Скупови

Професор: др Рака Јовановић

Асистент: Јелена Јовановић

Проблем дефинисања појмова употребом једно логике

- Како дефинисати дуж?
- Формални проблеми дефиниције : Најкраћа путања између две тачке
  - Не знамо шта су путања, тачка
  - Да ли је она јединствена
  - Да ли уопште постоји
- У математици нови појмови се могу дефинисати само преко већ постојећих
- Неки наједноставнији појмови (терми) се не дефинишу већ се прихватају за постојеће (аксиоме)

Скупови

- У модерној математици појмови скуп, *елемент* се не дефинишу већ се прихватају
- Скуп се подразумева као колекција објеката (али се не поставља питање шта су)
- Za x кажемо да је елемент скупа S ако и само ако је један од објеката из колекције која одговара S

$$x \in S$$

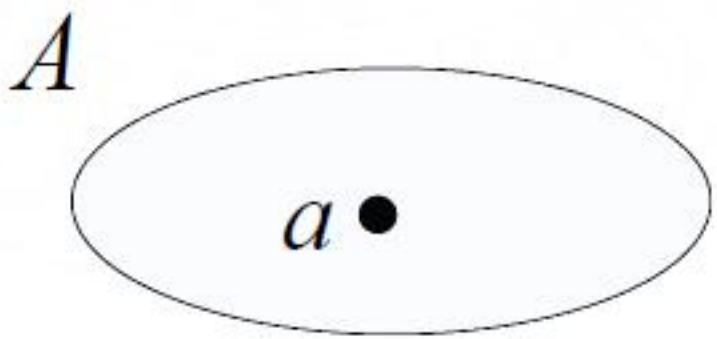
- Примери нотације

$$5 \in \mathbb{N}, -7 \notin \mathbb{N}$$

Венеов диаграм

- Они графички приказују скупове

- Венеов диаграм за елемент скупа



$a \in A$

Дефиниција једнакости два скупа

- Два скупа S и T су једнаки ако имају све исте елементе.
- Обележавамо са S=T

$$S = T \Leftrightarrow (x \in S \Rightarrow x \in T) \wedge (x \in T \Rightarrow x \in S)$$

- Пример два једнака скупа

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 > 5\}$$

$$T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x > 2\}$$

Нотација скупа

- S је скуп свих x таквих да задовољавају P(x)

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

- Скуп парних природних бројева C

$$S = \{x \mid (\exists k \in \mathbb{N})(2k = x)\}$$

- Или скраћено

$$S = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

- Мање формално

$$S = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Раселов парадокс

- У граду Пера берберин брије сваког ко не брије самог себе
  - Ако се Пера не брије сам ⇒ Пера брије самог себе
  - Ако се Пера сам брије ⇒ Пера не брије самог себе
- S скуп свих скупова који не садрже самог себе

$$S = \{x \mid x \; je \, скуп \wedge x \notin x\}$$

- Не могу се користити било какви предикати већ постоје ограничења (Зермело–Фраенкелова теорија скупова)

Последице

- У математици постоје
  - Ствари које су тачне (на основу својих премиса)
  - Ствари које нису тачне
  - Ствари које су тачне али их је немогуће доказати
  - Ствари које су не тачне али је немогуће оповргнути их
- Немогуће је доказати да математика нема ниједан парадокс, а ако један постоји онда цела математика не ваља
- МАТЕМАТИЧАРИ СУ ПРИХВАТИЛИ ДА **ВЕРУЈУ** ДА ЈЕ СВЕ У РЕДУ

Дефиниција Подскупа

- За скуп T ћемо рећи да је подскуп од S ако важи

$$(\forall x)(x \in T \Rightarrow x \in S)$$

- Обележава ћемо са

$$T \subset S, S \supset T$$

- Примери:

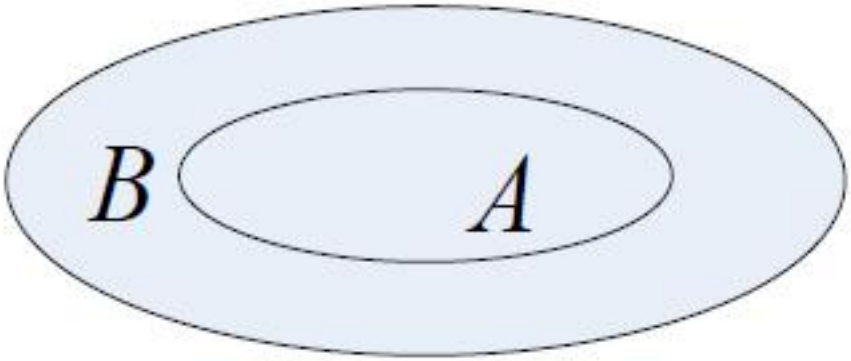
T={1,2,4}, S= {1,2,3,4,5}

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 > 3\}$$

$$T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x > 5\}$$

Венеов диаграм за подскуп

$$A \subset B = \left\{ x \middle| x \in A \Rightarrow x \in B \right\}$$



Како се доказује да је подскуп

Да ли је T подскуп од S ?

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^3 > 8\}$$

$$T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x > 5\}$$

Треба да важи

$$(\forall x)(x \in T \Rightarrow x \in S)$$

$$x \in T \Leftrightarrow x > 5 \Leftrightarrow x^3 > 125 \Rightarrow x^3 > 8 \Leftrightarrow x \in S$$

Значи T јесте подскуп од S

Нека правила која важе за једнакост скупова

(a) $A = A$,

(b) $A = B \Longrightarrow B = A$,

(c) $A = B \wedge B = C \Longrightarrow A = C$.

Нека правила која важе за подскупове скупова

(a) $A \subseteq A$,

(b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$,

(c) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$.

Дефиниција празног скупа

- Празан скуп је скуп који нема ни један елемент
- Обележава се са $\varnothing$
- Формалније

$$(\forall x)(x \notin \varnothing)$$

- За сваки скуп S важи

$$\varnothing \subset S$$

- Пример

$$S = \{x \mid (x+2>5) \wedge (x-3<0)\} = \varnothing$$

Дефиниција пресека скупова

- Нека су S и T скупови, рећи ћемо да x припада $S \cap T$, ако и само ако $x \in S$ и $x \in T$

$$x \in S \cap T \Leftrightarrow x \in S \wedge x \in T$$

- Примери

S= {1,2,3,4,5} T = {4,5,6,7}

$S \cap T$={4,5}

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 101\}$$

$$T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(x = 2k)\}$$

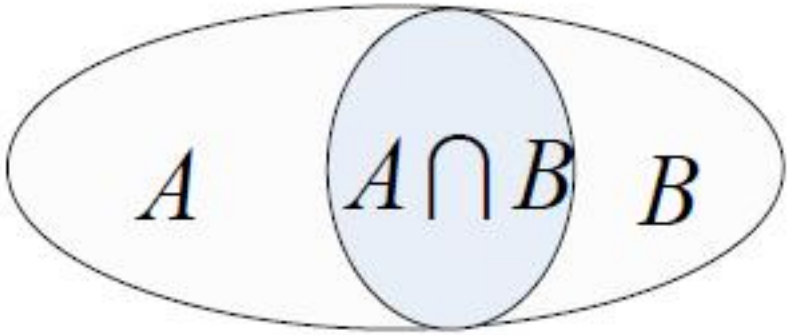
$$S \cap T = \{x \mid x \in N \wedge x^2 < 101 \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(x = 2k)\}$$

Могуће је дефинисати и пресек пребројивог броја скупова

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n$$

Венеов диаграм за пресек

$$A \bigcap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \wedge x \in B \right\}$$



Дефиниција уније скупова

- Нека су S и T скупови, рећи ћемо да x припада $S \cup T$, ако и само ако $x \in S$ или $x \in T$

$$x \in S \cup T \Leftrightarrow x \in S \vee x \in T$$

- Примери

S= {1,2,3,4,5} T = {4,5,6,7}

$S \cup T$={1,2,3,4,5,6,7}

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 101\}$$

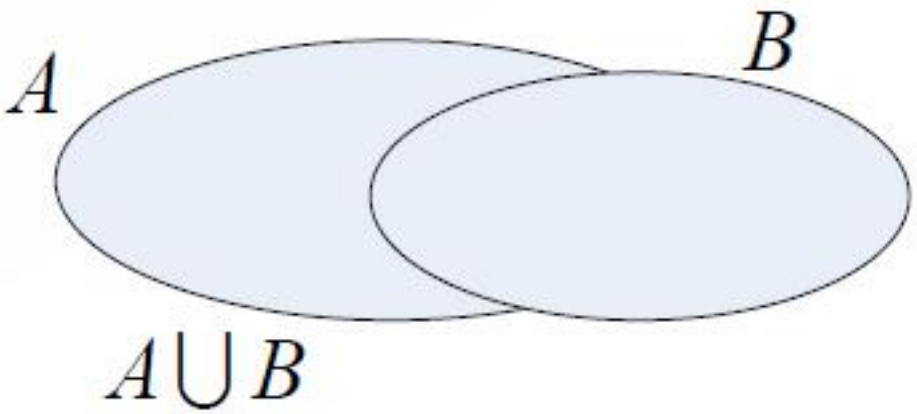
$$T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(x = 2k)\}$$

$$S \cup T = \{x \mid x \in N \wedge (x^2 < 101 \vee (\exists k)(x = 2k))\}$$

Могуће је дефинисати и унију пребројивог броја скупова

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n .$$

Венеов диаграм за унију



Дефиниција разлике скупова

- Нека су S и T скупови, рећи ћемо да x припада S / T, ако и само ако $x \in S$ и $x \notin T$

$$x \in S / T \Leftrightarrow x \in S \wedge x \notin T$$

- Разлика скупова није комутативна S / T≠ T/S
- Примери S= {1,2,3,4,5} T = {4,5,6,7}

S / T={1,2,3}

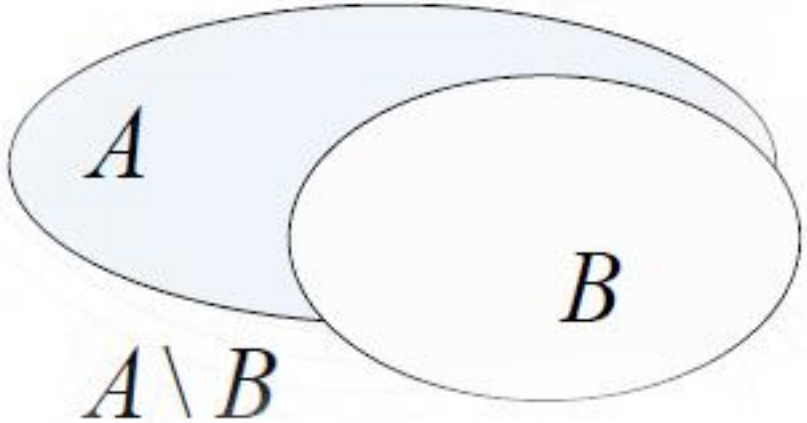
$$S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 101\}$$

$$T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(x = 2k)\}$$

$$S / T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x^2 < 101 \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(x \neq 2k))\}$$

Венеов диаграм за разлику скупова

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



Дефиниција симетричне разлике скупова

- Нека су S и T скупови, рећи ћемо да x припада S Δ T, ако и само ако x ∈ S и x ∉ T

$$x \in S \Delta T \Leftrightarrow (x \in S \setminus T) \vee (x \in T \setminus S)$$

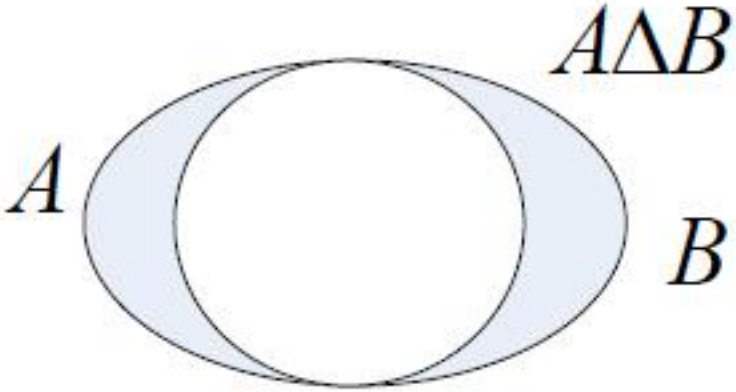
- Симетрична разлика скупова је комутативна S Δ T=T Δ S
- Примери

S= {1,2,3,4,5} T = {4,5,6,7}

S Δ T={1,2,3,6,7}

Венеов диаграм за симетричну разлику скупова

$$A \ \Delta \ B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$



Дефиниција комплементног скупа

- За скуп S који је подскуп од скупа U дефинишемо комплемент као

$$C_U(S) = \{x \mid x \notin S \wedge x \in U\} = U \setminus S$$

- U се назива универзални скуп и често је подразумеван

$$\overline{S} = \{x \mid x \notin S \wedge x \in U\}$$

Примери комплементног скупа

- Основни пример

$$S=\{1,3\} \quad U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$C_U(S) = \{2,4,5,6\}$$

- Непарни бројеви су комплемент парних ако се за универзални скуп узму природни бројеви

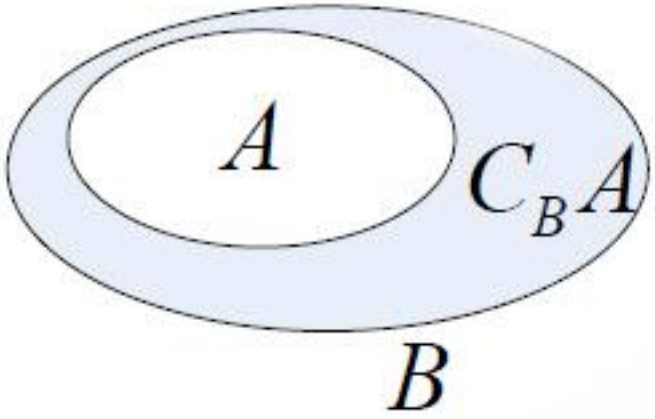
$$U = \mathbb{N}$$

$$S = \{2x \mid x \in N\}$$

$$\overline{S} = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Венеов диаграм за комплемент скупа

$$C_B A = B \setminus A$$



The Laws of Set Theory

For any sets A, B, and C taken from a universe $\mathcal{U}$

1) $\overline{\overline{A}} = A$	Law of *Double Complement*
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	*DeMorgan's* Laws
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	
3) $A \cup B = B \cup A$	*Commutative* Laws
$A \cap B = B \cap A$	
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	*Associative* Laws
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	*Distributive* Laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
6) $A \cup A = A$	*Idempotent* Laws
$A \cap A = A$	
7) $A \cup \emptyset = A$	*Identity* Laws
$A \cap \mathcal{U} = A$	
8) $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	*Inverse* Laws
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	
9) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	*Domination* Laws
$A \cap \emptyset = \emptyset$	
10) $A \cup (A \cap B) = A$	*Absorption* Laws
$A \cap (A \cup B) = A$	