Релације (наставак) Функције

Професор: др Рака Јовановић

Асистент: Јелена Јовановић

Дефинисање класа еквиваленције

- Релација еквиваленције нам омогућује да дефинишемо неку сличност
- Често је корисно груписати елементе на основу сличности

Дефиниција:

Ако је $\sim$ $(\sim \subseteq A^2)$ релација еквиваленције, онда се класа еквиваленције за елеменат x у ознаци C_x а дефинише као

$$C_x = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

<u>да не буде забуне ~ је само ознака за релацију као што смо користили ρ</u>

Дефинисање количничког скупа

- Скуп $A/\sim$ чији су елементи све класе еквиваленције релације $\sim$ зове се количнички скуп
- Најлакше га је разумети као скуп свих група сличних
- Мање формално листа свих *типова* које одређује класа еквиваленције

Пример класа еквиваленције

- Нека је $\sim$ ($\sim \subseteq A^2$) релација која означава израз :

  x и y иду у исти разред

  $x \sim y \Leftrightarrow x$ и y иду у исти разред

  A су сви ученици школе

- Тада је класа еквиваленције C_x :

  $C_x = \{y \in A \mid x \sim y\} \Leftrightarrow C_x =$ Скуп сви ученика школе који иду у исти разред са $x \Leftrightarrow$ Разред од x

- Тада је количнички скуп $A/\sim$:

  Скуп свих разреда у школи

Пример класа еквиваленције

- Нека је $\sim$ ($\sim \subseteq Z^2$) релација која означава израз :

  Разлика x и y је паран број

  $x \sim y \Leftrightarrow (\exists k \in Z)(x-y=2k)$

- Тада је класа еквиваленције C_x :

  $C_x = \{y \in A \mid x \sim y\} \Leftrightarrow C_x =$ Скуп сви бројева таквих да је x-y паран број $\Leftrightarrow$ Скуп свих бројева који су исте парности као x

- Тада је количнички скуп $A/\sim$:

  $A/\sim = \{$Скуп парни бројеви, Скуп непарних бројеви$\}$

Особине класа еквиваленције

- Свако x припада некој класи еквиваленција релеције еквиваленције $\sim$
  - Релација еквиваленције је рефлексивна, односно $x \sim x$
  - За сваку класа еквиваленције важи $C_x \neq \emptyset$
- Две класе еквиваленције C_x , C_y релације $\sim$ су дисјунктне, односно $C_x \cap C_y = \emptyset$
- $x \sim y \Leftrightarrow C_x = C_y$

Дефинисање релације поретка

- Релација која је
  - Рефлексивна
  - Антисиметрична
  - Транзитивна

  Зваћемо релацијом поретка
- Ако је $\rho \subseteq A^2$релација поретка, тада кажемо да је на A дефинисан поредак

Пример релације поретка

$\rho \subseteq N^2$, $x \rho y = x \mid y$ (x дели y)

- Рефлексивност

  $(\forall x \in N)(x \rho x)$ Сваки број дели самог себе

- Антисиметричност

  $(\forall x,y \in N)(x \rho y \wedge y \rho x)$ $x|y \wedge y|x \Leftrightarrow x=y$

- Транзитивност

$(\forall x,y,z \in N)(x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$ $x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$

Интересанто је да релације $<$ на скупу природних бројева није релација поретка већ $\leq$

Тотални поредак

- Ако је $\rho \subseteq A^2$релација поретка, и ако важи

$$(\forall x,y \in N)(x \rho y \vee y \rho x)$$

Рећи ћемо да је ρ релација тоталног поретка на A

- Примери:
  - Релације $\leq, \geq$ су релације тоталног поретка на N
  - Релација $|$ (дељивост) није релација тоталног поретка на N

Функције

- Функције слично као релације успостављају везу између два скупа A и B
- Функције се могу разумети као пресликавање неког елемента A у неки елемент B (не формално претварање)
- Док релације описује однос између два елемета, функције дефинишу прелазак из једног облика у други

Дефиниција функције

- Функција или пресликавање *f скупа A* на скуп *B,* у ознаци

$$f: A \to B$$

је релација $f \subseteq A \times B$ која има особину да се сваки елеменат скупа A појављује тачно једним елементом скупа B

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ (x, y) \in f$$

$$(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$$

Пример функције

X={1,2,3}, Y={a,b,c,d}

f: X→Y

- Дефинисане помоћу уређених парова

f={(1,d),(2,d),(3,c)}

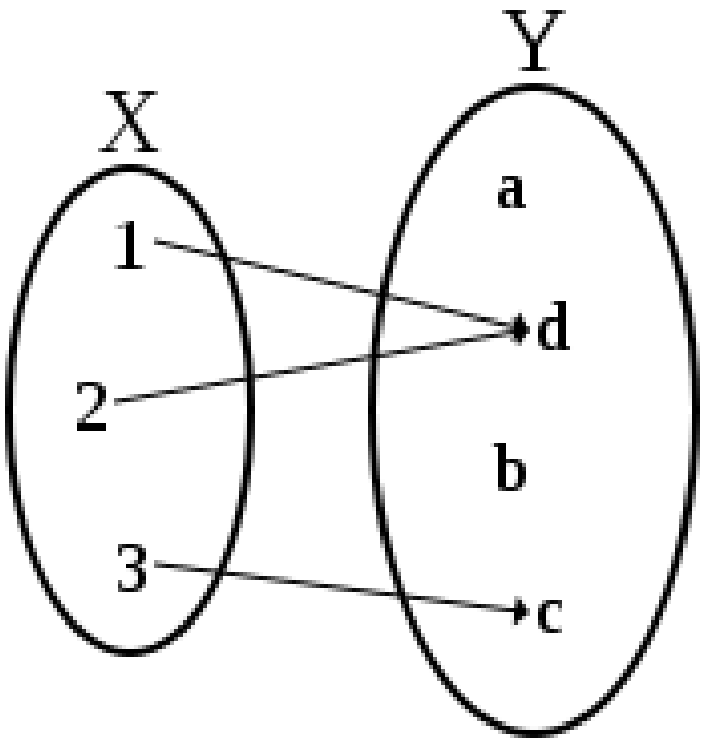
- Дефинисане помоћу уређених парова

f=

1	**2**	**3**
d	**d**	**c**

Графички приказ функције

$f: X \rightarrow Y$



Уобичајене ознаке и називи

- Ако је уређени пар $(x,y) \in f$ уобичајено је писати **$f(x)=y$**
- Тада кажемо да функција f пресликава x у y, а x зовемо оригиналом а y сликом
- Ако функција $f: A^2 \rightarrow A$, тада f називамо бинарном операцијом

Пример дефинисање функције формулом

$$f:R\rightarrow R,\ \ f(x)= x+1$$

- Представља функцију која је задата следећим уређеним паровима

$$f=\{(x,y)\,|\,x\in R\wedge\ y=x+1\}$$

- Односно

$$f=\{(x,x+1)\,|\,x\in R\}$$

Дефинисање једнакости функција

- За функције $f : A \to B$ и $g : C \to D$ важи

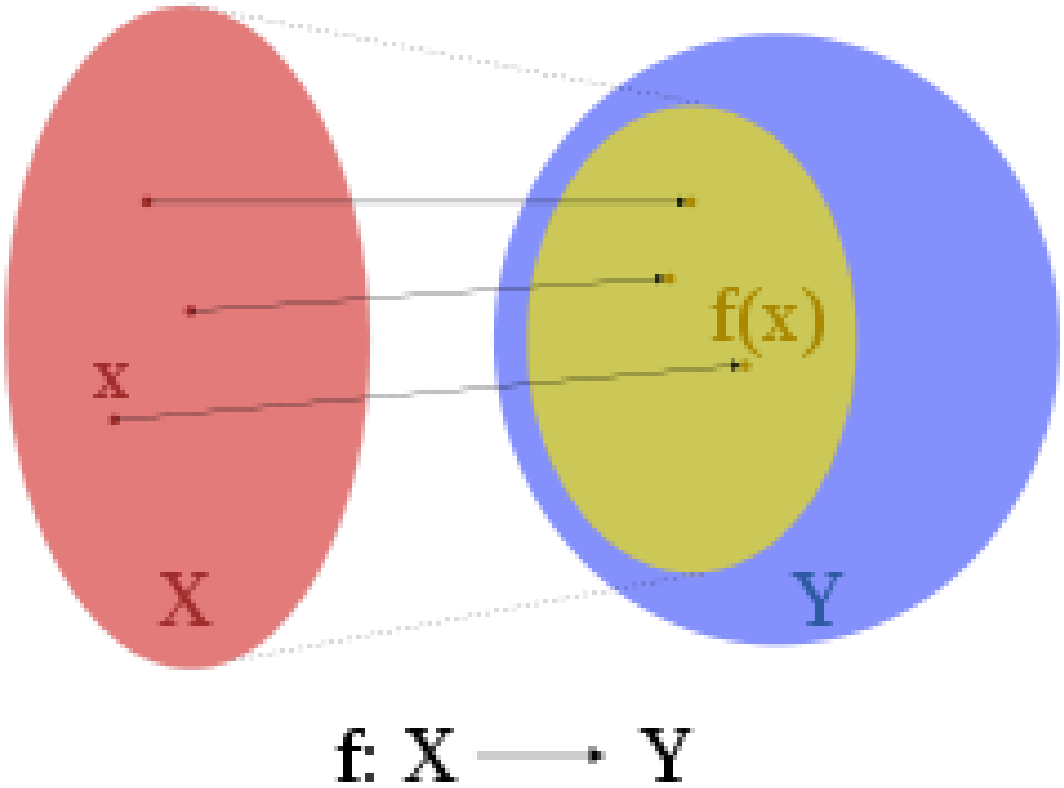
$$f=g \Leftrightarrow A=B \wedge B=D \wedge (\forall x \in A)(f(x)=g(x))$$

Слично као и код релација

Дефиниција домена и кодомена

- Скуп $D_x \subseteq A$, оних елемената $x \in A$ таквих да се пресликавају у неко $y \in B$ називамо скупом вредности или домен функције f (лакше је разумети као сви за које може да се израчуна)

- Скуп $D_y \subseteq B$, оних елемената $y \in B$ таквих да се у њих преликава неко $x \in A$ називамо области вредности или кодоменом функције f (лакше је разумети као сви за који могу да се добију)



Домен црвен, Кодомен зелен

Пример

$f: R \rightarrow R$

$f(x)=x^2$

- Домен $D_x = R$, Кодомен $D_y = R^+ \cup \{0\}$

$f: R \rightarrow R$

$f(x)= \sqrt{x}$

- Домен $D_x = R^+ \cup \{0\}$, Кодомен $D_y = R^+ \cup \{0\}$

Дефиниција инјективне функције

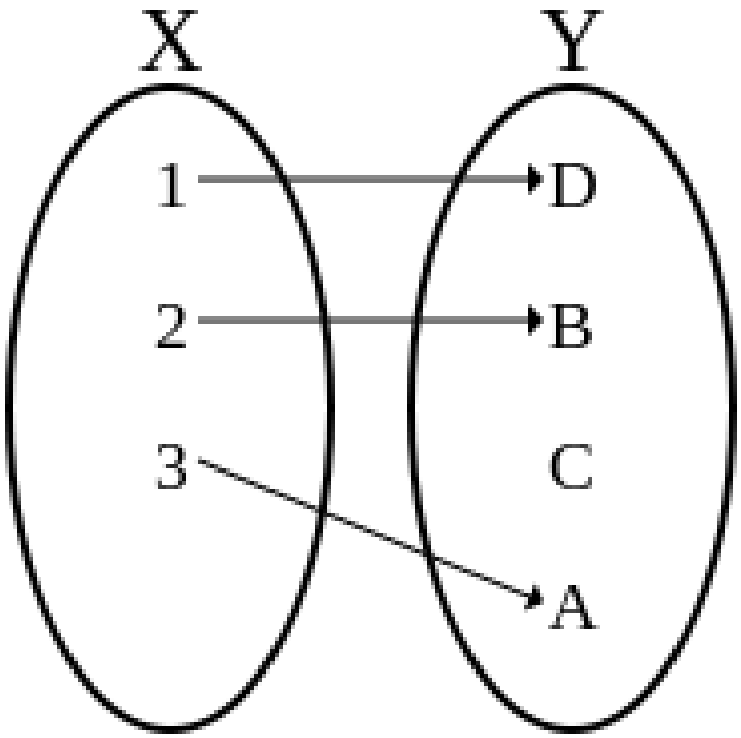
- Ако функција $f : A \rightarrow B$, се назива “1-1” или инјекција ако је

$$(\forall x,y \in A)(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

- Односно

$$(\forall x,y \in A)(f(x)=f(y) \Rightarrow x=y)$$

Пример инјективне функције



Најлакше је разумети као нема дупликата

Примери инјективних функције

$$f: R \rightarrow R$$

$$f(x) = x+1$$

- Треба проверити да ли важи

$$(\forall x,y \in R)(f(x)=f(y) \Rightarrow x=y)$$

- Провера

$$f(x)=f(y) \Leftrightarrow x+1=y+1 \Leftrightarrow x=y$$

- <u>Поента је крене се од f(x)=f(y) и стигне се до x=y</u>

$$f: R^{+} \rightarrow R$$

$$f(x) = x^2$$

- Треба проверити да ли важи

$$(\forall x,y \in R^{+})(x^2 = y^2 \Rightarrow x=y)$$

- Провера

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \Leftrightarrow |x| = |y|$$

Јесте тачно јер је у питању рестрикција само на позитивне бројеве

Пример функције која није инјективна

$$f: R \to R$$

$$f(x) = |x|$$

- Питање да ли важи

  $(\forall x,y \in R)(|x|=|y| \Rightarrow x=y)$ (1)

- Претпостављамо да није тачно тврђење (1)

$$\neg((\forall x,y \in R)(|x|=|y| \Rightarrow x=y) \Leftrightarrow$$

$$(\exists x,y \in R)(\neg(|x| \neq |y| \vee x=y) \Leftrightarrow$$

$$(\exists x,y \in R)(|x|=|y| \wedge x \neq y)$$

- Заменом $x=1$; $y=-1$ добијамо да је негативно тврђе тачно односно да f није инјекција

Дефиниција сурјективне функције

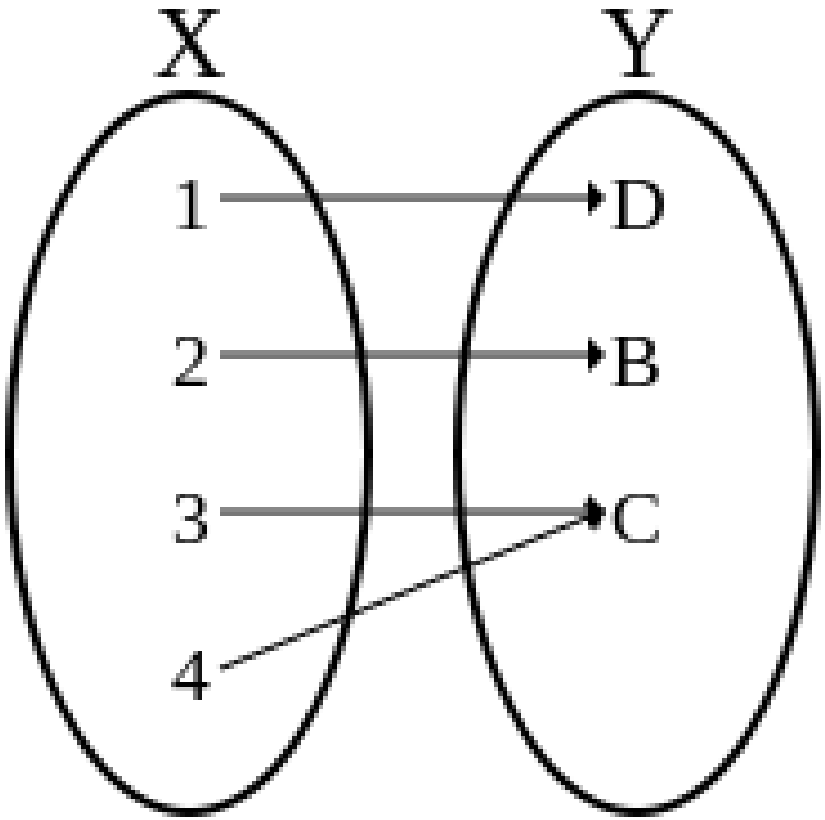
- Ако функција $f : A \rightarrow B$, се назива “на” или сурјекција ако је

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x)=y)$$

- Односно кодомен је цео скуп B

$$D_y = B$$

Пример сурјективне функције



Најлакше је разумети као сви су покривени

Примери сурјективне функције

$$f: R \to R$$

$$f(x) = x+1$$

- Треба проверити да ли важи

$$(\forall y \in R)(\exists x)(f(x)=y)$$

- Провера $(\forall y \in R)(\exists x)(x+1=y)$

$x+1=y \Leftrightarrow x=y-1$ односно $(\forall y \in R)\ (\exists x)(x=y-1)$

$$f: R \to R$$

$$f(x) = 2x$$

- Треба проверити да ли важи

$$(\forall y \in R)(\exists x)(2x=y)$$

- Провера

$2x=y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$ односно $(\forall y \in R)(\exists x)(x = \frac{y}{2})$

<u>ЦИЉ ЈЕ ИЗРАЗИТИ x преко Y</u>

Пример функције која није сурјективна

$$f: R \to R$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

- Питање да ли важи

$$(\forall y \in R)(\exists x \in R)(\sqrt{x} = y) \qquad (1)$$

- Претпостављамо да није тачно тврђење (1)

$$\neg((\forall y \in R)(\exists x \in R)(\sqrt{x} = y)) \Leftrightarrow$$

$$(\exists y \in R)(\forall x \in R)(\sqrt{x} \neq y) \Leftrightarrow$$

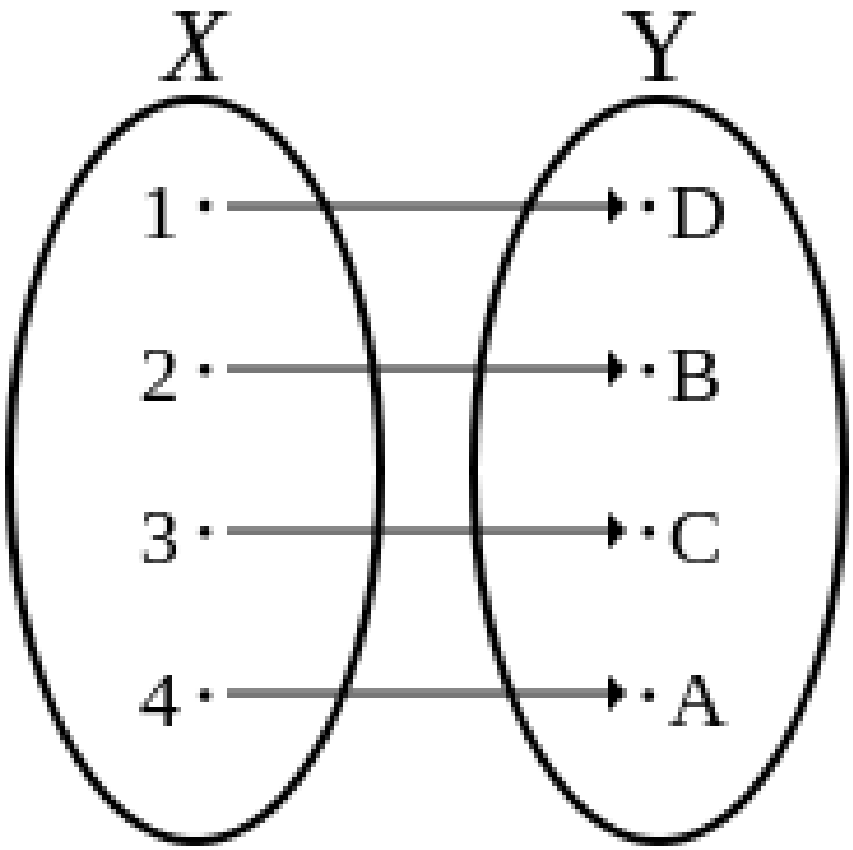
- Заменом y=-1; y=-1 добијамо да је негативно тврђе тачно односно да f није сурјективна

<u>Циљ је наћи један контра пример</u>

Дефиниција бијективне функције

- Ако функција f : A$\rightarrow$B, је бијективна ако је она “ 1 на 1 “ и “на”
- Бијективно пресликавање често зовемо и обострано једнозначно

Пример бијективне функције



Дефинисање композиције функција

- Нека су дате функције $f : A \to B$ и $g : B \to C$ тада пресликавање $h : A \to C$ задато на следећи начин

$$h=\{(x,g(f(x)))\mid x\in A\}$$

- Зовемо композицијом (слагањем, производом) пресликавања f и g и обележавамо са

$$h=g\circ f$$

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

Пример композиције функција

Ако су дати скупови

$$A = \{1,2,3\},\ B = \{a,b,c\} \text{ і } C = \{5,6,7\},$$

Где је

$$f : A \to B \text{ і } g : B \to C$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} \text{ і } g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Тада

$$g \circ f : A \to C$$

Гласи

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$