Препоручена литература:

1. Džejms Anderson, Diskretna matematika sa kombinatorikom, Cet, Beograd 2005
2. Discrete Mathematics Demystified, Steven G. Cantz, Mc Graw Hill, 2009 (knjiga je malo lakša ali je dobra)
3. Discrete and Combinatorial Mathematics an Applied Introduction, fifth edition, Ralph Grimaldi, Pearson- Addison Wesley, 2004

**Napomena: Kasnije će biti objavljeno koje tačno stranice u knjigama treba da se pređu, za sada je potrebno preći oblasti kao i na predavanjima*

Сајт предмета:

http://mail.ipb.ac.rs/~rakaj/predavanja/

Логика закључивања
Предикатска логика

Рака Јовановић

Увод у дискретну математику
Предавање 2

Логичка импликација и закони закључивања

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q \qquad (1)$$

(код закључивања ћемо обележавати импликацију са →)

- p_1 , $p_2, \ldots, p_n$ зваћемо ***премисе***, а q а ***закључком*** у логичком исказу (1)
- Рећи ћемо да је логички исказ (1) валидан (тачан) ако су сви p_i и q тачни

p : Пера учи

q : Пера игра баскет

r : Пера је положио Дискретну математику

---

p_1 : Ако Пера учи, Пера полаже Дискретну математику

$$p_1: \ p \rightarrow r$$

p_2 : Ако Пера не игра баскет, Пера учи

$$p_2: \neg q \rightarrow p$$

p_3 : Пера је пао дискретну математику

$$p_3: \neg r$$

Интересује нас да ли важи валидност

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$$

			p_1	p_2	p_3	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$
p	q	r	$p \rightarrow r$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg r$	$[(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow p) \wedge \neg r] \rightarrow q$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1

Логичка импликација

- Ако су p и q произвољни логички искази, такви да је $p \rightarrow q$ таутологија тада ћемо рећи да p ***логички имплицира*** q, односно $\mathbf{p \Rightarrow q}$

- **Примери**
  - $\mathbf{p \rightarrow (p \vee q)}$ је таутологија дакле $\mathbf{p \Rightarrow (p \vee q)}$
  - $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ је таутологија, значи $\mathbf{p \rightarrow q}$ и $\mathbf{q \rightarrow p}$ су такође таутологије, дакле $\mathbf{p \Rightarrow q}$ **и** $\mathbf{q \Rightarrow p}$

Проблем да ли је таутологија

$$[(p \to r) \land (r \to s) \land (t \lor \neg s) \land (\neg t \lor u) \land \neg u] \to \neg p$$

- Табела већ има 32 (2^5) редова, ако се повећа број основних исказа расте на 64, 128...
- Интересантни су нам само они случајеви када су све премисе тачне јер је иначе тривијално
- Треба да је могуће упростити истинитоносне табела
- Треба увести правила извођења која ће нам омогућити овакав поступак

Модус поненс (Правило одвајања)

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q,$$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

1. Ана је добила 100 седмицу на лотоу
2. Ако Ана добије седмицу на лотоу, онда Ненад даје отказ
3. Произилази Ненад је дао отказ

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- Премисе не морају бити просте не морају бити прости искази

$$\begin{array}{l} r \vee s \\ (r \vee s) \rightarrow (\neg t \wedge u) \\ \hline \therefore \neg t \wedge u \end{array}$$

Правило Силогизма

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r),$$

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

- Ако је 250 дељив са 50, онда је 250 делјив са 10
- Ако је 250 дељив са 10, онда је 250 дељив са 2
- Произилази Ако је 250 дељив са 50, онда је 250 дељив са 2

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Модус толенс (Метод порицања)

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

1. Ако Немања добије на изборима,онда је Јелица управник телекома
2. Јелица није управник телекома
3. Немања није добио на изборима

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Rule of Inference	Related Logical Implication	Name of Rule
1) p $p \to q$ $\therefore q$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$	Rule of Detachment (Modus Ponens)
2) $p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	Law of the Syllogism
3) $p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$	Modus Tollens
4) p q $\therefore p \wedge q$		Rule of Conjunction
5) $p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	Rule of Disjunctive Syllogism
6) $\neg p \to F_0$ $\therefore p$	$(\neg p \to F_0) \to p$	Rule of Contradiction
7) $p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \to p$	Rule of Conjunctive Simplification
8) p $\therefore p \vee q$	$p \to p \vee q$	Rule of Disjunctive Amplification
9) $p \wedge q$ $p \to (q \to r)$ $\therefore r$	$[(p \wedge q) \wedge [p \to (q \to r)]] \to r$	Rule of Conditional Proof
10) $p \to r$ $q \to r$ $\therefore (p \vee q) \to r$	$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$	Rule for Proof by Cases
11) $p \to q$ $r \to s$ $p \vee r$ $\therefore q \vee s$	$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \to (q \vee s)$	Rule of the Constructive Dilemma
12) $p \to q$ $r \to s$ $\neg q \vee \neg s$ $\therefore \neg p \vee \neg r$	$[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \to (\neg p \vee \neg r)$	Rule of the Destructive Dilemma

$$p \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg r$$

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow \neg q \\ \neg q \rightarrow \neg r \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

1. $p \rightarrow \neg q$ (премиса)
2. $\neg q \rightarrow \neg r$ (премиса)
3. $p \rightarrow \neg r$ на основу (1) и (2) и правила силогизма
4. p (премиса)
5. $\therefore \neg r$ На основу (3) и (4) и правила модус поненс

Проблем који не решава исказна логика

1. Сви људи су смртни.
2. Сократ је човек.
3. Стога, Сократ је смртан.

- Јасно је да из исказа 1 и 2 следи 3 али употребом исказне логике овако нешто се не може закључити

- Исказ који у себи имају промењиве не морају бити логички искази
- Постаје логички исказ тек када се промењива замени са конкретном вредношћу

x>5: 1 >5 (0), 6>5(1)

x>5	Тачан за 6,7,8
	Не тачан за 1,2,3,4,5

x+2 је паран	Тачан за x је паран
	Netачан за x је паран

Отворени искази

- Исказ облика “x+2 је паран” ћемо звати отвореним исказом
- Декларативна реченица је отворени исказ ако
  - Садржи једну или више промењивих
  - Није логички исказ, али
  - Постаје када се вредност промењиве у њој замене са одређеном вредношћу из скупа дозвољених

Примери отворених исказа

- x+2 је паран целобројан број означимо са p(x)
- x+2 није паран целобројан број означимо са ¬p(x)
- Отворени исказ са две или више промењивих
  - Бројеви x+2, x-y и x+2y су парни целобројни означимо са q(x,y)
  - У оваквим исказима једна промењива (нпр. x) се увек замењује истом вредношћу из скупа дозвољених

Потреба за формализмом

A. Можемо дати следеће исказе
   1. За неке x тачно је p(x)
   2. За неке x,y тачно је q(x,y)
B. Али важи
   1. За неке x тачно је ¬ p(x)
   2. За неке x,y тачно је ¬ q(x,y)

- Значи негација није једноставна
  - B1 = ¬ A1 **није тачно**
  - B2 = ¬ A2 **није тачно**

Квантификатори

- Универзални квантификатор
  - За сваки, За произвољан, било који
  - Ознака $\forall$

- **Примери**
  - $(\forall x)P(x)$ за свако x важи P
  - $(\forall x)(x<x+1)$ за свако x важи $x<x+1$
  - $(\forall x \in N)($ $2x$ је паран број$)$ за свако x важи $2x$ је паран број

- Егзистенцијални кватификатор
  - За неки, постоји бар један, макар један
  - Ознака $\exists$
- Примери
  - $(\exists x)\ P(x)$ Постоји бар један x да важи P
  - $(\exists x)\ (5x+1 = 21)$ постоји бар један x такав da је $5x+1 = 21$
  - $(\exists x)(\forall y)(x<y)$ Постоји бар један x за свако y такав да важи $x<y$

Исказ	**Када је тачно**	**Када је нетачно (негација)**
$(\forall x)P(x)$	За сваку вредност **x** из скупа дозвољених вредности тачно је **P(x)**	Постоји вредност **x** из скупа дозвољених вредности за коју је није тачно **P(x)**
$(\exists x)\ P(x)$	Постоји вредност **x** из скупа дозвољених вредности за коју је тачно **P(x)**	За сваку вредност x из скупа дозвољених вредности није тачно је **P(x)**
$(\forall x)\ \neg P(x)$	За сваку вредност **x** из скупа дозвољених вредности тачно је **¬P(x)**	Постоји вредност **x** из скупа дозвољених вредности за коју је тачно **P(x)** , односно није тачно **¬P(x)**
$(\exists x)\ \neg P(x)$	Постоји вредност **x** из скупа дозвољених вредности за коју је тачно **¬P(x)**	За сваку вредност **x** из скупа дозвољених вредности тачно је **P(x)** ,односно није тачно **¬P(x)**

Негација основних исказа предикатског рачуна

$$\neg[\forall x\ p(x)] \Leftrightarrow \exists x\ \neg p(x)$$

$$\neg[\exists x\ p(x)] \Leftrightarrow \forall x\ \neg p(x)$$

$$\neg[\forall x\ \neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x\ \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \exists x\ p(x)$$

$$\neg[\exists x\ \neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x\ \neg\neg p(x) \Leftrightarrow \forall x\ p(x)$$

Логичке еквиваленције предикатске логике

$$\exists x\,[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x\; p(x) \wedge \exists x\; q(x)]$$

$$\exists x\,[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists x\; p(x) \vee \exists x\; q(x)]$$

$$\forall x\,[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x\; p(x) \wedge \forall x\; q(x)]$$

$$[\forall x\; p(x) \vee \forall x\; q(x)] \Rightarrow \forall x\,[p(x) \vee q(x)]$$

- **Важно је разумети да отворен исказ (који у себи има промењиву) када му се дода квантификатор постаје логички исказ односно има вредност тачно или не тачно и може се користити у логичким формулама**
- **Сва правила која су уведена за логичке исказе, сада се могу применити и на отворене исказе који су додавањем квантификатора постали искази**