Увод у дисктретну математику

Професор : Рака Јовановић
Асистент : Јелена Јовановић

Потреба за математиком на компјутерским наукама

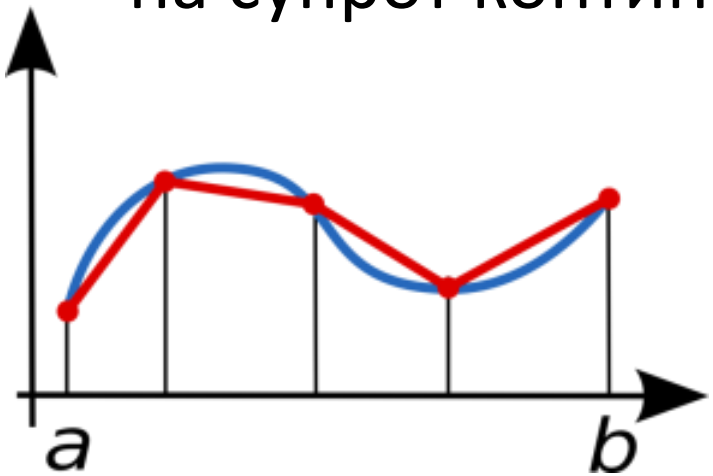
- Програмер који зна математику је бољи од оног који је не зна
- Математика је прецизан језик
- Програмирање је прецизан начин за опис процеса извршавања
- Математичка писменост омогућује читање већ постојећих решења проблема, и дефинисање нових на прецизан начин

Преглед курса

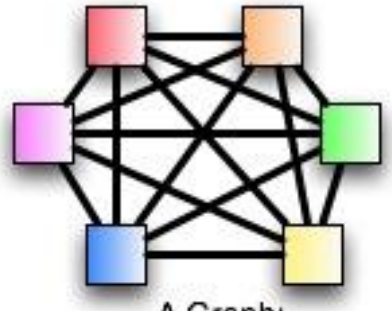
- Логика и Предикатска логика
- Скупови
- Функције и релације
- Формални математички доказ
- Рекурзивне дефиниције, добра уређења
- Аргументи пребројавања
- Аритметичка и геометријска средина

Појам дискретне математике

- Део математике који се бави проучавањем дискретних скупова на супрот континуалним



A topological space:
the 2-Torus



A Graph:
the 6-clique

- математичке логике, теорије скупова, опште алгебре, комбинаторике, дискретне вероватноће, теорије графова, теорије кодова, алгоритамске структуре

Математичка логика

- Логика нам звучи као интуитивна и наивна
- Постоји потреба да се формализује
- Основна логика се не доказује већ се само дефинише и прихвата и користи у осталим областима математике за доказивања
- Булова Логика (Џорџ Бул 1815 - 1864)
- Главне области су исказна и предикатска логика

Исказна логика

- Исказ може бити тачан или не тачан (истина или лаж)

  Рака је студент (Неистина, $\perp$, 0)

  Рака је професор (Истина, T, 1)

- Искази се обично обележавају са малим словима латинице
  - p, q, r, s...

Логичке операције

- Пресликавање

$$\{1,0\}\times\{1,0\}\rightarrow\{1,0\}$$

- Служе да се лакше опишу ствари, односно кад прост исказ није довољан

$p\wedge q$ = Ненад је добра прилика за брак

p = Ненад је одслужио војску

q = Ненад је богат

- Логичких операција има 16, само се неке уобичајено користе

Коњукција (И)

Коњукција исказа **p** и **q** , ознака је **p∧q,** а чита се **“p И q”**

p	**q**	**p∧q**
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дисјункција (Или)

Дисјункција исказа **p** и **q** , ознака је **p∨q,** а чита се **“p ИЛИ q”**

p	**q**	**p∨q**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	**0**	**0**

p∨q = Ана има добар посао
p = Ана воли свој посао
q = Ана је добро плаћена

Импликација

Импликација исказа **p** и **q** , ознака је **p⇒ q,**
а чита се **“АКО p ОНДА q”**

p	**q**	**p ⇒ q**
1	1	1
1	**0**	**0**
0	1	1
0	0	1

p⇒q = Ако упишеш другу годину онда добијеш Порше Кајен
p = Уписао другу годину
q = Добио Порше Кајен

Еквиваленција

Еквиваленција исказа **p** и **q** , ознака је **p⇔ q,**
чита се **“АКО И САМО АКО p ОНДА q”**

p	**q**	**p ⇔ q**
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	0
0	**0**	**1**

Најлакше разумети као “исто је”

Негација

- Унарна операција
- Негација исказа **p**, у ознаци **¬p**,

  а чита се **НЕ p**

p	**¬p**
1	0
0	1

Приоритет логичких операција

Логички оператор	Приоритет
¬	**1(највећи)**
∨, ∧	2
⇔, ⇒	3

Укупан број могућих логичких операција

p	q	p * q
1	1	**1 или 0**
1	0	**1 или 0**
0	1	**1 или 0**
0	0	**1 или 0**

Табела има 4 реда сваки од њих може имати вредност 0 или 1 значи укупан број комбинација је

$$2*2*2*2 = 2^4 = 2^{2^2}$$

Исказне формуле

Дефиниција 1: Исказна слова су симболи: p, q, r,…, p_1, q_1, r_1,…, p_n, q_n, r_n

Дефиниција 2:

1. Исказна слова су исказне формуле
2. Ако су А и Б исказне формуле, онда су $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$,$(\neg A)$, исказне формуле
3. Исказне формуле могу се образовати једино помоћу коначног броја примена 1 и 2 ове дефиниције

Пример исказне формуле и њена валидација

p	**q**	**p∧q**	**(p∧q) ⇒p**
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Таутологије и контрадикције

1. Таутологија је исказна формула која за све вредности својих исказних слова има вредност Т

$$p \vee \neg p$$

1. Контрадикција је формула која увек има вредност ⊥

$$p \wedge \neg p$$

Основне логички закони

- Закон идемпотенције

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

- Закон двојне негације

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$

- Закон комутативности

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

- Асоцијативност

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

- Дистрибутивност

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$$

- Де Морганови закони

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

- Веза еквиваленције и импликације

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

- Веза имликације, дисјункције и коњукције

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg (\neg q \wedge p) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$$

Коњуктивна нормална форма

- **Дефиниција**: Формула је у коњунктивној нормалној форми (КНФ) ако представља коњункцију клауза, где је клауза дисјункција литерала (X или ¬ X)

$$(A_1 \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n) \wedge .. \wedge (A_1 \vee \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n)$$

- **Примери**

$$(A \vee \neg B \vee C) \wedge A$$

$$(\neg B \vee C) \wedge (A \vee C)$$

$$C \wedge \neg B \wedge A$$

Пример свођења на коњуктивну форму

$(p \Rightarrow q \wedge r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r)$ (конверзија импликације)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ (дистрибутивност $\vee$ и $\wedge$)

Дисјунктивна нормална форма

- **Дефиниција**: Формула је у дисјунктивној нормалној форми (ДНФ) ако представља дисјункцију клауза, где је клауза коњукција литерала (X или ¬ X)

$$(A_1 \wedge \neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n) \vee .. \vee (A_1 \wedge \neg A_1 \wedge \ldots \wedge \neg A_n)$$

- **Примери**

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee A \vee (\neg B \wedge C)$$

$$(\neg B \wedge C) \vee (A \wedge C)$$

$$\neg C \vee \neg B \vee A$$

Важност коњуктивних форми

- Употребом закона логике свака формула се може превести у овај облик
- Нормалне форме могу бити јако дугачке
- Изузетно је важна у аутоматском доказивању теорема
- Може оптимизовати време израчунавања код извршавања програма