Аргументи пребројавања
Правило збира и производа,
Принцип укључења-искључења

Професор: Рака Јовановић

Асистент: Јелена Јовановић

Доказати тврђење за дужине ниске

- За предходно дефинисану функцију дужине ниске важи следеће правило

$$l(xy) = l(x) + l(y), \qquad x, y \in \Sigma^*$$

- Означимо са
- $P(y) - l(xy) = l(x) + l(y)$ за свако $x \in \Sigma^*$
- Базни корак

$$P(\lambda) - l(x\lambda) = l(x) = l(x) + 0 = l(x) + l(\lambda)$$

- Индуктивни корак

$$P(y) => P(ya)\ ,a \in \Sigma$$

$$l(xy) = l(x) + l(y) \Rightarrow l(xya) = l(x) + l(ya)$$

- Индуктивна хипотеза

$$l(xy) = l(x) + l(y)$$

- Доказ
- На основу дефиниције дужине

$$l(xya) = l(xy) + 1$$

$$l(ya) = l(y) + 1$$

- Коришћењем хипотезе имамо

$$l(xya) = l(xy) + 1 = l(x) + l(y) + 1$$
$$= l(x) + l(ya)$$

- Тврђење доказано

Концепт пребројавања

- Пребројавање је основа математичке области комбинаторике
- Почетна истраживања на ову тему су се појавила у 17. веку приликом испитивања коцкарских игара
- Пребројавање је тесно повезано са многим реалним проблемима
  - Колико је цифара потребно за интернет адресе
  - Колико је потребно цифара у телефонским бројевима
  - Испитивање комплексности алгоритама
  - Испитивање вероватноћа догађаја

Правило производа

- Ако се неки процес може превести у секвенцу од два корака, причему се први може извршити на n, а други на m начина. Тада постоји nm, различитих начина на који може овај процес да се изврши

$$|A \times B| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|$$

- Број елемената Декартовог производа два скупа је једнак производу броја елемената та два скупа

Тривијалан пример

- У компанији има двоје запослених, Марка и Ану. Компанија је изнајмила зграду са 12 канцеларија. На колико начина могу да се распореде запослени у различите канцелерије?
- Процес: Додељивање канцеларија запосленим
- Корак 1: Додела канцеларије Марку

  12 начина
- Корак 2: Додела канцеларије Ани

  (12 – 1) начина,

  јер је једна канцеларија већ заузета
- Укупно начина

  12*11 = 131

Општи облик правила збира

- Ако се неки процес може превести у секвенцу од n корака, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причему се i-ти корак може извршити на $|A_i|$ различитих начина. Тада постоји $|A_i|\ |A_2| \ldots |A_n|$ различитих начина на који може овај процес да се изврши.

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

- Пример:
- Колико различитих регистастарских бројева може бити у једном регистарском подручју ако су таблице следећег облика

Registarska tablica za motorno vozilo Republike Srbije

- 3 цифре, 2 слова
- 3 бирања цифре, 2 бирања слова

$10*10*10*30*30$

$k := 0$
for $i_1 := 1$ **to** n_1
    for $i_2 := 1$ **to** n_2
        .
        .
        .
            for $i_m := 1$ **to** n_m
                $k := k + 1$

- Коју вредност има промењива k, након извршавања следећег кода
- Решење:

На почетку извршавања k=0

- Сваки пут када се изврши унутрашња петља k добија вредност k+1

- Нека је T_{j} ознака за задатак проласка кроз j-ту петљу
- Сада је број извршавања целе петље једнак броју начина на који може да се изврши
- $T_1\, T_2 \dots T_m$
- Број начина на који може да се изврши петља T_{j} је n_{j}, јер i_{j} може имати све вредности из $1 \leq i_{\mathrm{j}} \leq n_{\mathrm{j}}$
- Односно, на основу правила производа

$$k = n_1 * n_2 * \cdots * n_m$$

Правило збира

- Ако се неки процес може извести или поступком A на n различитих начина, или поступком B на m различитих начина. Ако поступаци A и B немају ни један исти начин, онда се процес може извршити на n+m различитих начина

$$A \cap B = \emptyset$$

$$|A \cup B| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$$

- Број елемената уније два дисјунктна скупа је једнак збиру броја елемената та два скупа

Тривијалан пример

- Бира се један представника факултета или из групе професора којих има 30 или из групе студената са просеком преко 9.5 којих има 35. Нако колико начина се може изабрати преставник
- Решење:

Представник се може изабрати из једне од две групе. Прва група има 30 професора, друга има 35 студената. Ниједан професор не може бити и студент тако да су ове две групе дисјунктне. Значи на основу правила збира имамо да укупно постоји

$$30+35 = 65 \text{ начина}$$

Опште правило збира

- Ако се неки процес може извести једним од n различитих поступка $A_1, A_2, .., A_n$ причему се i-ти поступак може извршити на $|A_i|$ различитих начина. Тада постоји

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

различитих начина на који може овај процес да се изврши, ско су сви поступци $|A_i|$ međусобно дисјунктни.

$$(\forall i, j)(A_i \cap A_j = \emptyset)$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

- Број елемената уније n дисјунктна скупа је једнак збиру броја елемената тих скупова

Тривијалан пример

- Студент за семинарски рад може да изабере један задатак из три листе задатака. Три листи имају по 19, 13 и 20 различитих задатака. Ни на једној од 3 листе се не појављују две иста задатка. Колико различитих задатака студент може да изабере
- Решење

Студент може да бира једану од три листе (поступка) од којих ниједне две немају исти задатак(начин)

- На основу правила збира имамо

$$19+13+20 = 52$$

$$
\begin{array}{l}
k := 0 \\
\textbf{for } i_1 := 1 \textbf{ to } n_1 \\
\qquad k := k + 1 \\
\textbf{for } i_2 := 1 \textbf{ to } n_2 \\
\qquad k := k + 1 \\
\qquad\quad \vdots \\
\textbf{for } i_m := 1 \textbf{ to } n_m \\
\qquad k := k + 1
\end{array}
$$

- Коју вредност има промењива k, након извршавања следећег кода
- Решење:

На почетку извршавања k=0

- Сваки пут када се изврши нека петља k добија вредност k+1

- Нека је T_{j} ознака за задатак проласка кроз j-ту петљу
- Сада је вредност броја k једнака броју извршавања петљи T_1 , $T_2, \dots, T_m$
- Број начина на који може да се изврши петља T_{j} је n_{j}, јер i_{j} може имати све вредности из $1 \leq i_{\mathrm{j}} \leq n_{\mathrm{j}}$
- Пошто се у једном тренутку може извршавати само једна петља, на основу правила збира имамо

$$k = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

- Шта заправо представља на колико начина се може извршити једна од m петљи

Комплекснији пример

- Сваки корисник рачунара има своју лозинку. Шифра има 6, 7 или 8 знакова. Знак може бити велико слово(енглеске абецеде) или цифра. Свака лозинка мора имати бар једану цифру. Колико има различитих лозинки.
- Решење:
- Нека је L укупан број лозинки
- На основу правила збира имамо

$$L = L_6 + L_7 + L_8$$

- L_6, L_7, L_8 представља број лозинки са 6, 7 или 8 знакова

- На основу правила производа имамо

$L_6 = 36^6 - 26^6$

- 36^6 - број свих ниски са 6 бројева или слова (10+26)
- 26 – број свих ниски које немају ни једану цифру
- Слично

$$L_7 = 36^7 - 26^7$$
$$L_8 = 36^8 - 26^8$$

- Сада знамо колико је L

$$L = 36^6 + 36^7 + 36^8 - 26^6 - 26^7 - 26^8$$

Правило укључења-искључења

- Ако се неки процес може извести или поступком A на n различитих начина, или поступком B на m различитих начина. Ако поступаци A и B имају неке исти начине, онда се процес може извршити на

$$|A \cup B| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |A \cap B|$$

- Број елемената уније два скупа је једнак збиру броја елемената та два скупа минус број елемената пресека та два скупа

- Колико има бинарних ниски од 8 знакова, које или почињу са 1, или се завршавају са 00.
- Решење:
- Ниски који почињу са 1 имамо

$$N_1 = 2^7 = 128$$

пошто је први знак фиксиран ми заправо правимо ниску од 7 знакова

- Ниски који почињу са 00 имамо

$$N_{00} = 2^6 = 64$$

- пошто су последња два знака фиксирана ми заправо правимо ниску од 6 знакова

- На основу правила укључења-искључења имамо да је укупан број ниски N

$$N = |N_1| + |N_{00}| - |N_1 \cap N_{00}|$$

- Колико има елемената у $N_1 \cap N_{00}$
- То су сви елементи који почињу са 1, а последње две цифре су 00. Значи од осам цифара 3 су фиксиране

$$N_1 \cap N_{00} = 2^5 = 32$$

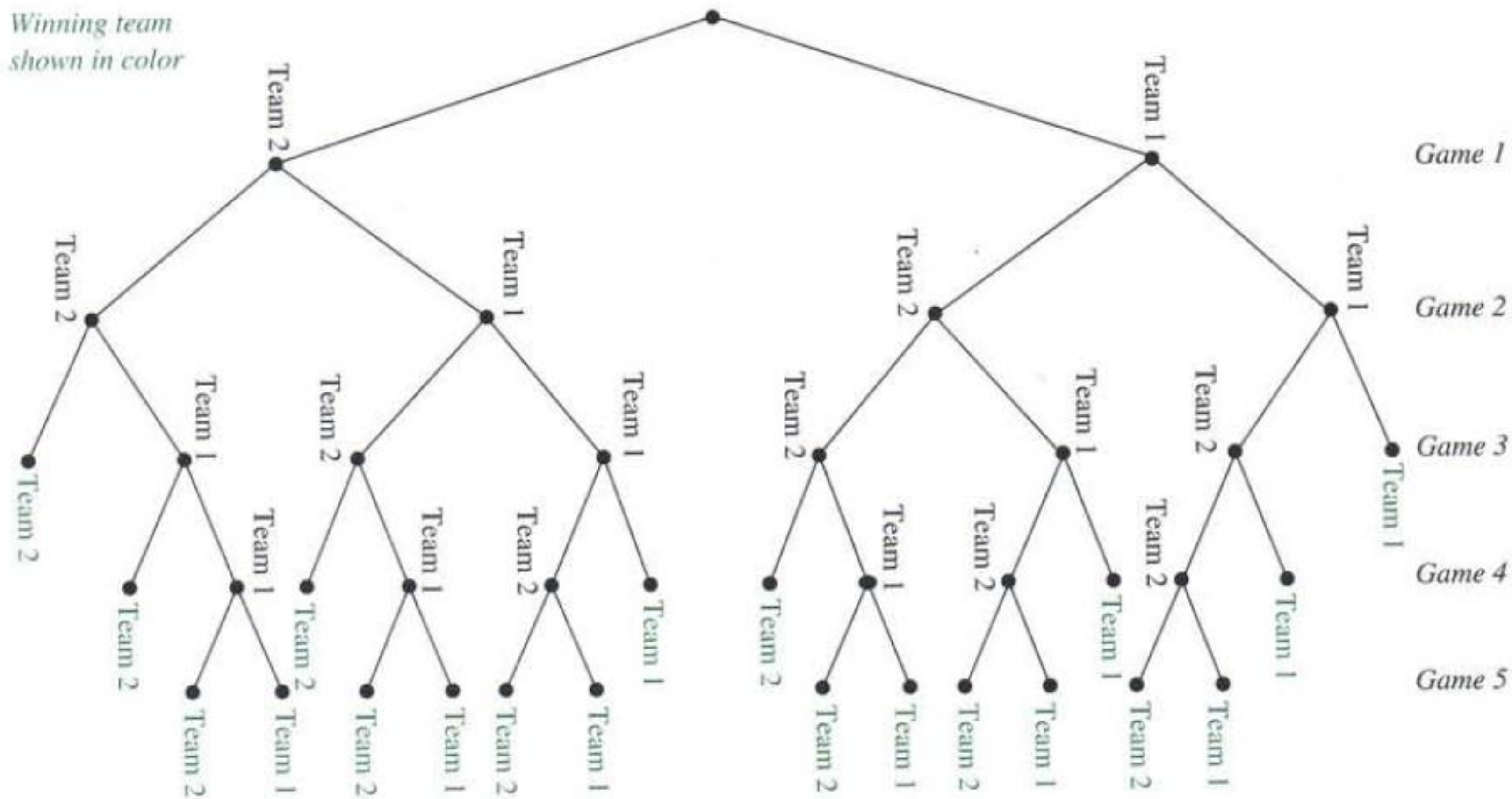
- Коначно

$$N = |N_1| + |N_{00}| - |N_1 \cap N_{00}| =$$
$$128 + 64 - 32 = 160$$

Бројање уз помоћ стабла

- У кошаркашком плејофу игра ју два тима, и играће се највише 5 мечева. На колико различитих начина може да се одигра плајоф
- Напомена:
- Плајоф је готов када први тим победи 3 меча

Решење задатка у облику стабла



- У Бенетону се продају мајце "Ја волим математику", у величинама S, M, L, XL, XXL. У величинама S, M, L постоје мајце беле, црвене, плаве и зелене боје. За XL постоје црвене, плаве и зелене мајце, а за XXL једино зелена и плава. Колико укупно има различитих мајци?
- Решење: 17 види се из дрвета