Добра уређења, Рекурзивно дефинисање

Професор: Рака Јовановић

Асистент: Јелена Јовановић

Особина доброг уређења

- Сваки не празан скуп природних бројева има најмањи елемент.
- Ова особина се често користи у директним доказима
- Може се показати да су математичка индукција, јака математичка индукција и особина доброг уређења еквивалентни у смислу шта се може доказати

Пример

- Доказати особину алгоритма дељења. За позитивне целе бројеве a, d постоје једнинствени не негативни цели бројеви q, r таквих да

$$0 \leq r < d$$

$$a = dq + r$$

- Доказ:
- Претпоставимо да је S скуп не негативних целих бројева у форми

$$S = \{x | x = a - dq \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\}$$

- S је не празан јер –dq се може направити произвољно великим

- На основу особине доброг уређења скупа S знамо да постоји минимални елементат q_0, за који важи

$$r = a - dq_0$$

- По предпоставци r је не негативан број, и

$$0 \leq r < d$$

- У супротном да не постоји такав r постојао би мањи број у S за који важи

$$a - d(q_0 + 1) = (a - dq_0) - d = r - d \geq 0$$

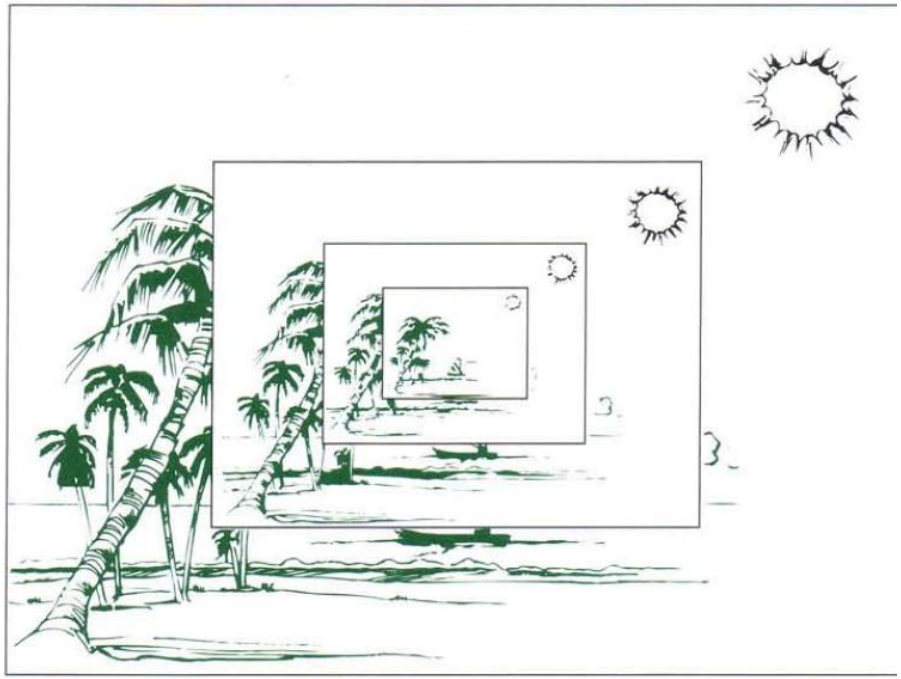
- Значи доказано је да постоје p, r са претостављаним особинам.
- Јединственост се доказује као у случају са ранијих предавања

- У турниру кружног робина сваки играч игра са сваким другим играчем тачно један меч.
- Рећи ћемо да играчи $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ прави циклус ако p_1 победи p_2, p_2 победи p_3,..., p_n победи p_1
- Доказати да ако постоји цикулус од $m \geq 3$ играча, тада међу њима постоји и група од тачно 3 играча који чине циклус
- Доказ
- Претпоставимо да не постоји у циклус од 3 играча

- Пошто у скупу од n играча постоји бар један циклус, на основу принципа доброг уређења међу њима постоји најкраћи рецимо да је он дужине k
- По претпоставци $k>3$
- Обратимо пажњу на прва три играча у минималном циклус p_1, p_2, p_3
- Случај1:
- p_3 је победио p_1 имамо циклус p_1, p_2 и p_3 односно контрадикција
- Случај2:
- p_1 је победио p_3. тада се из циклуса p_1, p_2, p_3…, p_k може избацити p_2 а да он остаје циклус са $k-1$ играча. Односно контрадикција

Рекурзивно дефинисање

- Некада је тешко дефинисати објекте експлицитно
- Некад их је лако дефинисати у неком односу на самог себе
- Овакав тип дефинисања се зове рекурзивно дефинисање



Рекурзивно дефинисање функција

- Постоје два корака да би се рекурзивно дефинисала функција којој је домен скуп прородних бројева
- Базни корак:

  Специфирати вредност функције за $f(0)$
- Рекурзивни корак:

  Дати правило како се из вредности функције за k добија вредност функције за $k+1$. Односно како се из $f(k)$ добија $f(k+1)$

- Функција је дата следећом рекурзивном формулом

$$f(0) = 3,$$
$$f(n+1) = 2f(n) + 3.$$

- Вредности за прва четри броја

$$f(1) = 2f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9,$$
$$f(2) = 2f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21,$$
$$f(3) = 2f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45,$$
$$f(4) = 2f(3) + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 93.$$

Рекурзивне дефиниције неких познатих функција

- Рекурзивно дефинисати $n!$.

$$F(0) = 1$$
$$F(n+1) = (n+1)F(n)$$

$$F(4) = 4 * F(3) = 4 * 3 * F(2) = 4 * 3 * 2 * F(1)$$
$$= 4 * 3 * 2 * 1 * F(0) = 24$$

- Рекурзивно дефинисати a^n.

$$F(0) = 1$$
$$F(n+1) = aF(n)$$

$$F(3) = aF(2) = a * a * F(1) = a * a * a * 1 = a^3$$

Фибоначијеви бројеви

- Фибоначијеви бројеви су дефинисани следећом рекурзивном формуло

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$
$$f(n+1) = f(n) + f(n-1)$$

$$f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1,$$
$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2,$$
$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3,$$
$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5,$$
$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8.$$

- Доказати да за свако $n > 3$, важи $f_n > \alpha^{n-2}$, где је

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Доказ се може извести употребом јаке индукције
- $P(n) - f_n > \alpha^{n-2}$
- Базни корак

$$\alpha < 2 = f_3, \qquad \alpha^2 = (3+\sqrt{5})/2 < 3 = f_4,$$

- $P(3), P(4)$ су тачни

- Индуктивни корак

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

- Приликом доказа за P(k+1), користиће се чињеница да је α, решење једначине

$$x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$$

$$\alpha^{k-1} = \alpha^2 \cdot \alpha^{k-3} = (\alpha + 1)\alpha^{k-3} = \alpha \cdot \alpha^{k-3} + 1 \cdot \alpha^{k-3} = \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}.$$

- На основу индуктивне хипотезе имамо

$$f_{k-1} > \alpha^{k-3}, \qquad f_k > \alpha^{k-2}.$$

- Односно

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} > \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} = \alpha^{k-1}.$$

- Доказ завршен јер тврђење важи за P(k+1)

Ламова теорема

- Нека су $a, b \in \mathbb{N}, a > b$. Тада је број дељења у Еуклидовом алгоритму за налажење највећег заједничког делиоца (нзд), мањи или једнак од 5 пута број цифара броја b

- $a = r_0, b = r_1$

- Еуклидов алгоритам
- Извршено је n

дељења

- r_n је нзд

$$
\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 & 0 \le r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 \le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n q_n .
\end{aligned}
$$

- По дефиницији сви $q_1, q_2, q_3, .., q_n \geq 1,$ односно $q_n > 2$, jer $r_n < r_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
r_n &\geq 1 = f_2, \\
r_{n-1} &\geq 2r_n \geq 2f_2 = f_3, \\
r_{n-2} &\geq r_{n-1} + r_n \geq f_3 + f_2 = f_4, \\
&\vdots \\
r_2 &\geq r_3 + r_4 \geq f_{n-1} + f_{n-2} = f_n, \\
b = r_1 &\geq r_2 + r_3 \geq f_n + f_{n-1} = f_{n+1}.
\end{aligned}
$$

- Одакле можемо закључити да ако је било више од n корака у Еуклидовом алгоритму $b > f_n$, односно

$$b > \alpha^{n-1} (\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{1})$$

Знамо да важи следећа бројевна једнакост

$$log_{10}\alpha = 0.208 > \frac{1}{5}$$

Коју можемо искористити на следећи начин

$$\log_{10} b > (n-1)\log_{10}\alpha > (n-1)/5.$$

Чињеница да $b < 10^k$, односно да b има највише k цифара,
је еквивалентно са $log_{10}b < k$

Одакле следи

$$n - 1 < 5k$$

И пошто је k целобројан имамо

$$n < 5k$$

Чиме је доказ завршен

Рекурзивно дефинисање скупова и структура

- Као што је могуће дефинисати функције рекурзивно, исто тако је могуће дефинисати и скупове
- Дефинише се исто базним и рекурзивним кораком
- Базни корак: Иницијални елементи
- Рекурзивни корак: Како се додају нови елементи на основу постојећих
- Може постојати и додатни корак
- Елиминациони корак: Како се избацују елементи из скупа на основу својих елемената

Тривијалан пример

- Претпоставимо да је скуп $S \subseteq \mathbb{N}$, дефинисан следећом ирекурзивном дефиницијом формулом
- Базни корак

$$S = \{3\}$$

- Рекурзивни корак

$$x \in S \wedge y \in S \Longrightarrow x + y \in S$$

- Пар корака (само се показују нови елементи)

1. 3+3 = 6, S={3, 6}
2. 3+6 = 9, 6+6=12 S={3, 6, 9,12}

.....

Дефинисање ниске

- Скуп свих ниски Σ^* над неком азбуком Σ се може дефинисати на следећи начин
- Базни корак:

$$\lambda \in \Sigma,\ \lambda \text{ представља празну ниску}$$

- Рекурзивни корак

$$w \in \Sigma^* \Rightarrow wx \in \Sigma^*, \text{ где је } x \in \Sigma$$

- Рекурзивно дефинисање дужине ниске $l(w)$
- Базни корак:

$$l(\lambda) = 0$$

- Рекурзивни корак:

$$\mathrm{l}(wx) = \mathrm{l}(w) + 1$$

Итеративни функцијски системи

(интересантне структуре)

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

scale by r

$$f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

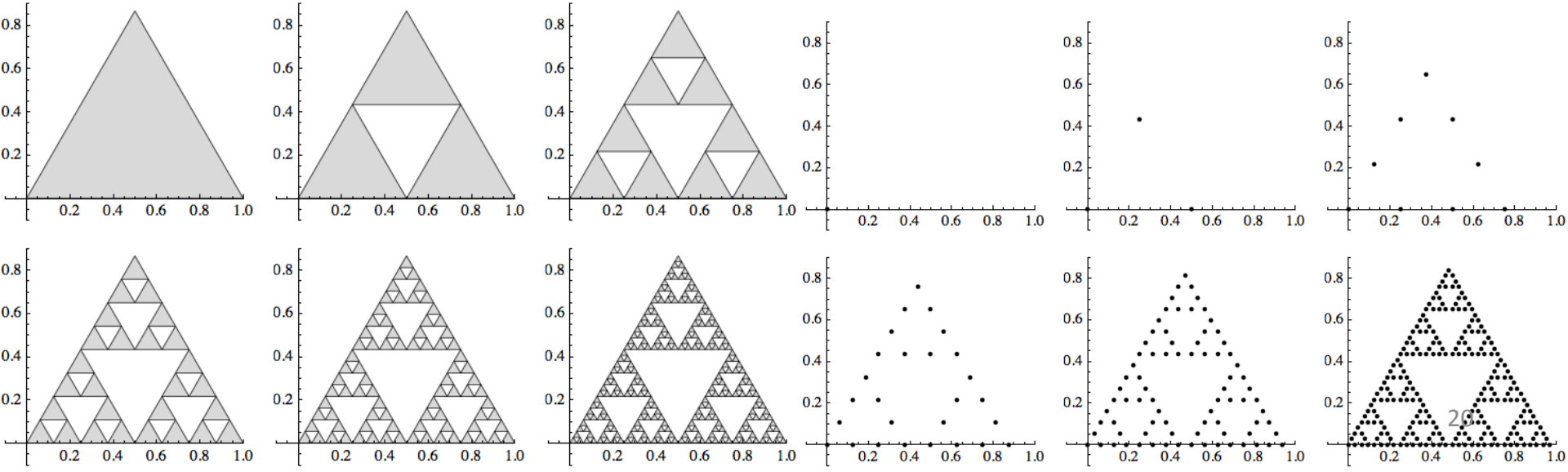
scale by r

$$f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.433 \end{bmatrix}$$

scale by r

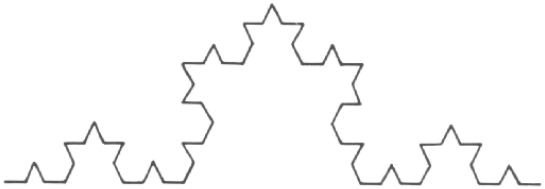
Тругао Серпинског, избацивањем елемената

Тругао Серпинског, додавањем елемената

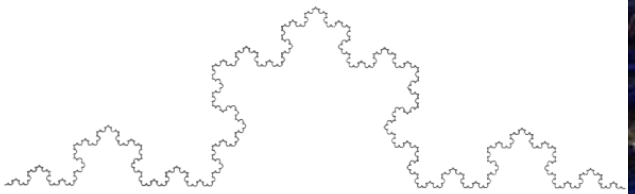


Stage 1

Stage 2

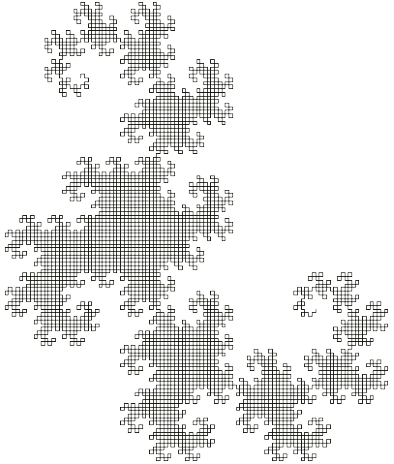


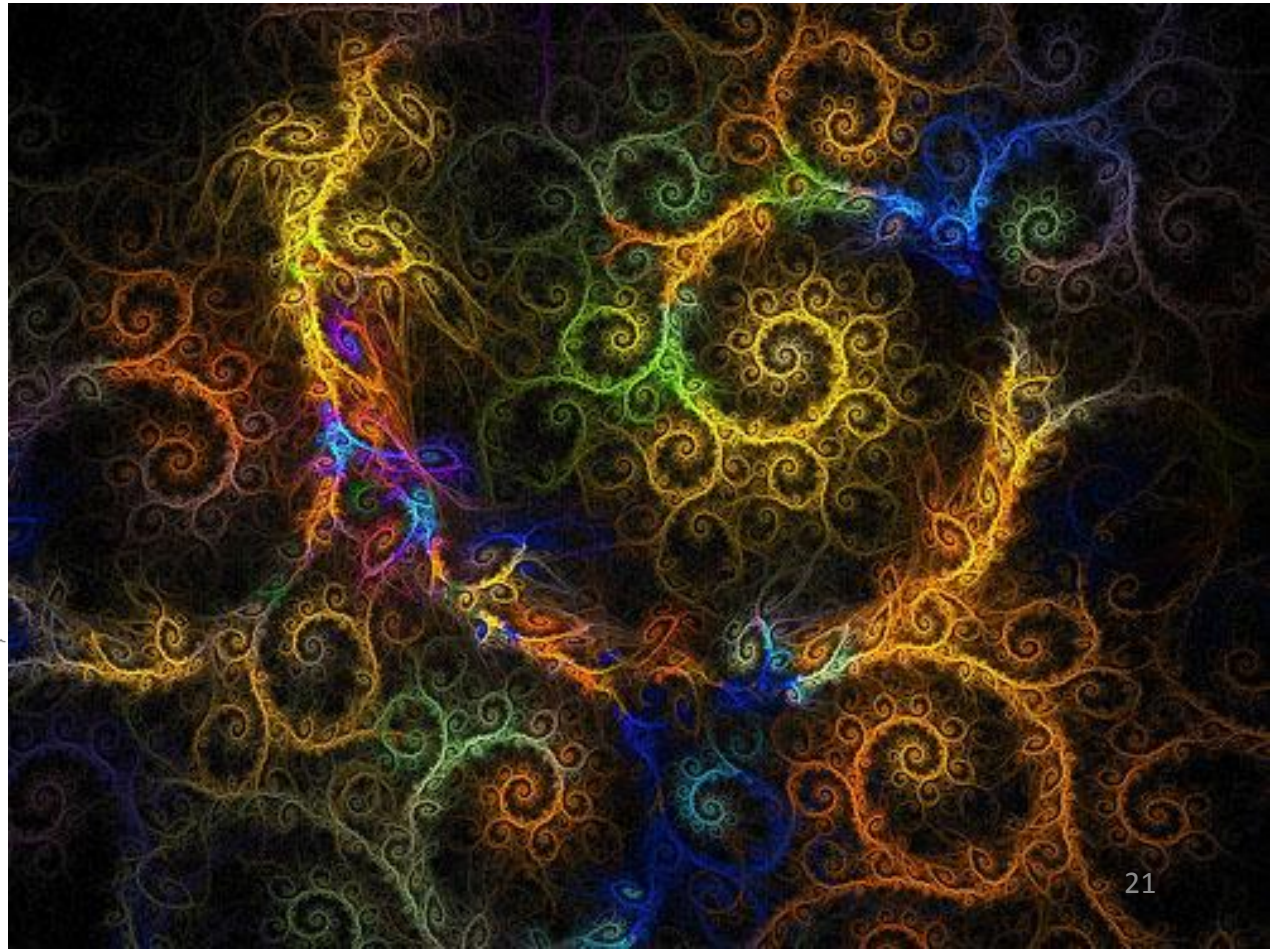
Stage 3



Stage 4

Adapted from Benoit Mandelbrot, *Fractals*.





Рекурзивно дефинисање структуре бинарног стабла

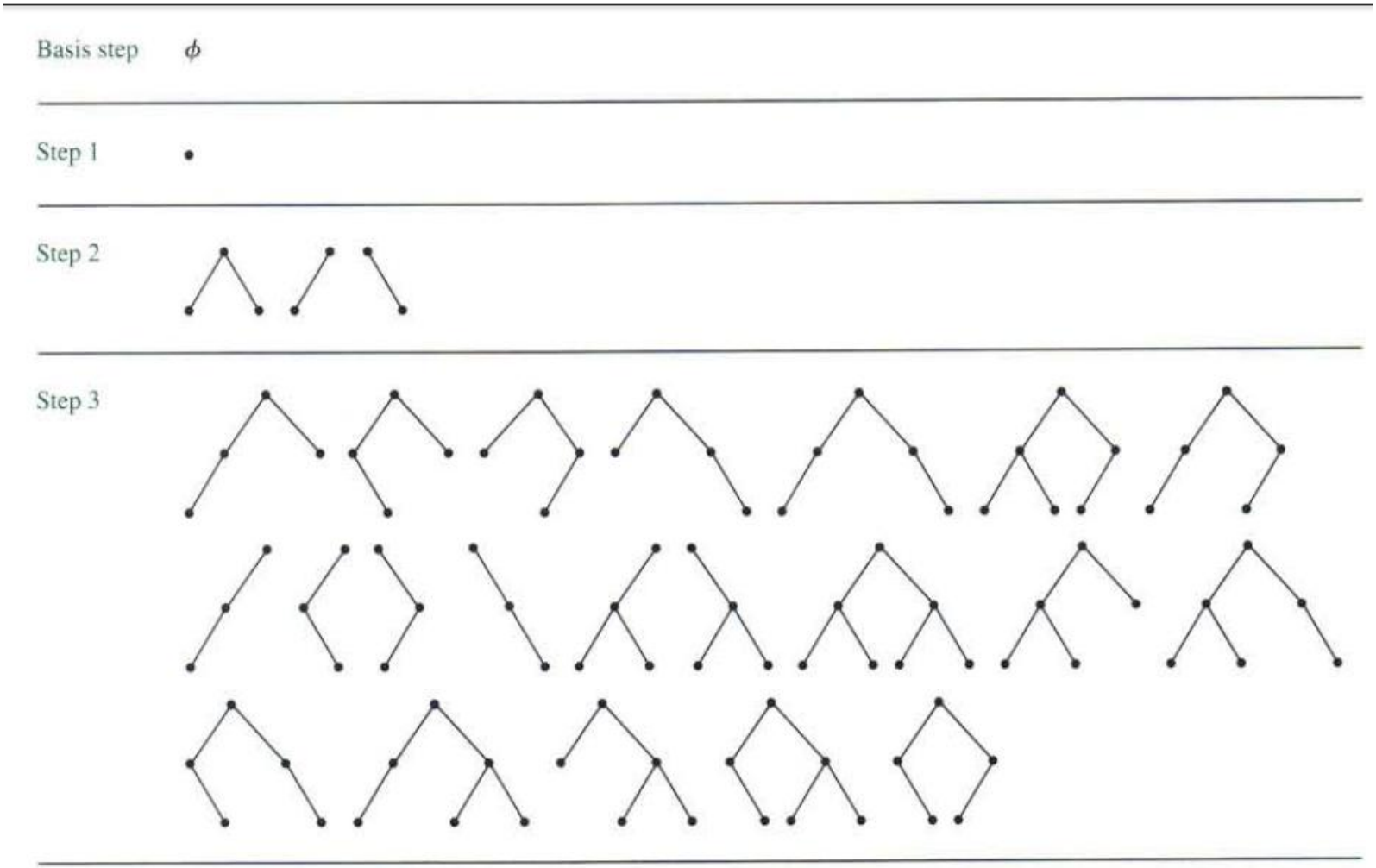
- Базни корак

  Празан скуп је бинарно стабло

- Рекурзивни корак

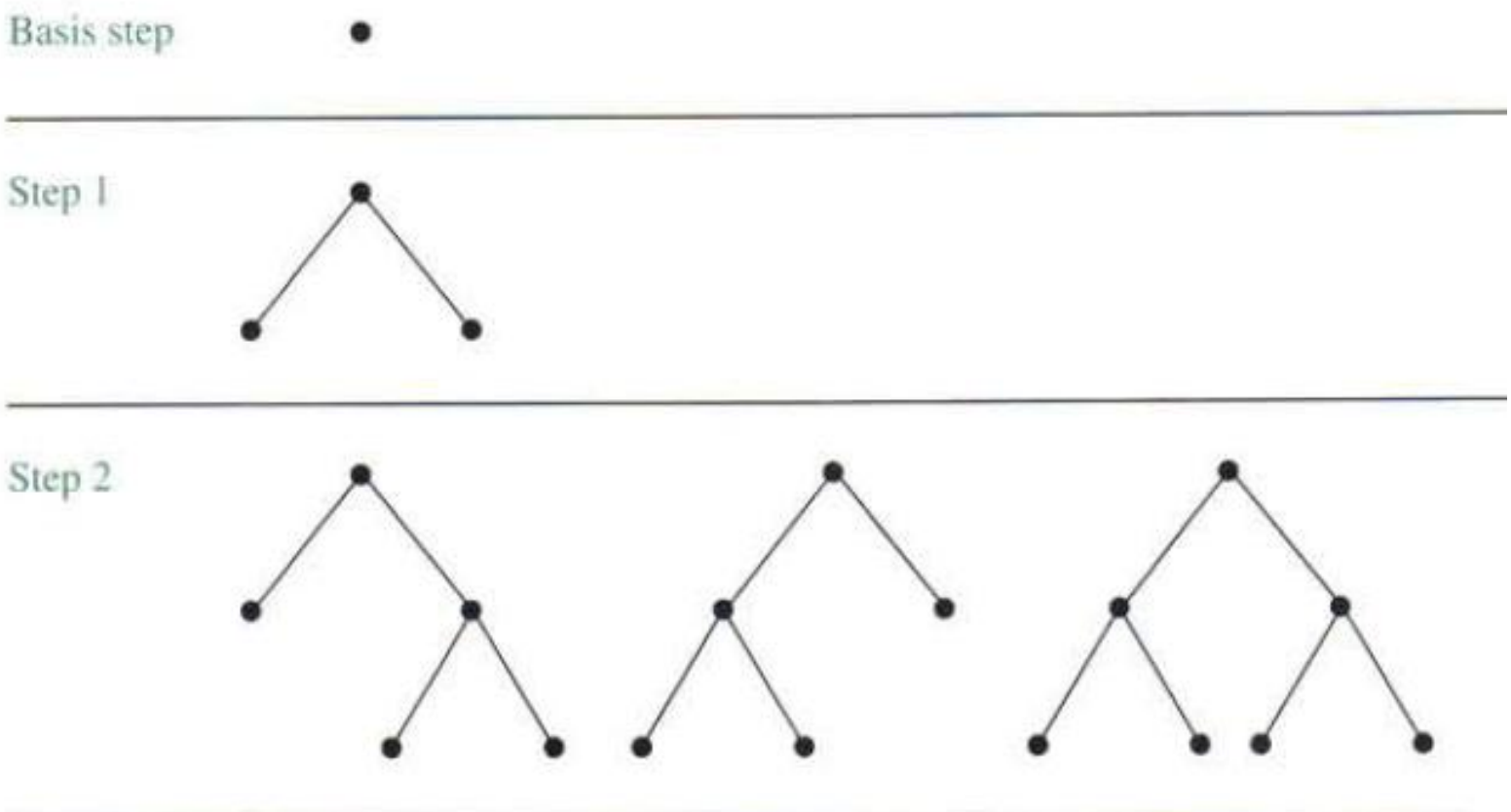
  Ако су T_1, T_2 два дисјунктна бинарна стабла тада постоји бинарно стабло, које ћемо обележавати са $T_1 \cdot T_2$, такво да има корен r и две ивице. Од којих је лева повезана са кореном бинарног стабла T_1, а десна са кореном бинарног стаблом T_2

Графичка илустрација конструкције бинарног стабла



Пуно бинарно стабла

- Дефиниција је иста као и код обичног осим што се мења базни корак
- Пуно бинарно дрво има један елеменат



Структурална индукција

- Очигледно је да ће за доказивање разних тврђења на рекурзивно дефинисаним структурама бити погодан неки вид индукције
- Доказ стурктурално индукцијом се састоји из следећх корака
- Базни корак:
- Показати да тврђење важи за све елементе базног скупа
- Индуктивни корак :
- Показати да ако тврђење важи за све елементе добијене до k-тог корак, тада ће важити и за све елементе који се додају у (k+1)-вом кораку

Тривијалан пример

- Докажимо да је скуп S (дефинисан раније на предавању) еквивалентан скупу свих природних бројева дељивих са 3

$$S = 3\mathbb{N} \Leftrightarrow S \subseteq 3\mathbb{N} \wedge 3\mathbb{N} \subseteq S$$

- Доказ $3\mathbb{N} \subseteq S$ (обична индукција)

$$P(n) - 3n \in S$$

- Базни корак :

$P(1) - 3 \in S$ по дефиницији S

- Индуктивни корак

$$P(k) \Longrightarrow P(k+1)$$

- Индуктивна хипотеза

$$P(k) - 3k \in S$$

- Доказ

$$3,\ 3\mathrm{k} \in S \Longrightarrow 3{+}3\mathrm{k} \in S \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 3(k+1) \in S \Longleftrightarrow P(k+1)$$

- Други правац (структутална индукција)

$$S \subseteq 3\mathbb{N}$$

- Базни корак

$$3 \in S \Longrightarrow\ 3{*}1\ \in 3\mathbb{N}$$

- Индуктивни корак

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$S_k \subseteq 3\mathbb{N} \Rightarrow S_{k+1} \subseteq 3\mathbb{N}$$

- Индуктивна хипотеза

$$S_k \subseteq 3\mathbb{N}$$

- Доказ:

$$x, y \in S_k \Rightarrow x, y \in 3\mathbb{N}$$

$$3|x, 3|y \Rightarrow 3|x+y$$

- Доказ завршен јер,

$$x + y \in S_{k+1} \Rightarrow x + y \in 3\mathbb{N}$$