Математички индукција

Професор: Рака Јовановић

Асистент: Јелена Јовановић

Још један погрешан доказ

- Доказати:

Ако n није позитивно, онда није позитивно ни n^2

- "Доказ":

Познато је да важи

$$(\forall n)(n > 0 \Longrightarrow n^2 > 0)$$

Пошто је $n < 0$ можемо закључити да n^2 није позитивно

- **<u>Грешка</u>** је што се не може из

$$(\forall n)\big(P(n) \Longrightarrow Q(n)\big)$$

- Закључити

$$(\forall n)\big(\neg P(n) \Longrightarrow \neg Q(n)\big)$$

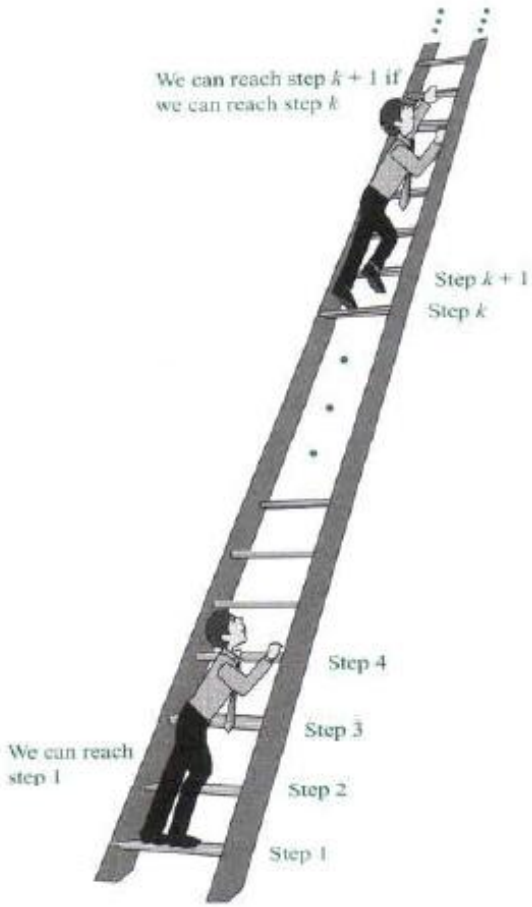
Матеметички доказ

- Постоји више различитих приступа доказивању: Директни доказ, Доказ Контрадикцијом
- Тешко је доказати неки исказ који има за основу
  - “Важи за свако целобројно X ”
- Често се доказ сводио на препознавање неке особине, односно “трик”
- Било би погодно да постоји неки једноставан систем

Идеја математичке индукције

- За мислите да испред себе имате бесконачне мердевине
- Да ли је могуће стићи до сваког нивоа степеница?
- Може се стати на најнижи јер је у нивоу пода
- Ако смо на k-том нивоу можемо прећи на следећи јер није високо
- Значи

1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6



Математичка индукција у језику логике

$$P(1) \wedge (\forall k)\big(P(k) \Rightarrow P(k+1)\big) \Rightarrow (\forall n)P(n)$$

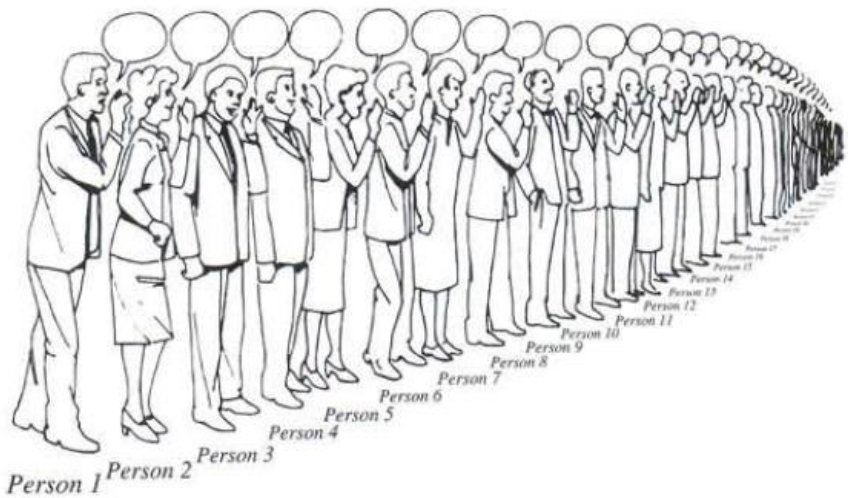
- $P(K)$ се назива хипотезом математичке индукције
- Важно је да је $P(k)$ тачно за сваку вредност k јер у супротном појавиће се у неком кораку

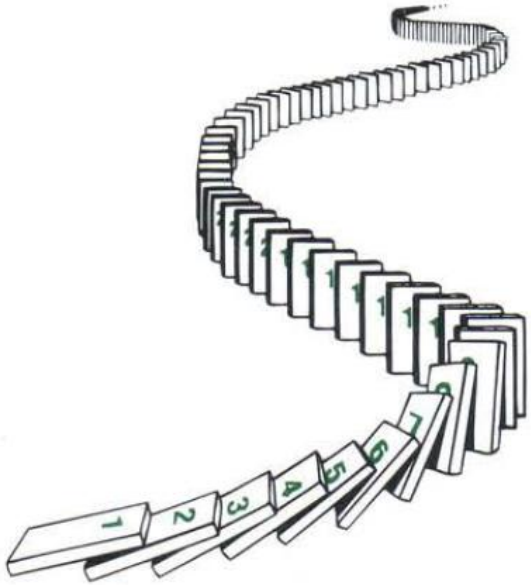
$$\perp \Longrightarrow \mathrm{P(k+1)}$$

- А овакво тврђење је тачно за било коју истинитосну вредност $P(k+1)$, па би се могло доказати било шта

У пракси

1. Докаже се да важи за P(1) Базни корак
2. Докаже се да је увек тачна следећа импликација $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, под претпоставком да је $P(k)$ тачно. индуктивни корак





- Докажимо да за сваку вредност $n \in \mathbb{N}$, важи P(n)

$$1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Доказ индукцијом
- Базни корак
  - $P(1)$ је тачно, јер $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- Претпоставимо да је тачно следеће тврђење за произвољно k

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

- Треба показати да ако је тачно P(k), тада је тачно и P(k+1)

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- Шта се може показати следећим поступком

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

- Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$, и $n \geq 4$ важи следећа неједнакост

$$2^n < n!$$

- Доказ индукцијом

$$P(n) \Leftrightarrow 2^n < n!$$

- Базни корак

$$P(4) \Leftrightarrow 2^4 < 4! \Leftrightarrow 16<4*3*2 \Leftrightarrow 16<24$$

- Индукцијска хипотеза
- $P(k)$ је тачна за свако k, односно

$$2^k < k!$$

- Доказ индукцијског корака

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k && \text{by definition of exponent} \\
&< 2 \cdot k! && \text{by the inductive hypothesis} \\
&< (k+1)k! && \text{because } 2 < k+1 \\
&= (k+1)! && \text{by definition of factorial function.}
\end{aligned}$$

- Математичку индукцију је могуће користити и ако не важи за баш све природне бројеве већ за све веће од неке вредности

Уопштење деморгановог закона

- Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$, и $n \geq 2$ важи

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

Где су сви $A_1, A_2, \ldots, A_n$подскупови истог универзалног скупа U

- Нека је P(n) задато скуповно тврђење
- Базни корак
- P(2) - $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$, је тачан јер представља раније доказиван Деморганов закон

- Претпоставимо да је тачна индуктивна хипотеза

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$$

- Докажимо индуктивни корак $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}} \quad \text{by the definition of intersection}$$

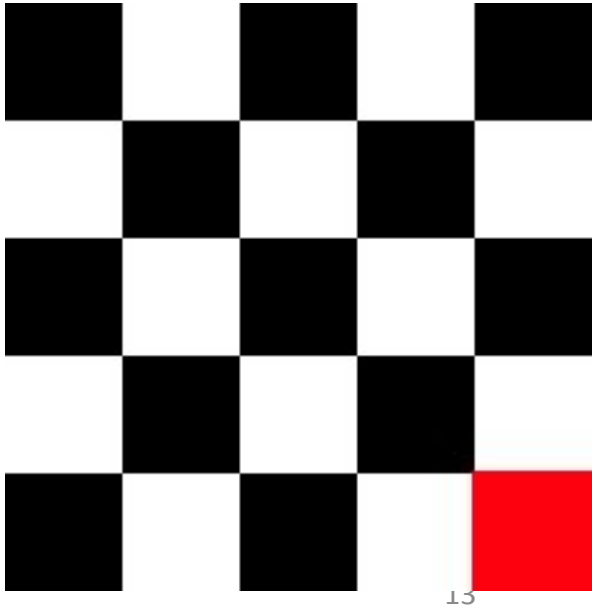
$$= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} \quad \text{by De Morgan's law (where the two sets are } \textstyle\bigcap_{j=1}^{k} A_j \text{ and } A_{k+1}\text{)}$$

$$= \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} \quad \text{by the inductive hypothesis}$$

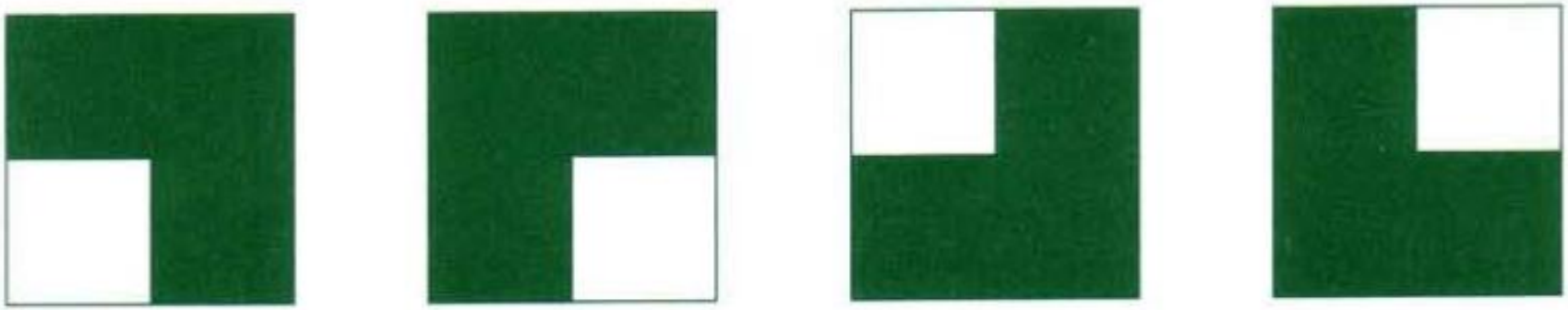
$$= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j} \quad \text{by the definition of union.}$$

Комплекснији пример

- Доказати да је сваку шаховску таблу димензија $2^n \times 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, и $n \geq 2$ из које је извађено произвољно поље, могуће употпуности покрити плочицама које су облика Г и има тачно три поља

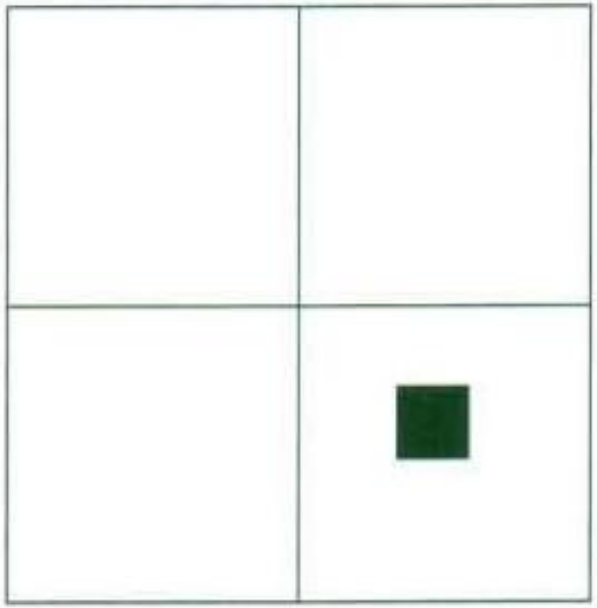


- Доказ индукцијом
- P(n) $\Longleftrightarrow$ шаховску таблу димензија $2^n \times 2^n$, из које је извађено произвољно поље, могуће употпуности покрити плочицама које су облика Г и има тачно три поља
- Базни корак
- P(2) је тачно јер за сваку могућу избачено поље је мочуће направити покривање



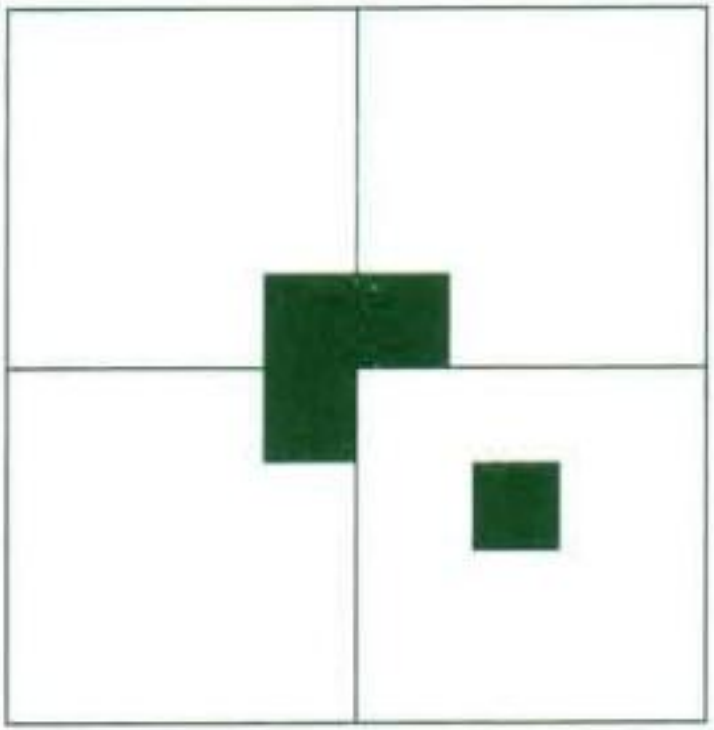
- Индукцијска хипотеза
- P(k) је тачно за све шаховске табле димензија $2^k \times 2^k$
- Докажимо индуктивни корак $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
- Шаховске таблу

димензије $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ је могуће поделити на четири табле димезија $2^k \times 2^k$ као на слици



- Ако избацимо једно поље имамо следећу ситуацију.
  - Једној од 4 мање табле фали једно поље, па је на њој могуће направити покривање на основу индукцијске хипотезе
  - Остаје нам још три потпуно пуне шаховске табе

- Избацимо из сваке од три табле избацимо по једно поље као на слици
- На основу индукцијске хипотезе, тачно је да се свака од ове три под шаховске табле може покрити плочицама облика Г са три поља



- Избачене плочице се могу покрити једном плочицом
- Значи успели смо да покријемо целу шаховску димензија $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, односно доказ је завршен

Грешке приликом употребе математичке индукција

- Сваки скуп од n различитих правих у равни, од којих ни које две нису паралелне, се секу у једној тачки
- “Доказ”
- $P(n)$ - скуп од n различитих правих у равни од којих ни које две нису паралелне се секу у једној тачки
- Базни корак
- $P(2)$ – је тачно јер две различити праве које нису паралелне се секу у тачно једној тачки по дефиницији

- Индукцијска хипотеза:
- P(k) - скуп од k различитих правих у равни од којих ни које две нису паралелне се секу у једној тачки
- Докажимо индуктивни корак $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
- Претпоставимо да имамо скуп од k+1 различите праве, од којих никоје две нису паралелне
- По индукцијској хипотези првих k правих се сече у некој тачки A_1
- По индукцијској хипотези последњих k правих се сече у некој тачки A_2
- Ако је $A_1 = A_2$ доказ је завршен

- Ако је $A_1 \neq A_2$,
  - онда све тачке које их садрже обе се поклапају јер имају две заједничке тачке
- Дошли смо до контрадикције јер смо претпоставили да су све праве међусобно различите.

“ДОКАЗ ЗАВРШЕН”

- Где је грешка?

Скривена грешка

- Када се пажљиво погледа доказ може се уочити да индуктивни корак не важи увек већ само за $n \geq 3$
- Прецизније није могуће доказати $P(2) \Rightarrow P(3)$
- У кораку 3 нам је циљ да докажемо да се 3 праве секу у једној тачки
- Значи прве две се секу у A_1, друге две у A_2
- Пошто једино друга права садржи обе тачке A_1 и A_2 оне не морају бити исте
- Значи предходни доказ није добар је индуктивни корак мора да важи за свако k

Јака математичка индукције

- Потребно је доказати да неко тврђење $P(n)$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$
- Довољно је следеће
  - Да важи за $P(1)$,
  - Да је следећа импликација тачна за свако k
  - $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{P(k)} \Rightarrow \mathrm{P(k+1)}$

Онда је $P(n)$ тачно за свако n

- Теоретски су обична и јака индукција екцивалентне у смислу да могу да докажу исте ствари
- Некад је лакше користити обичну а некад јаку

- Базни корак P(1)
- Индуктивна хипотеза

  Сви су тачни P(1), P(2), … , P(k)
- Индуктивни корак

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

- Јака индукција је доста флексибилнија, јер је индуктивна хипотеза општија односно имамо више ствари које можемо да користимо у доказу

Тривијалан пример

- Сетимо се бесконачних мердевина
- Рецимо да P(k) значи да можемо стићи до k-тог степеника
- Претпоставимо да можемо стићи до првог и другог нивоа мердевина. Затим претпоставимо да ако смо на произвољном нивоу k, да можемо стићи до нивоа k+2
- Како доказати да можемо стићи до сваког нивоа?
- Тешко је доказати обичном индукцијом, јер треба доказати корак $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Доказ јаком индукцијом

- Базични корак

  P(1), је тачно на основу претпоставке
- Индуктивна хипотеза

  Можемо стићи до 1,2,3,4..k нивоа
- Индуктивни корак

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge \mathrm{P(k)} \Rightarrow \mathrm{P(k+1)}$$

- Значи пошто важи P(k-1) и знамо да са нивоа k можемо стићи до нивоа k+1
- Односно

$$P(k-1) \Rightarrow P(k+1)$$

- Тврђење је доказано

- Сваки $n \in \mathbb{N}$, и $n \geq 2$ може се представити као производ простих бројева
- P(n) – $n \in \mathbb{N}$, и $n \geq 2$ може се представити као производ простих бројева
- Базни корак индукције

P(2) је тачно јер је 2 прост број

- Индукцијска хипотеза

Сви бројеви мањи од k се могу представити као производ простих бројева

- Индукцијски корак

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

- Постоје два случаја
  - k+1 је прост број и тада је доказ готов
  - k+1 није прост број
- Ако k није прост број, онда се може представити као производ два броја

$$k = a*b$$

- На основу особина множења знамо да је

$$a<k,\ b<k$$

- А на основу индукцијске хипотезе да се a,b могу представити као производ простих бројева
- Пошто је k=a*b доказ је готов