Кардиналност, Пребројивост

Професор: Рака Јовановић

Асистент: Јелена Јовановић

Кардиналност коначног скупа

- Кардиналност коначног скупа A је број елемената скупа A и обележава се са $|A|$
- Примери

$$A = \{a, b, c\}$$

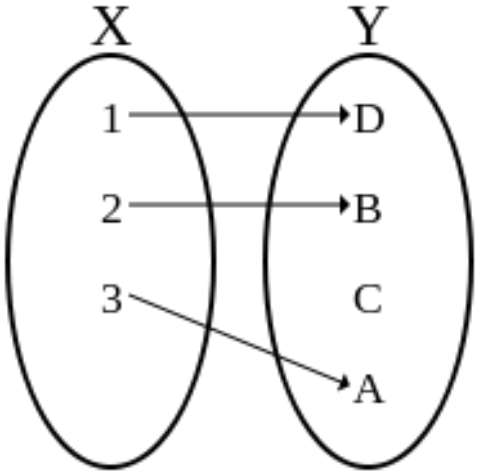
$$|A| = 3$$

$$\text{Card } A = 3$$

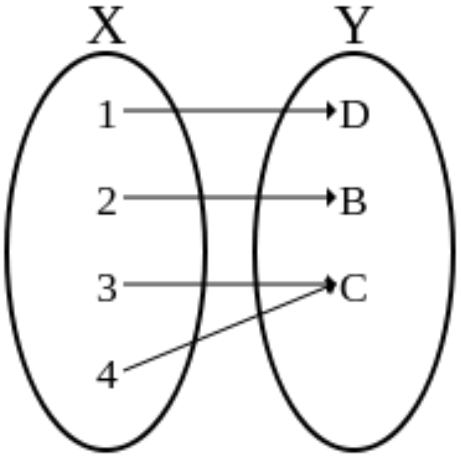
$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$$

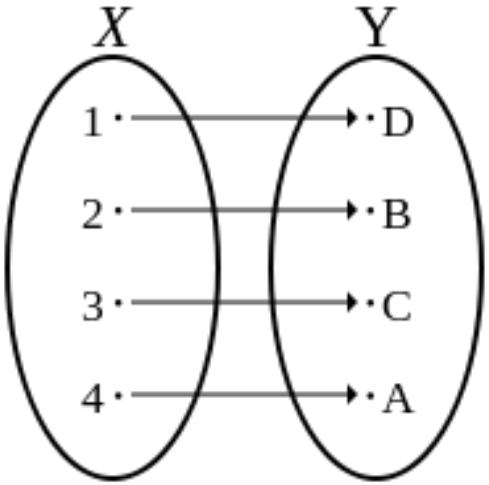
- Ако постоји инјективна функција $f: X \to Y$, тада важи $|\mathrm{X}| \leq |Y|$



- Ако постоји сурјективна функција $f: X \to Y$, тада важи $|\mathrm{X}| \geq |Y|$



- Ако постоји бијективна функција $f: X \to Y$, тада важи $|\mathrm{X}| = |Y|$



Колико је велик бесконачни скуп

- Јасно је да важи

$$A=\{1,2,3,4\}$$

$$|A| < |\mathbb{N}|$$

- Да ли је могуће упоређивати бесконачне скупове

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7.....\} = \mathbb{N}$$

$$B=\{2,4,6,8,10...\} \quad = \mathbb{N}_2$$

- Какав је однос између $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_2$?
- Шта заправо значи да један бесконачни скуп има више, мање или исто елемената као неки други бесконачан скуп

Дефиниција пребројивог скупа

N={1,2,3,4,5,6,7.....}

- Ако неки скуп A има исти кардинални број као и скуп природних бројева $\mathbb{N}$, односно

$$Card\ A = \mathrm{C}ard\ \mathbb{N} = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

  кажемо да је A пребројив скуп
- Знак $\aleph_0$ се чита као *алеф нула*
- Природне бројеве узимамо као основу дефинисање кардиналног броја бесконачног скупа

Једнакост кардиналног броја

- Два скупа A, B имају једнаки кардинални број ако постоји бијекција која пресликава A→B

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_2$$
$$f(x) = 2x$$

- Функција f је бијекција, значи имају исти кардинални број
- Парних бројева има пребројиво много

Скуп A је пребројив ако може да се поређа у низ

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & \dots & 2\cdot n & \cdots \end{array}$$

- Једноставан начин да се дефинише функције над бесконачним скупом
- Слично као што је једноставно дефинисати функцију у облику табеле за коначне скупове

Целих бројева има пребројиво много

- Све целе бројеве $\mathbb{Z}$, је могуће поређати у низ
  - $\mathbb{N} = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6 \ldots\}$
  - $\mathbb{Z} = \{1, \ -1, \quad 2, \quad -2, \quad 3, -3 \ldots\}$
- Илустрација ређања у низ скупа $\mathbb{N}$
  - $1 \rightarrow \quad 2 \ \rightarrow 3 \rightarrow \quad 4 \rightarrow 5 \rightarrow \quad 6 \ldots.$
- Илустрација ређања у низ скупа $\mathbb{Z}$
  - $1 \rightarrow -1 \rightarrow \ 2 \rightarrow -2 \rightarrow 3 \rightarrow -3 \ldots.$
- Значи

$$Card\ \mathbb{N} = Card\ \mathbb{Z}$$

Скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$ је пребројив

- Да ли је могуће направити бијективно пресликавање $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
- Тешко је дати је у облику функције f(x) која је дата неком формулом
- Довољно је све рационалне бројеве поређати су низ $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$
- Онда је тражена функција

$$f(1)= a_1 , f(2)= a_2, f(3)= a_3 , f(4)= a_4 \ldots\ldots$$

Све разломке је могуће поређати у низ

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	⋯
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	⋯
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	⋯
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	⋯
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	⋯
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	⋯
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	⋯
8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Пример непребројивог скупа

- Скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ је непребројив и кажемо да је

$$Card\ \mathbb{R} = |\mathbb{R}| = \aleph_1$$

$$Card\ \mathbb{R} > Card\ \mathbb{N} \Leftrightarrow \aleph_1 > \aleph_0$$

- Постоје бесконачни скупови који нису пребројиви, односно постоји бесконачни скуп за који не постоји бијективно пресликавање на скуп природних бројева
- Шта су реални бројеви?

Апроксимација реалних бројева

- Број који се може записати у облику

$$n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \dots + \frac{d_n}{10^n} \quad (n_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}, n \in \mathbb{N},$$

$$n_0 \,.\, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots.$$

или њему супротан број (негативан), зове се децимални број.

- Сваки реалан број се може представити у облику децималног броја
- На пример $\sqrt{2}$ се може представити као децималан број

Сваки периодичан децималан број је могуће представити у облику разломка

- $h = 0.55555..$
- $10h = 5.5555\ldots$
- $10h = 5 + h$
- $9h = 5$
- $h = \frac{5}{9}$

- $h = 0.27272727 \ldots$
- $100h = 27.272727 \ldots$
- $100h = 27 + h$
- $99h = 27$
- $h = \frac{27}{99}$

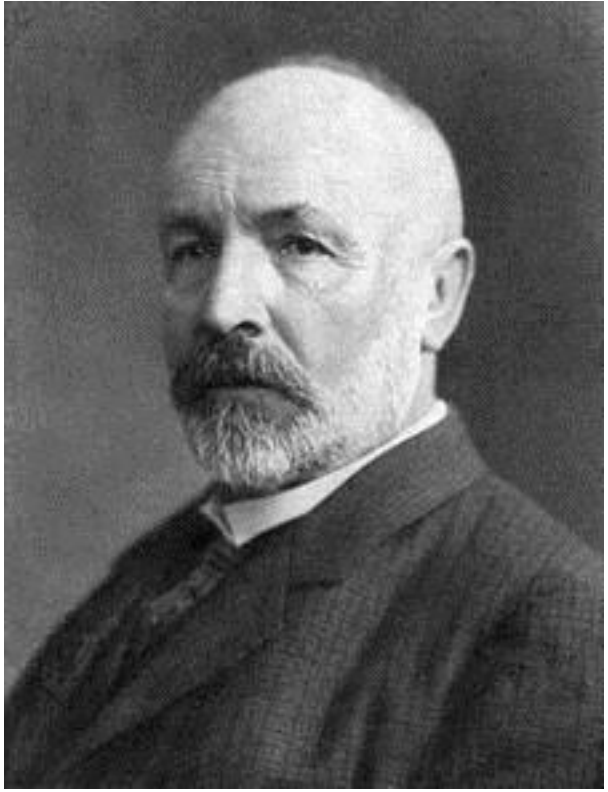
- Периодичних децималних бројева има бар колико разломака
- Сваки разломак се може представити у облику периодичног децималног броја (познато)

- Постоји децималан број који није периодичан, односно не налази се у листи свих пребројаних

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
E_0 = & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \cdots \\
E_1 = & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \cdots \\
E_2 = & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \cdots \\
E_3 = & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \cdots \\
E_4 = & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \cdots \\
E_5 = & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \cdots \\
E_6 = & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \cdots \\
E_7 = & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \cdots \\
E_8 = & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \cdots \\
E_9 = & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \cdots \\
E_{10} = & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \cdots \\
E_{11} = & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
E_u \neq & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{m} & \mathrm{w} & \cdots
\end{array}
$$

- E_n се разликује од сваког пребројаног елемента на бар једној цифри

Џорџ Кантор



- Канторов аргумент дијагонале
- Канторов парадокс
- Канторов простор
- Канторова функција
- Кантор скуп

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right).$$