Plenum, New York).
— *Prugovečki E.*, 1995, *Principles of quantum general relativity* (World Scientific, Singapore).
— *Schwinger J.*, 1963, "Quantized gravitational field", Phys. Rev. **130**, 1253.
— *Sciama D. W.*, 1962, "On the analogy between charge and spin in general relativity", u: *Recent developments in General Relativity* (Pergamon Press, London).
— *Sciama D. W.*, 1964, "The physical structure of general relativity", Rev. Mod. Phys. **36**, 463, (E) 1103.
— *Sezgin E. i P. van Nieuwenhuizen*, 1980, "New ghost–free gravity Lagrangians with propagating torsion", Phys. Rev. **D21**, 3269.
— *Shirafuji T. i M. Suzuki*, 1988, "Gauge theory of gravitation — a unified formulation of Poincaré and (anti–) de Sitter gauge theories", Prog. Theor. Phys. **80**, 711.
— *Šijački Dj.*, 1982, "Quark confinement and the short–range component of general affine gauge theory", Phys. Lett. **B109**, 435.
— *Smalley L.*, 1980, "Post–Newtonian approximation of the Poincaré gauge theory of gravitation", Phys. Rev. **D21**, 328.
— *Thirring W.*, 1978, "Gauge theories of gravitation", u: *Facts and Prospects of Gauge Theories*, P. Urban ed. (Springer, Wien) str. 439.
— *Utiyama R.*, 1956, "Invariant theoretical interpretation of interactions", Phys. Rev. **101**, 1597.
— *Von der Heyde P.*, 1975, "The equivalence principle in the U_4 theory of gravitation", Lett. Nuovo Cim. **14**, 250.
— *Yang C. N., i R. Mills*, 1954, "Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance", Phys. Rev. **96**, 191.

Literatura uz gl. IV

— *Adler S.L.*, 1982, "Einstein gravity as a symmetry–breaking effect", Rev. Mod. Phys. **54**, 729.
— *Adler R., M. Bazin i M. Schiffer*, 1965, *Introduction to General Relativity* (McGraw–Hill, New York).
— *de Alfaro V., S. Fubini i G. Furlan*, 1980, "Small distance behavior in Einstein theory of gravitation", Phys. Lett. **B97**, 67.
— *Antoniadis I., J. Iliopoulos i T. Tomaras*, 1985, "On the stability of background solutions in conformal gravity", Nucl. Phys. **B261**, 157.
— *Antoniadis I. i N. Tsamis*, 1984, "On the cosmological constant problem", preprint SLAC–PUB–3296; "Weyl invariance and the cosmological constant", preprint SLAC–PUB–3297.
— *Bergshoeff E. A.*, 1983, *Conformal invariance in supergravity*, Ph.D. Thesis, Leiden University.
— *Brans C. i R. Dicke*, 1961, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation", Phys. Rev. **124**, 925.
— *Bregman A.*, 1973, "Weyl Transformations and Poincaré Gauge invariance", Prog. Theor. Phys. **49**, 667.
— *Callan C., S. Coleman i R. Jackiw*, 1970, "A New Improved Energy–Momentum Tensor", Ann. Phys. (N.Y.), **59**, 42.
— *Canuto V., P. Adams, S. H. Hsieh i E. Tsiang*, 1976, "Gauge covariant theory of gravitation", Institute for space studies preprint, New York.
• *Charap J. i W. Tait*, 1974, "A gauge theory of the Weyl group", Proc. Roy. Soc. **A340**, 249.
— *Choquet–Bruhat Y., C. de Witt–Morette i M. Dillard–Bleick*, 1977, *Analysis, Manifolds and Physics* (North Holland, Amsterdam).
• *Coleman S.*, 1971, "An improved energy–momentum tensor", i "Dilatations", Proceedings of the 1971 International Summer School of Physics "Ettore Majorana", ed. A. Zichichi (Plenum, London).
— *Coleman S.*, 1973, "Secret symmetry: An introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields", Proceedings of the 1973 International Summer School of Physics "Ettore Majorana", ed. A. Zichichi (Plenum, London).
— *De Wit B.*, 1981, "Conformal invariance in gravity and supergravity", preprint NIKHEF–H/81–20, lekcije na 18th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland, Feb 18 – Mar 3, 1981.
— *Dereli T. i W. Tucker*, 1982, "A note on a generalization of Weyl's theory of gravitation", J. Phys. **A15**, L7.
— *Dereli T. i W. Tucker*, 1982, "Weyl scalings and spinor matter interactions in scalar–tensor theories of gravitation", Phys. Lett. **B110**, 206.
— *Dirac P. A. M.*, 1973, "Long range forces and broken symmetries", Proc. Roy. Soc. (London) **A333**, 403.

— *Domokos G.*, 1976, “Broken Weyl symmetry”, Trieste internal report IC/76/92.
— *Fukui M., K. Hayashi i T. Shirafuji*, 1985, “ Conformal Rescalings Applied to Poincaré Gauge Theory”, Prog. Theor. Phys. **74**, 852.
• *Fulton T., F. Rohrlich i L. Witten*, 1962, “Conformal invariance in physics”, Rev. Mod. Phys. **34**, 442.
— *Hayashi K., M. Kasuya i T. Shirafuji*, 1977, “Elementary Particles and Weyl's Gauge Field”, Prog. Theor. Phys. **57**, 431.
— *Hayashi K. i T. Kugo*, 1979, “Everything About Weyl's Gauge Field”, Prog. Theor. Phys. **61**, 334.
• *Hehl F.W., Mc Crea i Mielke*, 1988, “Weyl spacetimes, the dilation current and creation of gravitating mass by symmetry breaking”, Proceedings of the International H. Weyl Conference, Kiel, 1985, ed. W. Deppert i dr. (P. Lang Verlag, Frankfurt a. M.).
— *Hehl F. W. i Dj. Šijački*, 1980, “Towards a unified gauge theory of gravitational and strong interactions”, Gen. Rel. Grav. **12**, 83.
— *Hochberg D. i G. Plunien*, 1991, “Theory of Matter in Weyl Spacetime”, Phys. Rev. **D43**, 3358.
— *Kaku M.*, 1982, “Quantization of Conformal Gravity”, Nucl. Phys. **B203**, 285.
— *Kasuya M.*, 1975, “On the Gauge Theory in the Einstein–Cartan–Weyl space–time”, Nuovo Cim. **B28**, 127.
— *Kim Sung–Won*, 1986, “Brans–Dicke theory in general space–time with torsion”, Phys. Rev. **D34**, 1011.
— *Maluf J. W.*, 1987, “Conformal Invariance and Torsion in General Relativity”, Gen. Rel. Grav. **19**, 57.
— *Miletić S.*, 1986, “Vajlova teorija gravitacije”, Diplomski rad (Beograd).
— *Minkowski, P.*, 1977, “On the spontaneous origin of Newton's constant”, Phys. Lett. B71, 419.
— *Ne'eman Y. i Dj. Šijački*, 1988, “Gravity from symmetry breakdown of a gauge affine theory”, Phys. Lett. **B200**, 489.
— *Nepomechie R.*, 1984, “Einstein gravity as the low energy effective theory of Weyl gravity”, Phys. Lett. **B136**, 33.
— *Nieh H.T.*, 1982, “A spontaneously broken conformal gauge theory of gravitation”, Phys. Lett. **A88**, 388.
— *Obukhov Yu.N.*, 1982, “Conformal invariance and space–time torsion”, Phys. Lett. **A90**, 13.
— *Omote M.*, 1971, “Scale transformations of the second kind and the Weyl space–time”, Lett. Nuovo Cim. **2**, 58.
— *Omote M. i M. Kasuya*, 1977, “The Hamiltonian Formalism of the Local Scale Invariant Gravitational Theory”, Prog. Theor. Phys. **58**, 1627.
— *Pascual J.F.*, 1980, “Conformal gauge theory and Weyl invariance”, u: Proceedings of the International Conference GR9, vol. 3, 639 (Jena).
— *Smalley L.*, 1986, “Brans–Dicke–type models with nonmetricity”, Phys. Rev. **D33**, 3590.

— *Šijački Dj.*, 1982, “Quark confinement and the short–range component of general affine gauge theory”, Phys. Lett. **B109**, 435.
— *Utiyama R.*, 1973, “On Weyl's gauge field”, Prog. Theor. Phys. **50**, 2080.
— *Weyl H.*, 1918, “Gravitation und Elektrizität”, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, str. 465.
— *Weyl H.*, 1931, “Geometrie und Physik”, Naturwissenschaften **19**, 49.
— *Weyl H.*, 1952 (1923), *Space–Time–Matter* (Dover, New York); engleski prevod knjige *Raum, Zeit und Materie*, iz 1923. godine.
— *Wess J.*, 1971, *Conformal invariance and the energy–momentum tensor*, Springer Tracts in Modern Physics, **60**, 1.
— *Zee A., 1983*, “Einstein gravity emerging from quantum Weyl gravity”, Ann. Phys. (N. Y.) **151**, 431.
— *Zumino B.*, 1970, “Effective lagrangians and broken symmetries”, u: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Brandeis University Summer Institute, ed. S. Deser i dr., vol. 2 (MIT Press, Cambridge, MA).

Literatura uz gl. V i VI

— *Abott L. F. i S. Deser*, 1982, “Stability of Gravity with the Cosmological Constant”, Nucl. Phys. **B195**, 76.
— *Abott L. F. i S. Deser*, 1982, “Charge definition in non–abelian gauge theories”, Phys. Lett. **B116**, 259.
— *Arnowitt R., S. Deser i C. W. Misner*, 1962, “The Dynamics of general relativity”, u: *Gravitation — An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (Willey, N. Y.).
— *Antonowicz M. i W. Szcyrba*, 1985, “The dynamical of gravitational theories with GL(4,R) connections”, J. Math. Phys. **26**, 1711.
— *Baekler P., R. Hecht, F. W. Hehl i T. Shirafuji*, 1987, “Mass and Spin of Exact Solutions of the Poincaré Gauge Theory”, Prog. Theor. Phys. **78**, 16.
— *Baekler P. i E. W. Mielke*, 1988, “Hamiltonian Structure of Poincaré Gauge Theory and Separation of Non–Dynamical Variables in Exact Torsion Solutions”, Fortschr. Phys. **36**, 549.
— *Beig R. i N. O'Murchadha*, 1987, “The Poincaré Group as the Symmetry Group of Canonical General Relativity”, Ann. Phys. (N.Y.) **174**, 463.
— *Blagojević M. i I. Nikolić*, 1983, “Hamiltonian dynamics of Poincaré gauge theory: General structure in the time gauge”, Phys. Rev. **D28**, 2455.
— *Blagojević M., I. Nikolić, D. Popović i Dj. Živanović*, 1981, “Poincaré gauge theory of gravitation and its Hamiltonian formulation”, Nuovo Cim. **B62**, 257.
— *Blagojević M., I. Nikolić i M. Vasilić*, 1988, “Local Poincaré Generators in the $R + T^2 + R^2$ Theory of Gravity”, Nuovo Cim. **B101**, 439.

— *Blagojević M. i M. Vasilić*, 1987, "Extra gauge symmetries in a weak–field approximation of an $R + T^2 + R^2$ theory of gravity", Phys. Rev. **D35**, 3748.

— *Blagojević M. i M. Vasilić*, 1987, "Constraint algebra in Poincaré gauge theory", Phys. Rev. **D36**, 1679.

• *Blagojević M. i M. Vasilić*, 1988, "Asymptotic symmetries and conserved quantities in the Poincaré gauge theory", Class. Quant. Grav. **5**, 1241.

— *Blagojević M., D. Popović i B. Sazdović*, 1989, "Hamiltonian BRST quantization of antisymmetric tensor gauge theory", Nucl. Phys. **B322** 587.

— *Boulware D. G., S. Deser i K. S. Stelle*, 1985, "Properties of Energy in Higher Derivative Theories", preprint DOE–ER–40048–17–P5. Članak u: *Quantum field theory and quantum statistics*, vol. 2, p. 101, ed. I. A. Batalin et al. Dedicated to Prof. E. S.Fradkin on his 60th birthday.

— *Boulware D. G., G. Horowitz i A. Strominger*, 1983, "Zero–Energy for Scale–Invariant Gravity", Phys. Rev. Lett. **50**, 1726.

— *Brill D. i S. Deser*, 1968, "Positive definitenees of gravitational field energy", Phys. Rev. Lett. **20**, 75.

• *Castellani L.*, 1982, "Symmetries of constrained Hamiltonian systems", Ann. Phys. (N. Y.) **143**, 357.

— *Castellani L., P. van Nieuwenhuizen i M. Pilati*, 1982, "First–order tetrad gravity in Dirac's Hamiltonian formalism", Phys. Rev. **D26**, 352.

— *Cawley R.*, 1979, "Determination of the Hamiltonian in the Presence of the Constraints", Phys. Rev. Lett. **42**, 413.

— *Charap J. M. i J. E. Nelson*, 1983, "Cannonical General Relativity: the Primary Constraint Algebra", preprint QMC/83/3.

— *Charap J.M. i J. E. Nelson*, 1983, "Surface Integrals and the Gravitational Action", J. Phys. **A16**, 1661.

— *Charap J.M., M. Henneaux i J. E. Nelson*, 1988, "Explicit form of the constraint algebra in tetrad gravity ", Class. Quant. Grav. **5**, 1405.

— *Deser S.*, 1968, "Hamiltonian Dynamics and Positive Energy in General Relativity", u: Contemporary Physics, Trieste Symposium, vol. I, IAEA, Vienna.

— *Deser S.*, 1981, "Stability properties of gravity theories", u: Unified Theories of Elementary Particles, Proceedings, München, p. 152.

— *Deser S.*, 1982, "Energy in Gravitational Theories: Definition, Positivity Theorems and Stability", uvodno predavanje, *Eleventh Texas Symposium on Relativistic Astropysics*, Austin, Texas. Publikovano u: Texas Rel. Astro. **45** (1982).

— *Deser S.*, 1983, "Positive classical gravitational energy from classical supergravity", Phys. Rev. **D27**, 2805.

— *Dirac P.A.M.*, 1958, "The Theory of Gravitation in Hamiltonian Form", Proc. Roy. Soc. **A246**, 333.

— *Dirac P. A. M.*, 1962, "Interacting Gravitational and Spinor Field", u: *Recent Developments in General Relativity* (Festschrift für Infeld) (Pergamon Press, Oxford; PWN — Polish Scientific Publications, Warsaw), p. 191.

• *Dirac P. A. M.*, 1964, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York).

— *Faddeev L. D.*, 1968, "Gamiltonova formulirovka teorii tjagotenia", Proceedings of the V International Conference on Gravitation and Relativity (Tbilisi).

— *Gitman D. M. i I. V. Tutin*, 1986, *Kanoničesko kvantovanie polei so svjazami* (Nauka,Moskva).

• *Hanson A., T. Regge i C. Teitelboim*, 1976, *Constrained Hamiltonian Systems* (Academia Nazionale dei Lincei, Rome).

— *Hartle J. B. i K. Kuchar*, 1984, "The Role of Time in Path Integral Formulations of Parametrized Theories", u: *Quantum Theory of Gravity*, ed. M. Christensen (Adam Hilger, Techno House, Bristol).

— *Hayashi K. i T. Shirafuji*, 1985, "Energy, Momentum and Angular Momentum in Poincaré Gauge Theory", Prog. Theor. Phys. **73**, 54.

— *Henneaux M.*, 1983, "Poisson brackets of the constraints in the Hamiltonian formulation of the tetrad gravity", Phys. Rev. **D27**, 986.

— *Henneaux M. i C. Teitelboim*, 1992, *Quatization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton).

— *Isham C. J.*, 1992, "Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time", Lectures presented at the NATO Advanced Study Institute "Recent Problems in Mathematical Physics", Salamanca, June 1992, Imperial College preprint Imperial/TP/91–92/25.

— *Kasuya M.*, 1978, "The Einstein–Cartan Theory of Gravitation in a Hamiltonian form", Prog. Theor. Phys. **60**, 167.

— *Kawai T.*, 1986, "(3+1) structure of space–time in Poincaré gauge theory of gravity", Prog. Theor. Phys. **76**, 1166.

— *Kawai T.*, 1986, "Energy–momentum and angular momentum in Poincaré gauge theory of gravity", Prog. Theor. Phys. **79**, 920.

— *Mielke E. W. i R. P. Walner*, 1988, "Mass and Spin of Double Dual Solutions in Poincaré Gauge Theory", Nuovo. Cim. **B101**, 607.

— *Misner C. H., K. S. Thorne and J. A. Wheeler*, 1970, *Gravitation* (Freeman, San Francisco).

— *Nelson J. E. i C. Teitelboim*, 1978, "Hamiltonian Formulation of the Theory of Interacting Gravitational and Electron Fields", Ann. Phys. (N. Y.), **116**, 86.

— *Nester J.*, 1977, "Canonical Formalism and the ECSK Theory", Ph.D. Thesis, University of Maryland.

— *Nikolić I.*, 1981,"Hamiltonova formulacija Ajnšajn–Kartanove teorije gravitacije", Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu, PMF.

— *Nikolić I.*, 1983, "Kanonska struktura kalibraciono–invarijantnih teorija baziranih na Poenkareovoj grupi", Doktorska disertacija, Univerzitet u

Beogradu, PMF.
• *Nikolić I.*, 1984, “Dirac Hamiltonian structure of $R+R^2+T^2$ Poincaré gauge theory of gravity without gauge fixing”, Phys. Rev. **D30**, 2508.
— *Nikolić I.*, 1986, “Canonical Structure of Poincaré Gauge–Invariant Theory of Gravity”, Fiz. Suppl. **18**, 135.
— *Nikolić I.*, 1990, “Schwinger’s energy–energy brackets in the U_4 theory of gravity”, Class. Quantum Grav. **7**, 1895.
— *Nikolić I.*, 1992,“Constraint algebra from local Poincaré symmetry”, Gen. Rel. Gr. **24**, 159.
— *Nikolić I.*, 1995, “Dirac Hamiltonian formulation and algebra of the constraints in the Einstein–Cartan theory”, Class. Quant. Grav. **12**, 3103.
— *Peldan P.*, 1994, “Actions for gravity, with generalizations: a review”, Class. Quantum Grav. **11**, 1087.
— *Regge T. i C. Teitelboim*, 1974, “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity”, Ann. Phys. (N. Y.) **88**, 286.
— *Rovelli C.*, 1986, “Constraint Algebra in General Relativity”, Nuovo. Cim. **B92**, 49.
— *Szczyrba W.*, 1982, “Hamiltonian dynamics of gauge theories of gravity”, Phys. Rev. **D25**, 2548.
— *Sudarshan E.C.G. i N. Mukunda*, 1974, *Classical Dynamics — a Modern Perspective* (John Wiley and Sons, New York).
— *Sundermeyer K.*, 1982, *Constrained Dynamics* (Springer, Berlin).
— *Teitelboim C.*, 1973, “How Commutators of Constraints Reflect the Spacetime Structure”, Ann. Phys. (N. Y.) **79**, 542.
— *Teitelboim C.*, 1980, “The hamiltonian structure of space–time”, u: *General Relativity and Gravitation* — One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein, vol. I, ed. A. Held (Plenum Press, New York).
— *Teitelboim C.*,1992, “Abondoning prejudices about time reparametrization invariance”, u: *Proceedings of the Workshop on Physical Origins of Time Asymmetry*, Mazagon, Spain (Cambridge University Press, Cambridge).
— *ter Haar D.*, 1971, *Elements of Hamiltonian mechanics*, (Pergamon Press, Oxford).
— *Trautman A.*, 1980, “Fiber bundles, gauge fields and gravitation”, u: *General Relativity and Gravitation* — One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein, vol. I, ed. A. Held (Plenum Press, New York).
— *Tseytlin A. A.*, 1982, “Poincaré and de Sitter gauge theories of gravity with propagating torsion”, Phys. Rev. **D26**, 3327.
— *Vasilić M.*, 1984, “Ekstra simetrije u teoriji gravitacije tipa $R+T^2$”, Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu, PMF.
— *Vasilić M.*, 1984, “Lokalne simetrije u Poenkare–gradijentnoj teoriji gravitacije”, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, PMF.

— *York J. W., Jr.*, 1980, “Energy and Momentum of the Gravitational Field”, u: *Esseys in General Relativity: a festschrift for Abraham Taub*, ed. F. J. Tipler (Academic Press, New York), p. 39.

Literatura uz gl. VII i VIII

— *Berestecki V. B., E. M. Lifšić i L. P. Pitaevski*, 1980, *Kvantovaja elektrodinamika* (Nauka, Moskva).
— *Bjorken J. D. i S. Drell*, 1964, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw –Hill, New York).
— *Bjorken J. D. i S. Drell*, 1965, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw–Hill, New York).
— *Boulware D. i S. Deser*, 1972, “Can gravitation have a finite range?”, Phys. Rev. **D6**, 3368.
— *Deser S.*, 1970, “Self–interaction and gauge invariance”, Gen. Rel. Grav. **1**, 9.
• *Duff M. J.*, 1973, “A particle physicist’s approach to the theory of gravity”, Trieste preprint IC/73/70.
• *Feynman R. P., F. B. Morinigo i W. G. Wagner*, 1995, *Feynman Lectures on Gravitation* (Addison–Wesley, Reading).
— *Fierz M. i W. Pauli*, 1939, “Relativistic wave equation for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field”, Proc. Roy. Soc. **A173**, 211.
• *Kibble T. W. B.*, 1965, “The quantum theory of gravitation”, u: *High Energy Physics and Elementary Particles* (IAEA, Vienna), str. 885.
— *Landau L. D. i E. M. Lifšic*, 1973, *Teorija polja* (Nauka, Moskva).
— *Misner C. H., K. S. Thorne and J. A. Wheeler*, 1970, *Gravitation* (Freeman, San Francisco).
— *van Nieuwenhuizen, P.*, 1973, “Radiation of Massive Gravitation”, Phys. Rev.**D7**, 2300.
• *Okubo S.*, 1978, *Introduction to general relativity*, preprint UR–687, The University of Rochester.
— *Roman P.*, 1969, *Introduction to Quantum Field Theory* (John Wiley and Sons, New York).
— *Schwinger J.*, 1970, *Particles, sources and fields* (Addison–Wesley, Reading, Mass.), vol 1.
— *Takahashi Y.*, 1969, *An Introduction to Field Quantization* (Pergamon Press, Oxford).
• *Van Dam H.*, 1974, *Theory of Gravity* (ITP–University of Nijmegen, Nijmegen).
— *Van Dam H. i M. Veltman*, 1970, “Massive and massless Yang–Mills and gravitational fields”, Nucl. Phys. **B22**, 397.
— *Veltman M.*, 1976, “Quantum theory of gravitation”, u: *Methods in Field Theory*, ed. R.Balian i J. Zinn–Justin (North Holland, Amsterdam), str. 265.

— *Weinberg S.*, 1964, "Photons and Gravitons in S–matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass", Phys. Rev. **B135**, 1049.
— *Weinberg S.*, 1972, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York).
— *Weinberg S.*, 1995, *The quantum theory of fields* (Cambridge University Press, Cambridge).

Literatura uz gl. IX

• *Bailin D. i L. Alexander*, 1994, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, (IOP Publishing, Techno House, Bristol).
— *Barut A. O. i R. Raczka*, 1977, *Theory of group representations and applications* (PWN — Polish Scientific Publishers, Warszawa).
— *Berestecki V. B., E. M. Lifšić i L. P. Pitaevski*, 1980, *Kvantovaja elektrodinamika* (Nauka, Moskva).
— *Carruthers A.*, 1972, *Spin and Isospin in Particle Physics* (Gordon and Breach, New York).
— *Coleman S. i J. Mandula*, 1967, "All possible symmetries of the S matrix", Phys. Rev. **159**, 1251.
— *Deser S*, 1979, "Supergravity: a post–Newtonian unification", u: *Coral Gables 1979*, Proceedings "On the Path of Albert Einstein", 39.
— *Deser S.*, 1980, "Supergravities: Successes and Problems", Lecture at the Europhysics Conference on Unification of Fundamental Interactions, Erice 1980.
— *Deser S. i B. Zumino*, 1976, "Consistent Supergravity", Phys. Lett. **B62**, 335.
— *Fayet P. i S. Ferrara*, 1977, "Supersymmetry", Phys. Rep. **C32**, 250.
— *Ferrara S. i P. van Nieuwenhuizen*, 1978, "The Auxiliary Fields of Supergravity", Phys. Lett. **B74**, 333.
— *Freedman D. Z., P. van Nieuwenhuizen i S. Ferrara*, 1976, "Progress Towards a Theory of Supergravity", Phys. Rev. **D13**, 3214.
— *Freund P. G.*, 1986, *Introduction to Supersymmetry* (Cambridge Univ. Press, Cambridge).
— *Gates Jr. S. J., M. T. Grisaru, M. Roček i W. Siegel*, 1983, *Superspace — or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry* (The Benjamin Cummings Publishing, London).
— *Goroff M. i A. Sagnotti*, 1985, "Quantum gravity at two loops", Phys. Lett. **B160**, 81.
— *Goroff M. i A. Sagnotti*, 1986, "The ultraviolet behaviour of Einstein gravity", Nucl. Phys. **B266**, 709.
— *Haag R. J., J. Lopuszanski i M. Sohnius*, 1975, "All possible generators of supersymmetries of the S–matrix", Nucl. Phys. **B88**, 257.
— *Müller–Kirsten H. J. W. i A. Wiedermann*, 1987, *Supersymmetry — an*

Introduction with Conceptual and Calculational Datails (World Scientific, Singapore).
— *van Nieuwenhuizen P.*, 1979, "Four Lectures at 1979 Erice School on Spin, Torsion, Rotation and Supergravity", Proceedings of the 1979 International Summer School of Physics "Ettore Majorana", ed. P. G. Bergman i V. de Sabbata (Plenum, New York).
— *van Nieuwenhuizen P.*, 1980, "Six Lectures at the Cambridge Workshop on Supergravity", Nufield Workshop on Supergravity at Cambridge, England, 1980.
• *van Nieuwenhuizen P.*, 1981, "Supergravity", Phys. Rep. **C68**, 192.
— *van Nieuwenhuizen P.*, 1981, "Six Lectures at the Trieste 1981 Superschool on Supergravity", Stony Brook preprint ITP–SB–81–67.
— *van Nieuwenhuizen P. i D. Z. Freedman*, 1978, "Supergravity", Scientific American, Feb. 1978.
— *Novožilov Yu. V.*, 1972, *Vvedenie v teoriju elementarnih častic* (Nauka, Moskva).
— *Ogievetski V. i L. Mezinchesku*, 1975, "Simetrii meždu bozonami i fermionami i superpolja ", Usp. Fiz. Nauk **117**, 637 (engleski prevod: 1976, "Boson fermion symmetries and superfields", Sov. Phys. Usp. **18** 960).
— *Salam A. i J. Strathdee*, 1978, "Supersymmetry and Superfields", Fortschritte der Physik **26**, 57.
— *Sazdović B.*, 1989, "Supergravitacija", SFIN **2**.
— *Scherk J.*, 1979, "A short review of supergravity", l'Ecole Normale Superieure preprint LPTENS 79/23.
— *Schwinger J.*, 1970, *Particles, sources and fields* (Addison–Wesley, Reading, Mass.), vol 1.
• *Sohnius M. F.*, 1985, "Introducing supersymmetry", Phys. Rep. **C128**, 39.
— *Srivastava Prem. P.*, 1973, "Conformal symmetry in Lagrangian field theory", Nucl. Phys. **B64**, 499.
• *Srivastava Prem. P.*, 1986, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: An Introduction* (IOP Publishing, Techno House,Bristol).
— *Stelle K. S.*, 1983, "Introduction to supersymmetry", Trieste preprint ICTP/82–83/8.
— *Stelle K. S.*, 1983, "Supersymmetry, Finite Theories and Quantum Gravity", Trieste preprint ICTP/82–83/9
— *Stelle K. S., i P. C. West*, 1978, "Minimal Auxiliary Fields for Supergravity", Phys. Lett. **B74**, 330.
— *Stelle K. S., i P. C. West*, 1980, "Realizing the supersymmetry algebra", Trieste preprint ICTP/79–80/37.
— *Takahashi Y.*, 1969, *An Introduction to Field Quantization* (Pergamon Press, Oxford).
— *Uschersohn J.*, 1982, "Dirac, Weyl, Majorana, ... : A Review", Lyon University preprint LYCEN/8213.

— *Wess J. i J. Bagger*, 1982, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, New Jersey).
— *Wess J. i B. Zumino*, 1974, “Supergauge transformations in four dimensions”, Nucl. Phys. **B70**, 39.
• *West P.*, 1986, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity* (World Scientific, Singapore).
— *Wyborn G. B.*, 1973, *Classical Groups for Physicists* (John Willey and Sons, New York).
— *Zumino B.*, 1975, “Supersymmetry and the vacuum”, Nucl. Phys. **B89**, 535.
— *Recent Developments in Gravitation* (Cargese 1978), 1979, ed. M. Levy i S. Deser (Gordon and Breach, New York).
— Konferencija *Supergravity* (Stony Brook 1979), ed. D. Z. Freedman i P. van Nieuwenhuizen (North Holland, Amsterdam).
— Konferencija *Topics in Quantum Field Theory and Gauge Theories* (Salamanka), Phys. 77. (Springer Verlag, Berlin).
— Konferencija *Superspace and Supergravity* (Cambridge 1980), 1981, ed. S. W. Howking i M. Roček (Cambridge University Press, Cambridge).
— Konferencija *Supersymmetry and Supergravity ’81* (Trieste), ed. S. Ferrara, J. G. Taylor i P. van Nieuwenhuizen (World Scientific, Singapore).
— Konferencija *Supersymmetry and Supergravity ’82* (Trieste), 1982, ed. S. Ferrara, J. G. Taylor i P. van Nieuwenhuizen (World Scientific, Singapore).

Literatura uz gl. X

— *Abott L. F. i S. Deser*, 1982, “Stability of Gravity with the Cosmological Constant”, Nucl. Phys. **B195**, 76.
• *Bailin, D. i A. Love*, 1987, “Kaluza–Klein theories”, Rep. Prog. Phys. **50**, 1087.
— *Bergman P.*, 1942, *Introduction to the theory of relativity*, (Prentice–Hall, Englewoog Cliffs, N. J.).
— *Blagojević M. i M. Vasilić*, 1988, “Asymptotic symmetries and conserved quantities in the Poincaré gauge theory”, Class. Quant. Grav. **5**, 1241.
— *Candelas P. i S. Weinberg*, 1984, “Calculations of gauge couplings and compact circumferences from self–consistent dimensional reduction”, Nucl. Phys. **B237**, 397.
— Cho Y. M., 1975, “Higher dimensional unifications of gravitation and gauge theories”, J. Math. Phys. **16**, 2029.
— Cho Y. M. i P. G. O. Freund, 1975, “Non–Abelian gauge fields as Nambu–Goldstone fields”, Phys. Rev. **D12**, 1711.
— Cho Y. M. i P. S. Yang, 1975, “Unified geometry of internal space with space–time”, Phys. Rev. **D12**, 3789.

— *Chodos A.*, 1975, 1984, “Kaluza–Klein theories: an overview”, Comm. Nucl. Part. Phys. **13**, 171.
— *Coleman S.*, 1977, “The uses of instantons”, Proceedings of the 1977 International Summer School of Physics ”Ettore Majorana”, ed. A. Zichichi (Plenum, London).
— *Scherk J. i J. Schwarz*, 1975, “Dual field theory of quarks and gluons”, Phys. Lett. **B57**, 463.
— *Cremmer E. i J. Scherk*, 1977, “Spontaneous compactification of extra space dimensions”, Nucl. Phys. **B110**, 61.
— *Cremmer E., B. Julia i J. Scherk*, 1978, “Supergravity theory in 11 dimensions”, Phys. Lett. **B76**, 409.
— *Deser S.*, 1983, “Positive classical gravitational energy from classical supergravity”, Phys. Rev. **D27**, 2805.
— *De Witt B.*, 1964, “Dynamical Theory of Groups and Fields”, u: *Relativity, Groups and Topology*, ed. C. de Witt ad B. S. de Witt (Gordon and Breach, New York).
— *Dolan L. i M. J. Duff*, 1984, “Kac–Moody symmetries of Kaluza–Klein theories”, Phys. Rev. Lett. **52**, 14.
• *Duff M., B. Nilsson i C. Pope*, 1986, “Kaluza–Klein supergravity”, Phys. Rep. **C130**, 1.
— *Duff M., B. Nisson, C. Pope i N. Warner*, 1984, “On the consistency of the Kaluza–Klein ansatz”, Phys. Lett. **B149**, 60.
— *Einstein A. i P. Bergmann*, 1938, “On a generalization of Kaluza’s theory of electricity”, Ann. of Math. **39**, 683.
— *Eguchi T., P. Gilkey i A. Hanson*, 1980, “Gravitation, gauge theories and differential geometry”, Phys. Rep. **66**, 213.
— *Englert F. i H. Nikolai*, 1983, “Supergravity in eleven–dimensional space–time”, CERN preprint TH–3711/83.
— *Felsager B.*, 1981, *Geometry, Particles and Fields* (Odense University Press, Odense).
— *Freund P. G. O. i M. A. Rubin*, 1980, “Dynamics of dimensional reduction”, Phys. Lett. **B97**, 233.
— *Freedmann D. i P. van Nieuwenhuizen*, 1985, “The Hidden Dimension of Spacetime”, Sci. Am. **252** No 3, 62.
— *Freedmann D., P. van Nieuwenhuizen i S. Ferrara*, 1976, “Progress towards a theory of supergravity”, Phys. Rev. **D13**, 3214.
— *Gates J., M. Grisaru, M. Roček i W. Siegel*, 1983, *Superspace — or one thousend and one lessons in supersymmetry* (Benjamin–Commings).
— *Gross D. i M. Perry*, 1983, “Magnetic monopoles in Kauza–Klein theories”, Nucl. Phys. **B226**, 29.
— *Jordan P.*, 1947, “Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie”, Ann. of Phys. (Leipzig) **1**, 219.
— *Kaluza T.*, 1921, “Zum Unitätsproblem in der Physik”, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. **K1**, 966.

— *Karlhede A. i T. Tomaras*, 1983, “Spontaneous symmetry breaking in Kaluza–Klein theories”, Phys. Lett. **125**, 49.
— *Kerner R.*, 1968, “Generalization of the Kaluza–Klein theory for an arbitrary non–abelian gauge group”, Ann. Inst. Henry Poincaré, Sect. **A9**, 143.
— *Klein O.*, 1926, “Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie”, Z. Phys. **37**, 895.
— *Lee H. C*, editor, 1984, *An Introduction to Kaluza–Klein Theories*, Proceeding of the Workshop on Kaluza–Klein Theories, Chalk River, Canada, August 1983 (World Sciemtific, Singapore). U ovoj knjizi se može naći prevod originalnih radova Kaluce i Klajna na engleski.
— *Luciani J. F.*, 1978, “Space–time geometry and symmetry breaking”, Nucl. Phys. **B135**, 111.
— *Mecklenburg W.*, 1981, “Comment on stability properties of degenerate systems”, Phys. Rev. **D24**, 2776.
• *Mecklenburg W.*, 1983, “Ten lectures on Kaluza–Klein theory”, preprint na bazi lekcija održanih na Departmento de Mathematica, Universidade de Brasilia.
— *Mecklenburg W.*, 1984, “The Kaluza–Klein idea. Status and prospects” Fortschr. Phys. **32**, 207.
— *Nahm W.*, 1978, “Supersymmetries and their representations”, Nucl. Phys. **B135**, 149.
— *Orzalesi C.*, 1981, “Rimannian geometry of classical gauge field theories”, u: *Particle Physics 1980*, Proceedings of the 3rd Adriatic Meeting, Dubrovnik, 1980, ed. I. Andrić, I. Dadić i N. Zovko (North–Holland, Amsterdam).
— *Rajaraman R.*, 1982, *Solitons and instantons* (North Holland, Amsterdam).
— *Randjbar–Daemi S., A. Salam i J. Strathdee*, 1983, “Spontaneous compactification in six–dimensional Einstein–Maxwell theory”, Nucl. Phys. **B214**, 491.
— *Rayski J.*, 1965, “A unified description of spacetime and isosphere, I and II”, Acta Phys. Polon. **27**, 947; ibid. **28**, 87.
• Salam A. i J. Strathdee, 1982, “On Kaluza–Klein theory”, Ann. Phys. (N. Y.) **141**, 316.
— Schwarz A. S. i Yu. S. Tyupkin, 1981, “Dimensional reduction of the gauge field theory”, Nucl. Phys. **B187**, 321.
— *Sherk J. i J. Schwarz*, 1975, “Dual field theory of quarks and gluons”, Phys. Lett. **B57**, 463.
— *Toms D.*, 1984, “Kaluza–Klein Theories”, Proceeding of the Workshop on Kaluza–Klein Theories, Chalk River, Canada, August 1983, ed. H. C. Lee, (World Sciemtific Publishing Co., Singapore).
— *Trautman A.*, 1970, “Fibre bundles associated with space–time”, Rep. Math. Phys. **1**, 29.

— *van Nieuwenhuizen P.*, 1984, “An introduction to simple supergravity and the Kaluza–Klein program”, Les Houches Lectures, Session XI, 1983, ed. B. S. De Witt i R. Stora (Elsevier Science Publishers).
— *Vasilić M.*, 1989, “Kaluca–Klajnova teorija i unifikacija interakcija”, SFIN **II–2**, 97.
— *Viswanathan K.*, 1984, “Dimensional Reduction and Harmonic Expansions on Coset Spaces”, Proceeding of the Workshop on Kaluza–Klein Theories, Chalk River, Canada, August 1983, ed. H. C. Lee, (World Sciemtific, Singapore).
— *Weinberg S.*, 1972, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York).
— Weinbegr S., 1983, “Charges from extra dimensions”, Phys. Lett. **B125**, 265.
— *Wess J. i J. Bagger*, 1983, *Supersymmetry and supergravity* (Princeton University Press, Princeton).
— *Wetterich C.*, 1982, “Spontaneous compactification in higher dimensional gravity”, Phys. Lett. **B113**, 377.
— *Witten E.*, 1981a, “Search for a realistic Kaluza–Klein theory”, Nucl. Phys. **B186**, 412;
— *Witten E.*, 1981b, “Kaluza–Klein theory and the positive energy theorem”, Lectures at the Banff Summer Institute (C.A.P.) on Particles and Fields.
— *Witten E.*, 1981c, “A new proof of the positive energy theorem”, Comm. Math. Phys. **80**, 381.
— *Witten E.*, 1982, “Instability of the Kaluza–Klein vacuum”, Nucl. Phys. **B195**, 481.
— *Yano T.*, 1970, “Integral formulae in Rimannian geometry” (Marcel Dekker, New York).
— *Wu Y. S. i A. Zee*, 1984, “Massless fermions and Kaluza–Klein theories”, J. Math. Phys. **25**, 2696.
• *Zee A.*, 1981, “Grand Unification and Gravity — Selected Topics”, Proceedings of the Fourth Kyoto Summer Institute on Grand Unified Theories and Related Topics, Kyoto, Japan, June – July, 1981, ed. M. Konuma i T. Maskawa (World Scientific, Singapore).

Literatura uz gl. XI

— *Bailin D. i L. Alexander*, 1994, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, (IOP Publishing, Techno House, Bristol).
— *Banks T. i M. Peskin*, 1986, “Gauge invariance of string fields”, Nucl. Phys. **B 264**, 513.
— *Barbašov B. M. i V. V. Nesterenko*, 1987, *Model relativistkoj struni v fizike adronov* (Energoatomizdat, Moskva).
— *Bardeen W. A. i A. R. White*, editori, 1985, *Symposium on anomalies, geometry, topology*, Proceedings of the international conference,

Chicago, 1985 (World Scientific, Singapore).

— *Brink L.*, 1984, "Superstrings", u: *Supersymmetry*, (Plenum Press, New York).

— *Brink L.*, 1985, "Free Strings", u: *Superstrings, Supergravity and Unified Theories*, ed. G. Furlan i dr. (World Scientific, Singapore).

• *Brink L. i M. Henneaux*, 1988, *Principles of String Theory* (Plenum Press, New York).

— *Brink L., P. di Vecchia i P. S. Howe*, 1976, "A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spining string", Phys. Lett. **B65**, 471.

— *Callan C., D. Friedan, E. Martinec i M. Perry*, 1985, "Strings in background fields", Nucl. Phys. **B262**, 593.

— *Collins P. i R. Tucker*, 1976, "Classical and quantum mechanics of free relativistic membranes", Nucl. Phys. **B112**, 150.

— *Cremmer, E. i J. L. Gervais*, 1974, "Combining and splitting relativistic strings", Nucl. Phys. **B76**, 209.

— *Cremmer, E. i J. L. Gervais*, 1975, "Infinite component field theory of interacting relativistic strings and dual theory", Nucl. Phys. **B90**, 410.

— *D'Hoker E. and D. H. Phong*, 1988, "The geometry of string perturbation theory", Rev. Mod. Phys. **60** 917.

— *Deser S. i B. Zumino*, 1976, "A complete action for the spinning string", Phys. Lett. **B65**, 369.

— *Feigin B. i D. Fuchs*, 1982, "Invariant Skew–Symmetric Differential Operators on the Line and Verma Modules over the Virasoro Algebra", Funct. Anal. Appl. **16**, 114.

— *Fradkin E. i A. Tseytlin*, 1985, "Quantum string theory effective action", Nucl. Phys. **B261**, 1; "Effective action approach to superstring theory", Phys. Lett. **B160**, 69.

— *Furlan G., R. Jengo, J. C. Pati, D. W. Sciama i Q. Shafi*, editori, *Superstrings, Supergravity and Unified Theories*, Proceedings of the Summer Workshop in High Energy Physics and Cosmology, Trieste, 1985 (World Scientific, Singapore).

— *Gervais J. L.*, 1985, "Basic features of string theories", u: *Superstrings, Supergravity and Unified Theories*, ed. G. Furlan i dr. (World Scientific, Singapore).

— *Gliozzi F., J. Scherk i D. Olive*, 1977, "Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model", Nucl. Phys. **B122**, 253.

— *Goddard P., J. Goldstone, C. Rebbi i C. Thorn*, 1973, "Quantum dynamics of a massless relativistic string" Nucl. Phys. **B56**, 109.

— *Goddard P. i D. Olive*, 1986, "An Introduction to Kac–Moody Algebras and Their Physical Interpretation", u: *Unified String Theories*, ed. M. Green i D. Gross (World Scientific, Singapore).

— *Goddard P. i D. Olive*, editori, 1988, *Kac–Moody and Virasoro Algebras* (World Scientific, Singapore).

— *Gotto T.*, 1971, “Relativistic quantum mechanics of one–dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model”, Prog. Theor. Phys. **46**, 1560.
— *Green M., 1983*, “Supersymmetric dual string theories and their field theory limits – a review”, Surveys in High Energy Physics **3**, 127.
— *Green M. i D. Gross*, editori, 1985, *Unified String Theories*, Proceedings of the workshop on unified string theories, ITP, University of California, Santa Barbara, 1985 (World Scientific, Singapore).
— *Green M. i J. H. Schwarz*, 1982, “Supersymmetric string theories”, Phys. Lett. **B109**, 444.
— *Green M. i J. H. Schwarz*, 1984, “Covariant description of superstrings”, Phys. Lett. **B136**, 367; “Superstring field theory”, Nucl. Phys. **B243**, 475.
— *Green M. i J. H. Schwarz*, 1985, “Infinity cancellations in $SO(32)$ superstring theory”, Phys. Lett. **B151**, 21; “The hexagon gauge anomaly in type I superstring theory”, Nucl. Phys. **B255**, 93.
— *Green M., J. Schwarz i E. Witten*, 1987, *Superstring theory*, (Cambridge University Press, Cambridge).
— *Gross D., J. Harvey, E. Martinec i R. Rohm*, 1986, “Heterotic string theory. 1. The free heterotic string, 2. The interacting heterotic string”, Nucl. Phys. **B256**, 253; **B267**, 75.
— *Hara O.*, 1971, “On origin and physical meaning of Ward–like identity in dual–resonance model”, Prog. Theor. Phys. **46**, 1549.
— *Hata H, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunimoto i H. Ogawa*, 1986, “Manifestly covariant field theory of interacting string, I i II”, Phys. Lett. **B172**, 186, 195;
— *Hatfield B.*, 1992, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings* (Addison–Wesly, Readwood City, CA).
— *Howe P. i R. Tucker*, 1978, “Local supersymmetry in (2+1) dimensions. II. An action for a spinning membrane”, J. Math. Phys. **19**, 981.
— *Hwang S.*, 1983, “Covariant quantization of the string in dimensions $D \leq 26$ using a Becchi–Rouet–Stora formulation”, Phys. Rev. **D28**, 2614.
— *Itoh K., T. Kugo, H. Kunimoto i H. Ouguri*, 1986, “Gauge Invariant Local Action of String Field from BRST”, Prog. Theor. Phys. **75**, 162.
— *Kaku M.*, 1985, “Introduction to the field theory of strings”, preprint CCNY–HEP–11.
— *Kaku M.*, 1986, “Geometric derivation of string field theory from first principles. 1. Curvature tensor and the tensor calculus”, Nucl. Phys. **B267**, 125.
— *Kaku M.*, 1988, *Introduction to Superstrings* (Springer, New York).
— *Kaku M. i K. Kikkawa*, 1974, “Field theory of relativistic strings. I. Trees, II. Loops and Pomerons”, Phys. Rev. **D10**, 1110, 1823.

— *Kato M. i K. Ogawa*, 1983, "Covariant quantization of string based on BRS invariance", Nucl. Phys. **B212**, 443.
— *Kazama Y.*, 1986, "An introduction to covariant superstring field theory", preprint CERN–TH 4518/86.
— *Kikkawa K. i M. Yamasaki*, 1986, "Can the Membrane be a Unification Model?", preprint OU–HET 94, Osaka University.
— *Kugo T. i S. Uehara*, 1982, "General procedure of gauge fixing based on BRS invariance principle", Nucl. Phys. **B197**, 378.
— *Mandelstam S.*, 1974, "Dual–resonance model", Phys. Rep. **C13**, 259.
— *Nambu, Y.*, 1970, lekcije na simpozijumu u Kopenhagenu (nepublikovano).
— *Neveu A. i J. Scherk*, 1972, "Connection between Yang–Mills fields and dual models", Nucl. Phys. **B36**, 155.
— *Neveu A. i J. H. Schwarz*, 1971, "Factorizable dual model of pions", Nucl. Phys. **B31**, 86;
— Neveu A., J. H. Schwarz i P. West, 1985, "Gauge symmetries of the free bosonic string field theory", Phys. Lett. **B164**, 51.
— Neveu A. i P. West, 1985, "Gauge symmetries of the free supersymmetric string field theories", Phys. Lett. **B165**, 63.
— Neveu A. i P. West, 1986, "The interacting gauge covariant bosonic string", Phys. Lett. **B168**, 192.
• *Peskin M.*, 1985, "An Introduction to the Theory of Strings", preprint SLAC–PUB–3821.
— *Polyakov A. M.*, 1981, "Quantum geometry of bosonic string", i "Quantum geometry of fermionic string", Phys. Lett. **B103**, 207, 211.
— *Polyakov A. M.*, 1987, "Quantum Gravity in Two Dimensions", Mod. Phys. Lett. **A2** 893.
— *Polyakov A. M.*, 1987, *Gauge Fields and Strings* (Harwood, Chur).
— *Ramond P. M.*, 1971, "Dual theory for free fermions", Phys. Rev. **D3**, 2415.
• *Scherk J.*, 1975, "An introduction to the theory of dual models and strings", Rev. Mod. Phys. **47**, 123.
— *Scherk J. i J. Schwarz*, 1974, "Dual models for non–hadrons", Nucl. Phys. **B81**, 118.
— *Schwarz J.*, 1982, "Superstring theory", Phys. Reports **89**, 223.
— *Schwarz J.*, 1985a, "Superstrings", u: *Symposium on anomalies, Geometry, Topology*, ed. W. Bardeen i A. White (World Scientific, Singapore).
— *Schwarz J.*, editor, 1985b, *Superstrings* (The first 15 years of Superstring Theory), 2 toma, (World Scientific, Singapore).
— *Siegel W.*, 1985, "Covariantly second–quantized string II, III", Phys. Lett. **B151**, 391, 396.
— *Siegel W. i B. Zwiebach*, 1986, "Gauge string fields", Nucl. Phys. **B263**, 105.

— *Siegel W.*, 1988, *Introduction to String Field Theory* (World Scientific, Singapore).
— *Stelle K.*, 1977, "Renormalization of higher–derivativr quantum gravity", Phys. Rev. **D16**, 953.
— *Taylor J. G.*, 1986, "A survey of string and superstring theories", Lectures at the 22nd Karpacz Winter School of Theoretical Physics "On fields and geometry", Karpacz, Poland, Feb. 17 – Mar. 1.
— *Thorn C.*, 1985, "Introduction to the Theory of Relativistic Strings", u: *Superstrings, Supergravity and Unified Theories*, ed. G. Furlan i dr. (World Scientific, Singapore).
— *van Nieuwenhuizen P.*, 1973, "On ghost–free tensor Lagrangians and linearized gravitation", Nucl. Phys. **B60**, 478.
— *Veneziano G.*, 1968, "Construction of a crossing–symmetric, Regge–behaved amplitude for linearly rising trajectories", Nuovo Cim. **A57**, 190.
— *Virasoro M. A.*, 1970, "Subsidiary conditions and ghosts in dual–resonance models", Phys. Rev. **D1**, 2933.
— *Weinberg S.*, 1987, "Covariant Path–Integral Approach to String Theory", Lectures at the 3^{rd} Jerusalem Winter School of Theoretical Physics, University of Texas preprint UTTG–17–87.
— *West P.*, 1985, "Introduction to gauge covariant string field theory", preprint CERN–TH 4304/85.
— *West P.*, 1986, "Gauge–covariant string field theory", preprint CERN–TH 4460/86.
• *West P.*, 1986, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity* (World Scientific, Singapore).
— *West P.*, 1989, "An introduction to string theory", preprint CERN–TH 51565/88; Acta Phys. Pol. **B20** 471.
— *Witten E.*, 1986, "Non–commutative geometry and string field theory", Nucl. Phys. **B268**, 253.

Literatura uz Dodatak

— *Abers E. S. i B. W. Lee*, 1973, "Gauge theories", Phys. Reports **C9**, 1.
— *Anderson J. L.*, 1970, "Scale Invariance of the Second Kind and the Brans–Dicke Scalar–Tensor Theory", Phys. Rev. **D3**, 1689.
— *Ashtekar A.*, 1988, *New Perspectives in Canonical Quantum Gravity* (Bibliopolis, Napoli).
— *Ashtekar A.*, 1991, *Non–perturbative canonical quantum gravity* (notes prepared in collaboration with R. S. Tate) (World Scientific, Singapore).
— *Barut A. O. i R. Raczka*, 1977, *Theory of group representations and applications* (PWN — Polish Scientific Publishers, Warszawa).
— *Berestecki V. B., E. M. Lifšić i L. P. Pitaevski*, 1980, *Kvantovaja elektrodinamika* (Nauka, Moskva).

— *Blagojević M. i M. Vasilić*, 1987, “Constraint algebra in Poincaré gauge theory”, Phys. Rev. **D36**, 1679.
— *Brans C. i R. Dicke*, 1961, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”, Phys. Rev. **124**, 925.
— *Canuto V., P. Adams, S. H. Hsieh i E. Tsiang*, 1976, “Gauge covariant theory of gravitation”, Institute for space studies studies preprint, New York.
— *Carruthers A.*, 1972, *Spin and Isospin in Particle Physics* (Gordon and Breach, New York).
— *Castellani L.*, 1982, “Symmetries of constrained Hamiltonian systems”, Ann. Phys. (N. Y.) **143**, 357.
— *Choquet–Bruhat Y., C. de Witt–Morette i M. Dillard–Bleick*, 1977, *Analysis, Manifolds and Physics* (North Holland, Amsterdam).
— *Deser S.*, 1970, “Scale Invariance and Gravitational Coupling”, Ann. Phys. (N.Y.) **59**, 248.
— *Dirac P. A. M.*, 1964, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York).
— *Dirac P. A. M.*, 1973, “Long range forces and broken symmetries”, Proc. Roy. Soc. (London) **A333**, 403.
— *Dubrovin B., S. Novikov i A. Fomenko*, 1979, *Sovremennaja geometrija* (Nauka, Moskva).
— *Eguchi T., P. B. Gilkey i A. J. Hanson*, 1980, “Gravitation, gauge theories and differential geometry”, Phys. Rep. **C66**, 213.
— *German G.*, 1985, “Brans–Dicke–type models with torsion”, Phys. Rev. **D32**, 3307.
— *Gürsey F.*, 1964, “Introduction to the De Sitter Group”, u: *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, ed. F. Gürsey (Gordon and Breach, New York).
— *Horowitz G.*, 1991, “Ashtekar’s Approach to Quantum Gravity”, u: Proceedings of the Strings and Symmetries 1991 Conference (Stony Brook, 1991), University of California preprint UCSBTH–91–40.
— *Hsu J. P.*, 1979, “Gravity as Yang–Mills’ space–time gauge fields”, Space Sciences Laboratory Preprint No. 78–103, Huntsville, AL.
— *Inönü E.*, 1964, “Contractions of Lie Groups and their Representations”, u: *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, ed. F. Gürsey (Gordon and Breach, New York).
— *Kamimura K. i T. Fukuyama*, 1990, “Ashtekar’s formalism in first–order tetrad form”, Phys. Rev **D41**, 1885.
— *Kibble T. W. B.*, 1961, “Lorentz invariance and the gravitational field”, J. Math. Phys. **2**, 212.
— *Kibble T. W. B.*, 1965, “The quantum theory of gravitation”, u: *High Energy Physics and Elementary Particles* (IAEA, Vienna), str. 885.
— *Kibble T. W. B. i K. S. Stelle*, 1986, “Gauge Theories of Gravity and Supergravity”, u: *Progress in Quantum Field Theory*, ed. H. Ezava i S. Kamefuchi (Elsevier, Amsterdam), str. 57.

— *Kim Sung–Won*, 1986, "Brans–Dicke theory in general space–time with torsion", Phys. Rev. **D34**, 1011.
— *Luciani J. F.*, 1978, "Space–time geometry and symmetry breaking", Nucl. Phys. **B135**, 111.
— *MacDowel S. W. i F. Mansouri*, 1977, "Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity", Phys. Rev. Lett. **38**, 739.
— *Misner C. H., K. S. Thorne and J. A. Wheeler*, 1970, *Gravitation* (Freeman, San Francisco).
— *Mišenko A. S. i A. T. Fomenko*, 1980, *Kurs diferencijalnoj geometrii i topologii* (Moskovski univ., Moskva).
— *Ne'eman Y. i Dj. Šijački*, 1985, "SL(4,R) world spinors and gravity", Phys. Lett. **B157**, 275.
— *Ne'eman Y. i Dj. Šijački*, 1987, "Group–Topology, covariance and curved–space spinors", Int. J. Mod. Phys. **A2**, 1655.
— *Nikolić I.*, 1992,"Constraint algebra from local Poincaré symmetry", Gen. Rel. Gr. **24**, 159.
— *Nikolić I.*, 1995, "Dirac Hamiltonian formulation and algebra of the constraints in the Einstein–Cartan theory", Class. Quant. Grav. **12**, 3103.
— *Novožilov Yu. V.*, 1972, *Vvedenie v teoriju elementarnih častic* (Nauka, Moskva).
— *Peldan P.*, 1994,"Actions for gravity, with generalizations: a review", Class. Quantum Grav. **11**, 1087.
— *Pietenpol J. L., R. Incoul i D. Speiser*, 1974, "Remarks on Dirac's New Theory", Phys, Rev. Lett. **33**, 387.
— *Rovelli C.*, 1991, "Ashtekar's formulation of General Relativity and loop–space non–perturbative quantum gravity: a report", Class. and Quantum Grav. **8**, 1613.
— *Smalley L.*, 1986, "Brans–Dicke–type models with nonmetricity", Phys. Rev. **D33**, 3590.
— *Smollin L.*, 1992, "Recent developments in nonperturbative quantum gravity", Syracuse University preprint SU–GP–92/2–2.
— *Stelle K. S. i P. C. West*, 1979, "De Sitter gauge invariance and the geometry of the Einstein–Cartan theory", J. Phys. **A12**, 205.
— *Stelle K. S. i P. C. West*, 1980, "Spontaneously broken de Sitter geometry and the gravitational holonomy group", Phys. Rev. **D21**, 1466.
— *Teitelboim C.*, 1980, "The hamiltonian structure of space–time", u: *General Relativity and Gravitation* — One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein, vol. I, ed. A. Held (Plenum Press, New York).
— *Townsend P. K.*, 1977, "Small–scale structure of spacetime as the origin of the gravitational constant", Phys. Rev. **D15**, 2795.
— *Utiyama R.*, 1956, "Invariant theoretical interpretation of interactions", Phys. Rev. **101**, 1597.

— *Van Dam H.*, 1974, *Theory of Gravity* (ITP–University of Nijmegen, Nijmegen).
— *Weinberg S.*, 1964, "Photons and Gravitons in S–matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass", Phys. Rev. **B135**, 1049.
— *Weinberg S.*, 1972, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York).
— *West P. C.*, 1978, "A geometric gravity lagrangian", Phys. Lett. **B76**, 569.
— *Wyborn G. B.*, 1973, *Classical Groups for Physicists* (John Willey and Sons, New York).
— *Yang C. N., i R. Mills*, 1954, "Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance", Phys. Rev. **96**, 191.
— *Zee A.*, 1981, "Grand Unification and Gravity — Selected Topics", Proceedings of the Fourth Kyoto Summer Institute on Grand Unified Theories and Related Topics, Kyoto, Japan, June – July, 1981, ed. M. Konuma i T. Maskawa (World Scientific, Singapore).

INDEKS POJMOVA

INDEKS IMENA

Ovde ćemo navesti imena autora koji su pomenuti u osnovnom tekstu, i naznačiti one predmete njihovog istraživanja koji su direktno povezani sa sadržajem ove knjige.

Abel (N. H. Abel, 1802–1829); Abelove grupe.
Ajnštajn (A. Einstein, 1879–1955); specijalna i opšta teorija relativnosti.
Aristarh sa Samosa (320–250 pre n. e.); helenski astronom.
Aristotel iz Stagira (384–322 pre n. e.); helenski filozof i prirodnjak.
Aštekar (A. Ashtekar); kompleksna formulacija gravitacije.

Belinfante (F. Belinfante); tenzor energije–impulsa.
Bjanki (L. Bianchi, 1856–1928); Bjankijev identitet.
Bone (O. Bonnet, 1819–1892); neeuklidska geometrija.
Borel (E. Borel, 1871–1956); matematička analiza.
Boze (S. N. Bose, 1894–1974); statistika identičnih čestica.
Brahe (T. Brahe, 1546–1601); merenje kretanja planeta.
Brans (C. Brans); skalarno–tenzorska teorija gravitacije.

Dekart (R. Descartes, 1596–1650); koordinatni sistem, Dekartov.
Deser (S. Deser); kanonska formulacija OTR, konformna simetrija.
de Siter (W. de Sitter, 1872–1934); de Siterova grupa.
Diki (R. H. Dicke); skalarno–tenzorska teorija gravitacije.
Dirak (P. A. M. Dirac, 1902–1984); Dirakova jednačina, sistemi sa vezama.

Etveš (L. Eötvös, 1848–1919); provera principa ekvivalencije.
Euklid (oko 365 – 300 pre n. e.); helenski matematičar, osnivač geometrije.

Fajnman (R. Feynmann, 1918–1988); kvantna teorija polja, gravitacija.
Fermi (E. Fermi, 1901–1954); statistika identičnih čestica.
Filolaj iz Krotona (V vek pre n. e.); helenski astronom, pitagorejac.
Furije (J. Fourier, 1768–1830); Furijeov red.

Galilej (G. Galilei, 1564–1642); zakoni kretanja, princip relativnosti.
Gaus (K. F. Gauss, 1777–1855); neeuklidska geometrija.
Goldston (J. Goldstone); spontano narušenje simetrije.
Gordon (W. Gordon, 1893–1940); kvantna teorija.

OZNAKE I KONVENCIJE

Sve oznake i konvencije su definisane u samom tekstu knjige, na mestu gde se prvi put pojavljuju. U narednom spisku su navedena značenja nekih pogodnih skraćenica, i cesto korišćenih simbola i konvencija.

Skraćenice:

ADM	Arnovit–Dezer–Mizner
AK	Ajnštajn–Kartan
BD	Brans–Diki
KK	Kaluca–Klajn
OTR	Opšta teorija relativnosti
PE	Princip ekvivalencije
PK	Princip kovarijantnosti
PK	Prve klase
PR	Princip relativnosti
PZ	Puasonova zagrada
RS	Referentni sistem
SKT	Specijalne konformne transformacije
SS	supersimetričan(na)
STR	Spec. teorija relativnosti
TEI	Tenzor energije–impulsa
TP	Teorija polja

X_d — d–dimenziona diferencijabilna mnogostrukost, $d = 4 + D$.

M_d — d–dimenzioni Minkovskijev prostor sa metrikom $\boldsymbol{\eta} = (+1, -1, ..., -1)$.

Indeksi:

Po ponovljenim indeksima se sumira.

$i, j, k, ...$ — Lokalni Lorencovi indeksi u X_4, uzimaju vrednosti $0, 1, 2, 3$; odgovarajuće koordinate su x^i.

$\mu, \nu, \lambda, ...$ — Koordinatni indeksi u X_4, uzimaju vrednosti $0, 1, 2, 3$; koordinate su x^μ.

$a, b, c, ...$ — Lokalni Lorencovi indeksi prostornog tipa u X_4, uzimaju vrednosti $1, 2, 3$.

$\alpha, \beta, \gamma, ...$ — Koordinatni indeksi prostornog tipa u X_4, uzimaju vrednosti $1, 2, 3$.

$I, J, K, ...$ — Lokalni Lorencovi indeksi u X_5, uzimaju vrednosti $0, 1, 2, 3, 5$; koordinate su z^I.

$M, N, L, ...$ — Koordinatni indeksi u X_5, uzimaju vrednosti $0, 1, 2, 3, 5$; koordinate su $z^M = (x^\mu, y)$ (pri $d > 5$, y postaje y^α).

$\alpha, \beta, \gamma, ...$	Koordinatni indeksi u X_2 (struna), uzimaju vrednosti $0, 1$; koordinate su $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$.
$a, b, c, ...$	Indeksi unutrašnje grupe, uzimaju vrednosti $1, 2, ..., n$.
$\alpha, \beta, \gamma, ...$	Indeksi koordinata (parametara) unutrašnje grupe, uzimaju vrednosti $1, 2, ..., n$.
$a, \dot{a}, ...$	Dvodimenzioni spinorski indeksi, uzimaju vrednosti $1, 2; \dot{1}, \dot{2}$.
	Simetrizacija i antisimetrizacija: $X_{(ij)} = \frac{1}{2}\big(X_{ij} + X_{ji}\big), \quad X_{[ij]} = \frac{1}{2}\big(X_{ij} - X_{ji}\big)$.

Tenzorska i spinorska polja:

φ, ϕ	Skalarno polje.
φ_μ, A_μ	Vektorsko polje.
$\varphi_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$	Simetričan tenzor.
$b_{\mu\nu}$	Antisimetričan tenzora, jačina polja: $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu b_{\nu\lambda} +$ cikl. .
ψ, Ψ	Dirakovo polje, spin=1/2.
ψ_μ	Spin–vektor, Rarita–Švingerovo polje, spin=3/2.
$\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$	Paulijeve spinske matrice, $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$.
γ^μ, γ^M	Dirakove matrice u $d = 4$ i $d > 4$.
$D, D_{\mu,\nu}$	Propagatori skalarnog i vektorskog polja.
$D_{\mu\nu,\lambda\rho}$	Propagator tenzorskog polja.
$e_\mu, e_{\mu\nu}$	Vektori polarizacije, maseno vektorsko i tenzorsko polje.
$\varepsilon_\mu, \varepsilon_{\mu\nu}$	Vektori polarizacije, bezmaseno vektorsko i tenzorsko polje.

Potpuno antisimetrični simboli:

ε^{ijkl}	Potpuno antisimetričan tenzor u M_4, $\varepsilon^{0123} = +1$.
ε^{abc}	$\varepsilon^{abc} \equiv \varepsilon^{0abc}$, $\varepsilon_{abc} \equiv \varepsilon_{0abc}$, odakle sledi $\varepsilon^{123} = +1$, $\varepsilon_{123} = -1$.
ϵ^{abc}	Potpuno antisimetričan tenzor, euklidski, $\epsilon^{123} = \epsilon_{123} = +1$.

Geometrijski objekti u X_4:

$\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_i$	Koordinatna i Lorencova baza tangentnog prostora, $\boldsymbol{e}_\mu = e^i{}_\mu \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_i = e_i{}^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ (alternativno: $e^i{}_\mu \to b^i{}_\mu$, $e_i{}^\mu \to h_i{}^\mu$).
$\boldsymbol{g}$	Metrički tenzor, $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu, \quad g_{ij} \equiv \eta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = (+1, -1, -1, -1)$.
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$	Skalarni proizvod vektora $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \eta_{ij} u^i v^j = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$.
$\omega^{ij}{}_\mu$	Spinska povezanost (koneksija), alternativna oznaka: $A^{ij}{}_\mu$.
$D_\mu(\omega)$	ω–kovarijantni izvod, $D_\mu(\omega) u^i = \partial_\mu u^i + \omega^i{}_{s\mu} u^s$, alternativna oznaka: $\nabla_\mu(\omega)$.
$D_k(\omega)$	$D_k(\omega) = e_k{}^\mu D_\mu(\omega)$, alternativna oznaka: $\nabla_k(\omega)$.
$\Gamma^\lambda_{\rho\mu}$	Povezanost u koordinatnoj bazi.

$D_\mu(\Gamma)$ Γ–kovarijantni izvod, $D_\mu(\Gamma)u^\lambda = \partial_\mu u^\lambda + \Gamma^\lambda_{\rho\mu}u^\rho$,
alternativna oznaka: $\nabla_\mu(\Gamma)$.

$\left\{ {\lambda \atop \rho\mu} \right\}$ Kristofelov simbol.

$Q_{\mu\nu\lambda}$ Nemetričnost, $Q_{\mu\nu\lambda} = -D_\mu(\Gamma)g_{\nu\lambda}$.

φ_μ Vajlov vektor, $D_\mu(\Gamma)g_{\nu\lambda} = \varphi_\mu g_{\nu\lambda}$.

$R^{ij}{}_{\mu\nu}(\omega)$ Tenzor krivine, $R^{ij}{}_{\mu\nu}(\omega) = \partial_\mu\omega^{ij}{}_\nu + \omega^i{}_{s\mu}\omega^{sj}{}_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)$.

$T^i{}_{\mu\nu}(e)$ Tenzor torzije, $T^i{}_{\mu\nu}(e) = \nabla_\mu(\omega)e^i{}_\nu - \nabla_\nu(\omega)e^i{}_\mu$.

$F_{\mu\nu}(\varphi)$ Vajlova krivina, $F_{\mu\nu}(\varphi) = \partial_\mu\varphi_\nu - \partial_\nu\varphi_\mu$.

Lokalne simetrije u X_4:

$A^a{}_\mu$ Gradijentni potencijal neabelove grupe simetrije.

$F^a{}_{\mu\nu}$ Neabelova jačina polja, $F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + f_{bc}{}^a A^b{}_\mu A^c{}_\nu$.

$A^{ij}{}_\mu, b^i{}_\mu$ Kompenzujuća polja lokalno invarijantne Poenkareove teorije.

$F^{ij}{}_{\mu\nu}(A)$ Lorencova jačina polja.

$F^i{}_{\mu\nu}(b)$ Translaciona jačina polja.

$A^{ij}{}_\mu, b^i{}_\mu, B_\mu$ Kompenzujuća polja lokalno invarijantne Vajlove teorije.

$F_{\mu\nu}(B)$ Dilataciona jačina polja.

Geometrijski objekti u X_d ($d > 4$ ili $d = 2$):

$\hat{\boldsymbol{e}}_M, \hat{\boldsymbol{e}}_I$ Koordinatna i Lorencova baza tangentnog prostora,
$\hat{\boldsymbol{e}}_M = b^I{}_M\hat{\boldsymbol{e}}_I, \quad \hat{\boldsymbol{e}}_I = h_I{}^M\hat{\boldsymbol{e}}_M$.

$\hat{\boldsymbol{g}}$ Metrički tenzor,
$\hat{g}_{MN} = \hat{\boldsymbol{e}}_M\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_N, \quad \hat{g}_{IJ} \equiv \eta_{IJ} = \hat{\boldsymbol{e}}_I\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_J = (+1, -1, ..., -1)$.

$\hat{A}^{IJ}{}_M$ Spinska povezanost (koneksija).

$\hat{\Gamma}^L_{RM}$ Povezanost u koordinatnoj bazi.

$\hat{R}^{IJ}{}_{MN}$ Tenzor krivine.

$\hat{T}^I{}_{MN}$ Tenzor torzije.

γ Indukovana metrika u X_2 (struna), $\gamma_{\alpha\beta}$.

Prostori nad X_4:

L_4 linearno povezan prostor, $L_4 = (X_4, \Gamma) = (X_4, \omega)$.

Y_4 Vajl–Kartanov prostor.

W_4 Vajlov prostor.

U_4 Riman–Kartanov prostor.

V_4 Rimanov prostor.

T_4 Vajcenbekov prostor.

Konstante:

c Brzina svetlosti, $c = 3,00 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1}.

G Njutnova grav. konstanta, $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ cm^3 gr^{-1} sec^{-2}.

$\hbar$ Plankova konstanta, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ erg sec.

κ $\kappa = 8\pi G/c^2 \approx 1,86 \cdot 10^{-27}$ cm gr^{-1}.

l_P Plankova dužina, $l_P = (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 1,61 \cdot 10^{-33}$ cm.

E_P Plankova energija, $E_P = l_P c^4/G \approx 1,22 \cdot 10^{19}$ GeV.