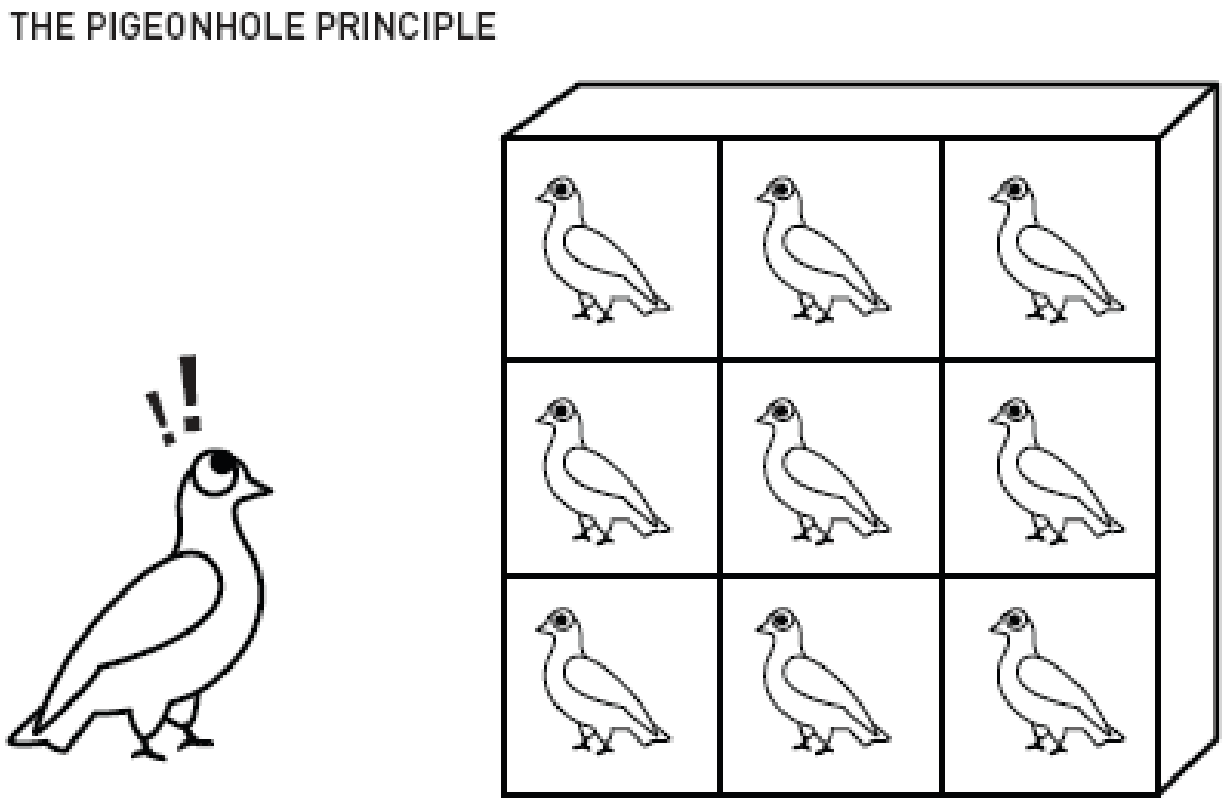
# Пиџен-хоул принцип, Математички доказ

Професор: Рака Јовановић

Асистент: Јелена Јовановић

# Идеја пиџенхоул принципа

- Ако постоји m рупа, и у њих слети m+1 голуб, тада у бар једној рупи има 2 голуба



# Пример употребе

- Ако има имамо 51 природан број из опсега [1, 100], тада међу њима постоје бар два узастопна броја
- Могуће је направити 50 парова узастопних бројева на интервалу [1, 100]

$$\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \ldots, \{99,100\}$$

- Рецимо да су парови рупе, а избрани бројеви голубови
- На основу пигенхоул принципа знамо да ће у једном од парова бити бар два броја

# Пиџенхоул принцип

- $\lfloor x \rfloor$представља највећи цео број који није већи од $x$, (floor, функција пода)

$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \lfloor 2.15 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3$$

- $\lceil x \rceil$ представља најмањи цео број који није мањи $x$(ceiling, функција плафона)

$$\lceil 2 \rceil = 2, \lceil 2.15 \rceil = 3, \lceil \pi \rceil = 4$$

- Ако постоји m рупа, и у њих слети n голубова тада:
  1. У бар једној рупи има више или једнако од$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$голубова
  2. У бар једној рупи има мање или једнако од $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ голубова

# Пример

- Ако имамо 16 голубова, и 5 рупа тада

$$\left\lfloor \frac{16}{5} \right\rfloor = \lfloor 3.2 \rfloor = 3$$

$$\left\lceil \frac{16}{5} \right\rceil = \lceil 3.2 \rceil = 4$$

1. У бар једној рупи има не мање од 4 голуба
2. У бар једној рупа не више од 3 голубова

# Доказ Пиџенхоул принципа (став 1)

- Претпоставимо супротно: да у свакој рупи рупи има не више од $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$
- Знамо да важи

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \lceil x \rceil - 1 < x$$

- Значи,

$$m\left(\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1\right) < m * \frac{n}{m} < n$$

- Шта је контарадикција јер смо добили да имамо мање од n голубова
- Став под 2 се доказује јако слично употребом:

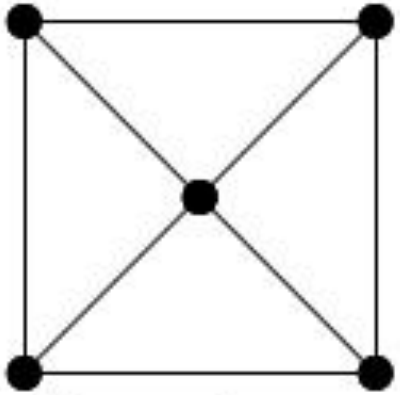
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \lfloor x \rfloor + 1 > x$$

# Како осмислити голубове и рупе?

- Појмови рупа и голубова доста апрстрактни у самом принципу
- Често је добро скицирати пар примера проблема, да би се развила идеја како употребити принцип
- Пример:

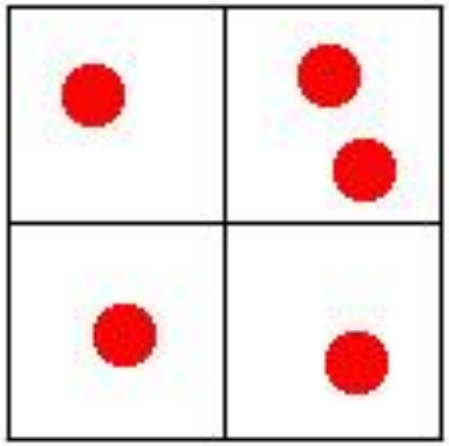
Постоји 5 тачака у квадрату чија је странице дужине 2, доказати да су бар две тачке на удаљености мањој од $\sqrt{2}$

- Почетна идеја је ставити све тачке на најудаљенија места. Значи темена и пресек дијагона. Али оне су на удаљености $\sqrt{2}$.



- Како бити сигуран?

- Поделити квадрат на 4 чија је дужина ивице 1.
- У сваком од квадрата су тачке на удаљености мањој од $\sqrt{2}$
- На основу пиџенхоул принципа знамо да су две тачке у једном квадрат



# Важне особине принципа

- Принципом се доказује да нешто постоји, одређен број елемената у рупи, односно да је неки услов задовољен
- Важно је разумети да принцип не даје информације о свим рупама, већ само о бар једне са одређеним бројем елемената.
- Екстреман случај сви елементи у једној рупи

# Употреба принципа за налажење горих или доњих граница

- Да ли је могуће помоћу принципа радити још нешто осим доказивања тврђења
- Да ли је у примеру са избора 51 броја из интервала [1, 100], могуће тврдити исто и за 50?
- Да би се доказало да је нешто доња граница, потребно је показати да не постоји ни један мањи контра пример

- Треба показати да није могуће заменити 51 са 50 у претходном примеру
- Довољно је наћи контра-пример, односно пример 50 бројева који нису узастопни
- Значи опет можемо дефинисати 50 парова узастопних, и из сваког од њих изаберомо по један број

Рупе : {{1,2}, {3,4},{5,6}....}

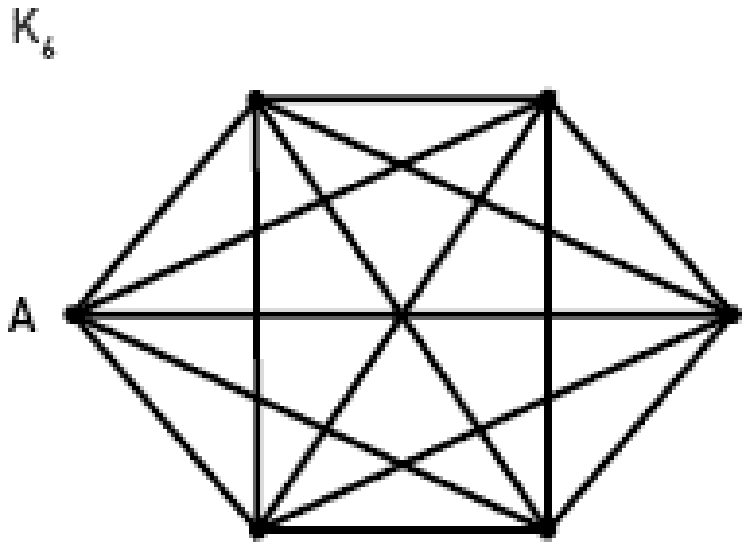
- Контра примери :

{1,3,5,....}

{2,4,6,....}

# Рамзијев (Ramsey) Принцип

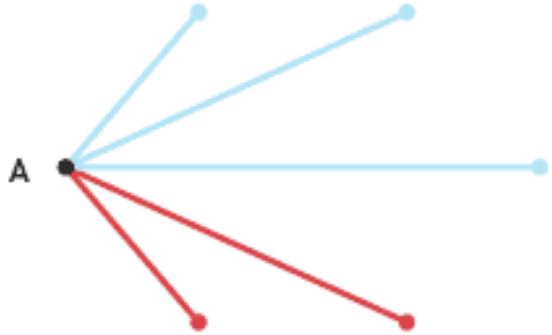
- На забави има 6 особа, тада постоји бар 3 особе које се све међусобно познају, или 3 особе које се све међусобно не познају




Све могућа познанства за групу од 6 људи

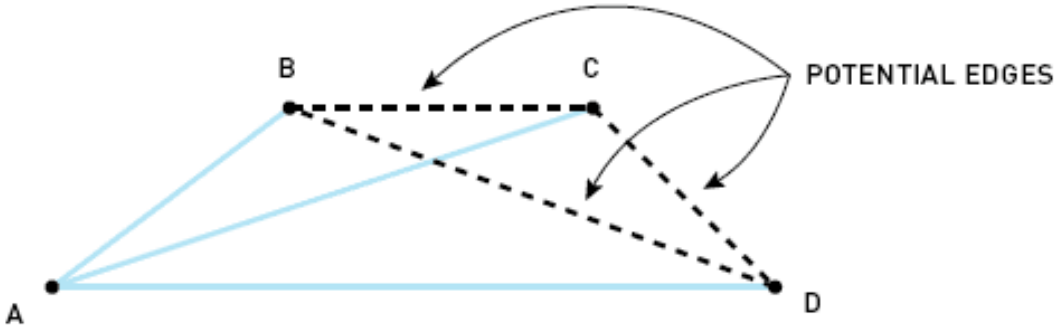
- Пошто једна особа  има укупно пет суседа мора бар 3 да познаје или не познаје

A'S FIVE CONNECTIONS, ALSO KNOWN AS A'S NEIGHBORS

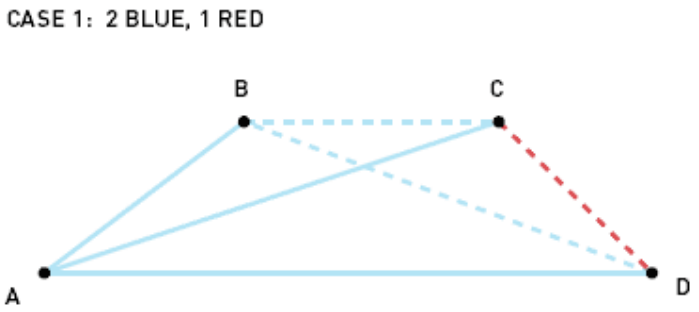



- Треба испитати потенцијална познантства

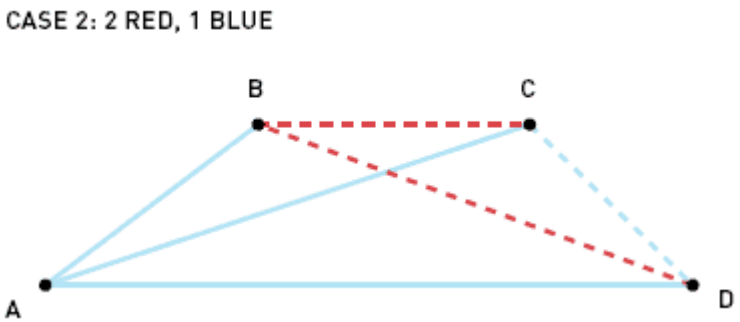
VERTICES B, C AND D WILL BE CONNECTED BY EITHER A RED EDGE OR A BLUE EDGE



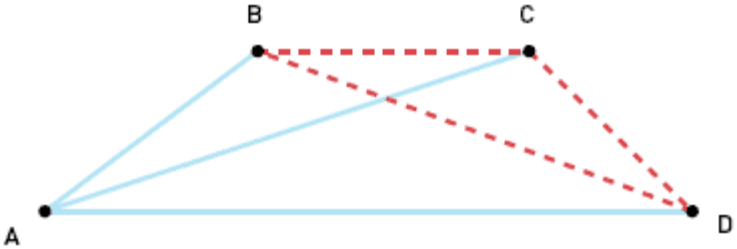
- 2 плаве, 1 црвена




- 1 плава, 2 црвене




- 3 црвеве




- Јасно се види, да се у

сваком од могућих случајева појави

бар један троугао у ком су све ивице црвене или плаве

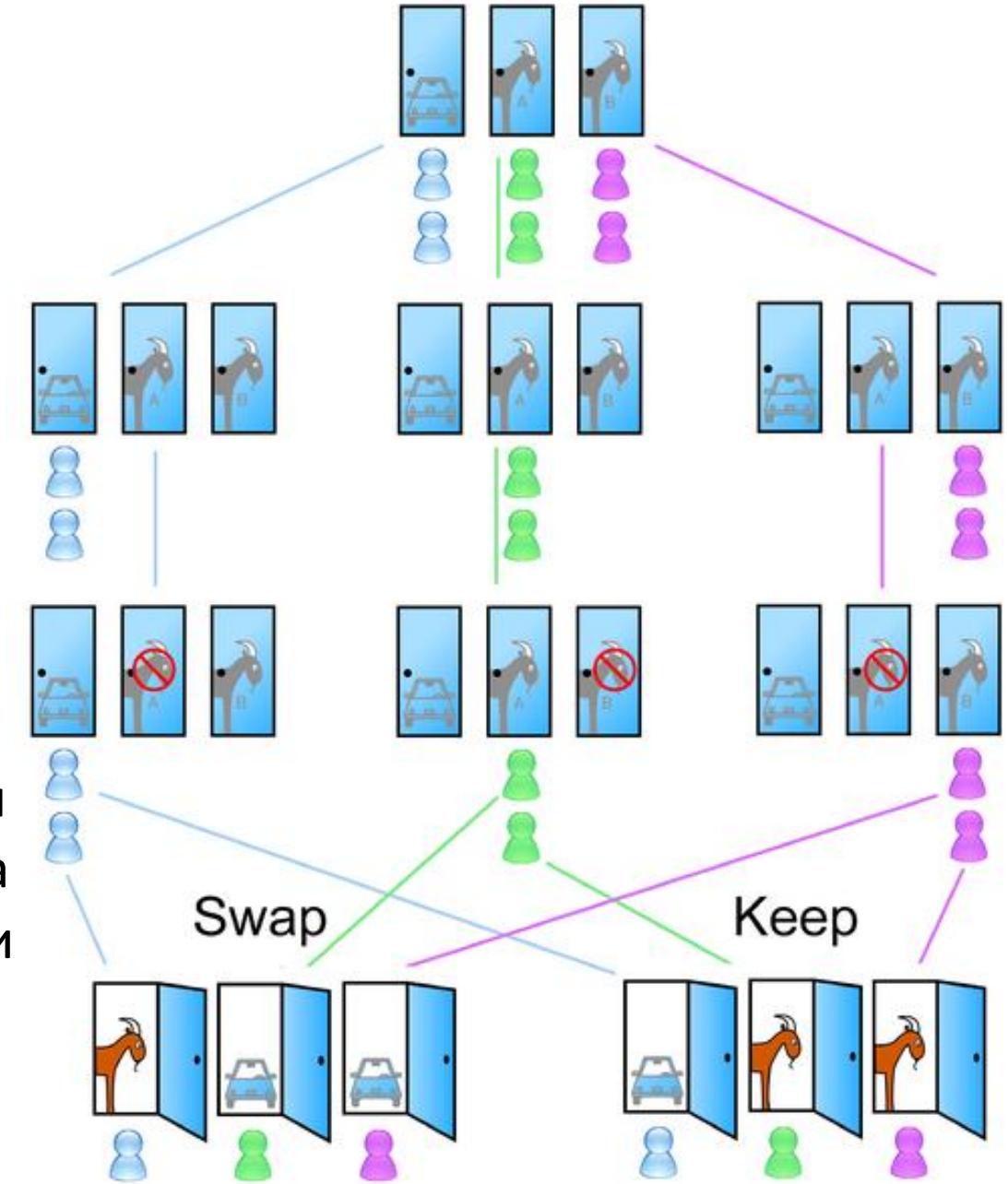
# Проблем Монти Хола (Занимљивост као моћ доказ)

1. На сцену су постављена троја врата идентичног облика величине и боје. Такмичару је речено да се иза само једних врата налази вредна награда (аутомобил), а да иза преосталих врата нема ничега. Такмичар има могућност да бира једна врата која ће да се отворе и ако се иза тих врата налази награда, такмичар је узима.
2. Монти Хол прави следећу понуду, или деал. Наиме, од преосталих двојих врата, он отвара једна и показује да иза њих није награда. Приметимо да је Монтију то увек могуће да уради јер он зна иза којих врата је награда. И тада Монти прави следећи деал: он нуди такмичару да (а) или остане са својим првобитним избором, или (б) промени одлуку и определи се за врата која Монти није отворио.
3. Монти Хол проблем је следеци: да ли је такмичару боље (има већу вероватноћу да погоди где је награда) ако остане при свом првобитном избору, или да промени одлуку и изабере она једна преостала, неотворена, врата?

Не интуитивно али је тачно да су шансе да освојимо кола

- 1/3 ако остајемо при почетним вратима
- 2/3 ако заменимо наша врата

Само квизови нису наивни и ако је наш Монти намазан, па на специфичан начин нуди отварање врата могу се драстично смањити наше шансе



# Математички доказ

- Шта значи доказати нешто?
- У многим наукама  може се користити експеримент, за постизање “задовољавајућег” доказа (емпиријски)
- У математици докази су затворени, могу да се изграде само на основу математичких алата
- Аксиоме, дефиниције, теореме, логика
- Постоје тврђења у математици које није могуће доказати, али су оне ретке и обично нису од интереса

# Дедуктивни доказ

- Концепт уведен још у време Старе Грчке, Талес, Питагора и строга формализација Еуклид
- Дедукција доказује
  - Од општег ка појединачном
  - Од познатог ка не познатом
- До закључака се долази на основу других, раније познатих ставова односно законитости и премиса
- Дедуктивност значи изводљивост
- Дедуктивне методе не улазе у питање да ли су премисе или претпоставке тачне, већ се прихватају као такве

# Језик дедуктивне теорије

- Основни појмови: Појмови који се не дефинишу већ се само користе

Тачка, Права, између, Скуп...

- Аксиома: Тврђење које се не доказује већ се само прихватају

Ако на правој постоје тачке А, В тада постоји тачка С таква да се В налази између А и С

- Дефиниција: Дефинишу се нови појмови само на основу основних појмова и предходно дефинисаних

За две праве кажемо да се секу ако имају тачно једну заједничку тачку

# Још неке карактеристике

- Аксиоме не смеју бити контрадикторне
- Морамо имати довољан број аксиома да би могли да дефинишемо теорију од интереса
- Последице аксиома су теореме
- Све теореме, тврђења, леме и ставови се морају доказати
- Премисе, хипотезе → Закључак
- Битни су само случајеви када су премисе тачне

# Директни доказ

- Директан доказ иде од премиса ка закључку који показујемо
- Не формално трансформишемо премисе на начин да добијемо жељени закључак
- Пример:
- Дефиниција 1: Природни број $n$ називамо параним, ако има остатак $0$ придељењу са $2$
- Дефиниција 2: Природни број $n$ називамо непараним, ако има остатак $1$ при дељењу са $2$

- Пропозиција: Квадрат парног броја n је такође паран
- Реформулација у облик који одговара математичкој логици
- Ако је n паран број, онда је n*n паран број (импликација ⇒)

$$n = 2m$$

$$n^2 = n * n = 2m * 2m = 2 * (2m^2)$$

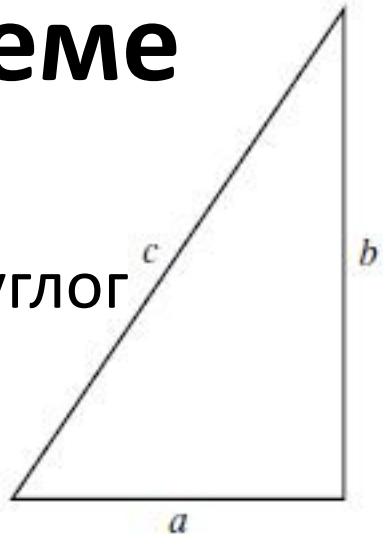
- Показали смо жељено тврђење

- Пропозиција: Квадрат непарног броја n је такође непаран
- Ако је n непаран број, онда је n*n непаран број (импликација ⇒)

$$n = 2m + 1$$
$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$$
$$= 2 * (2m^2 + m) + 1$$

- Показали смо жељено тврђење
- Код математике интуиција је важна, али сви докази морају ригорозно да се спроведу

# Доказ Питагорине теореме

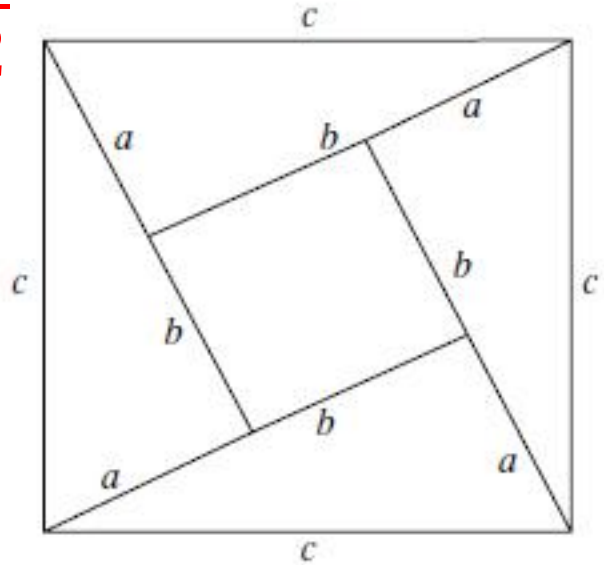



- Нека је c хипотенуза, а a и b катете правоуглог троугла тада важи

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- Констуишимо квадрат као на слици

$$\measuredangle ac + \measuredangle bc = \frac{\pi}{2}$$




- Ивица великог квадрата је c
- Ивица малог квадрата је b-a
- $c^2 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2 =$
- $= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = b^2 + a^2$

# Доказ контрадикцијом

- Сваки математички исказ је или тачан или нетачан
- Значи ако за неко тврђење $A$ можемо рећи да је $\neg A$ (негација од $A$) нетачно, одатле знамо да је $A$ тачно.
- Користимо га ако је директан доказ сувише комплексан

- Пример:
- Не постоји рационалан број x такав да је $x^2 = 2$

$$\neg((\exists x \in \mathbb{Q})(x^2 = 2))$$

- Покушајмо да докажемо да супротно тврђење не може бити тачно, односно

$$((\exists x \in \mathbb{Q})(x^2 = 2)) \Leftrightarrow \perp$$

- Да је x рационалан број значи да се може представити, као

$$x = \frac{q}{p}$$

$$p, q \in \mathbb{Z}$$

- $p, q$ су узајамно прости
- $p, q \geq 0$
- На основу наше хипотезе знамо да важи

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

- Напишимо у следећем облику

$$p^2 = 2q^2$$

- Из ове једнакости следи да је p паран број јер је његов квадрат паран, па можемо написати

$$p = 2r$$

$$(2r)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2r^2 = q^2$$

- Значи на на основу предходно доказаног знамо да је q паран број
- Дошли смо до закључка да су и p и q парни, односно да нису узајамно прости

Значи доказали смо да је негација почетно тврђења контарадикција, односно да је почетно тврђење тачно