Sadržaj

Glava 1

ISKAZNA I PREDIKATSKA LOGIKA

Iskazna logika

Iskaz je rečenica koja je ili samo tačna ili samo netačna. Iskaze označavamo slovima $p, q, r, \ldots$ koja se zovu iskazna slova. Reći ćemo kraće „iskaz p" umesto „p je oznaka za neki iskaz". Ako je iskaz p tačan, pišemo $\tau(p) = \top$, a ako je iskaz q netačan, pišemo $\tau(q) = \perp$. Složeni iskazi konstruišu se iz prostih pomoču logičkih operacija. Važnije logičke operacije (logički veznici) su: konjunkcija ($\wedge$), disjunkcija ($\vee$), implikacija ($\Longrightarrow$), ekvivalencija ($\Longleftrightarrow$) i negacija ($\neg$).

Konjunkcija redom iskaza p, q je iskaz „p i q". Konjunkcija je tačan iskaz samo ako su iskaz p i iskaz q tačni. U svim ostalim slučajevima konjunkcija je netačan iskaz. Konjunkciju „p i q" označavamo $p \wedge q$.

Disjunkcija redom iskaza p, q je iskaz „p ili q". Disjunkcija je netačan iskaz samo ako su iskaz p i iskaz q netačni. U svim ostalim slučajevima disjunkcija je tačan iskaz. Disjunkciju „p ili q" označavamo $p \vee q$.

Implikacija redom iskaza p, q je iskaz „ako p, onda q". Implikacija je netačan iskaz samo ako je iskaz p tačan, a iskaz q netačan. U svim ostalim slučajevima implikacija je tačan iskaz. Implikaciju „ako p, onda q" označavamo $p \Longrightarrow q$. Iskaz „ako p, onda q" ima isto značenje kao i sledeće rečenice:

Iz p sledi q; p povlači q; q je potreban (neophodan) uslov za p;
p je dovoljan uslov za q; p samo ako q; p je pretpostavka za q.

Ekvivalencija redom iskaza p, q je iskaz „p ako i samo ako q”. Ekvivalencija je tačan iskaz samo ako su p i q ili oba tačni ili oba netačni iskazi. U svim ostalim slučajevima ekvivalencija je netačan iskaz. Ekvivalenciju „p akko q” označavamo $p \Longleftrightarrow q$. Iskaz „p ako i samo ako q” ima isto značenje kao i sledeće rečenice:

Ako p onda q i ako q onda p; p je ekvivalentno sa q;
p je potreban i dovoljan uslov za q.

Negacija iskaza p je iskaz ,, nije p”. Negacija iskaza p je tačan iskaz ako je iskaz p netačan, a netačan iskaz ako je iskaz p tačan. Negaciju ,, nije p”, označavamo $\neg p$.

Iskaze formalno beležimo uz pomoć iskaznih formula.

Iskazne formule definišemo na sledeći način:

1. Iskazna slova su iskazne formule.
2. Ako su A i B iskazne formule, onda su i $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Longrightarrow B)$, $(A \Longleftrightarrow B)$ iskazne formule.
3. Iskazne formule se mogu dobiti samo konačnom primenom 1. i 2.

Iskazima i odgovarajućim formulama pridružuju se istinitosne vrednosti i to: tačnom iskazu dodeljuje se vrednost $\top$, a netačnom vrednost $\bot$. Iskazna formula koja je tačna za sve moguće vrednosti svojih iskaznih slova zove se tautologija.

Predikatska logika

Ako je $P(x)$ zapis rečenice „x ima svojstvo P”, onda se rečenica ,,za svako x, x ima svojstvo P” označava sa $(\forall x)P(x)$. Oznaka $(\forall x)$ je univerzalni kvantifikator. Rečenica ,,postoji x takvo da x ima svojstvo P” označava se sa $(\exists x)P(x)$ i tu je $(\exists x)$ egzistencijalni kvantifikator.

Potpuno određeni matematički objekti zovu se konstante. Promenljive su zajedničke oznake za više određenih objekata.

Termi se definišu na sledeći način:

1. Znaci konstanti i promenljive su termi.

2. Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi i f_m^n funkcijski znak, onda je i $f_m^n(t_1, \ldots, t_n)$ term.

3. Termi se mogu dobiti samo konačnom primenom 1. i 2.

Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi i R_i^n relacijski znak, onda reč $R_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ zovemo elementarna formula.

Predikatske formule ili kraće formule, definišemo na sledeći način:

1. Elementarna formula je formula.

2. Ako su A, B formule i x promenljiva, onda su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Longrightarrow B)$, $(A \Longleftrightarrow B)$, $\neg A$, $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ formule.

3. Formule se mogu dobiti jedino konačnom primenom 1. i 2.

1.1 Zadaci

Ispitati da li je data iskazna formula tautologija (1 - 19).

Zadatak 1 $\neg(p \wedge \neg p)$

Zadatak 2 $p \vee \neg p$

Zadatak 3 $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Zadatak 4 $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

Zadatak 5 $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Zadatak 6 $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Zadatak 7 $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Zadatak 8 $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg p \vee q$

Zadatak 9 $\neg(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow p \wedge \neg q$

Zadatak 10 $p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$

Zadatak 11 $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$

Zadatak 12 $p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee r$

Zadatak 13 $p \wedge (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

Zadatak 14 $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Zadatak 15 $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Zadatak 16 $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow q$

Zadatak 17 $((\neg p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r)) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \neg r)) \Rightarrow \neg r$

Zadatak 18 $(p \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow p_1) \vee (p \Rightarrow p_2) \vee \ldots \vee (p \Rightarrow p_n)$

Zadatak 19 $((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow p) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow p_1) \vee (p \Rightarrow p_2) \vee \ldots \vee (p \Rightarrow p_n)$

Zadatak 20 *Odrediti istinitosnu vrednost formule*

$$F : (\neg p \Rightarrow q) \wedge (p \vee \neg q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge q \Rightarrow \neg q)$$

ako su vrednosti iskaznih slova p, q *određene sa* $\tau((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p) = \perp$.

Zadatak 21 *Koje od sledećih rečenica su tačne u skupu prirodnih brojeva:* $(\exists x)(x < 5)$, $(\forall x)(x \geq 0)$, $(\exists x)(3x{+}2 = 3)$, $(\exists x)(x{+}7 = 11)$, $\neg(\exists x)(x < 5 \wedge x > 10)$, $(\forall x)(\exists y)(x < y)$, $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$, $(\forall x)(\exists y)(x > y)$, $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$, $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = x)$.

Koristeći logičke operacije zapisati sledeće rečenice (22 - 32).

Zadatak 22 *z je najmanji zajednički sadržalac za x i y.*

Zadatak 23 *x je potpun kvadrat.*

Zadatak 24 *Postoji najviše jedan ceo broj čiji je kvadrat* 0.

Zadatak 25 *Postoji tačno jedan ceo broj čiji je kvadrat* 0.

Zadatak 26 *Postoje najviše dva različita realna broja čija je apsolutna vrednost* 3.

Zadatak 27 *Ne postoji najveći ceo broj.*

Zadatak 28 *Između svaka dva različita racionalna broja postoji racionalan broj.*

Zadatak 29 *Postoji najmanji prirodni broj.*

Zadatak 30 *Postoji prirodni broj koji se sadrži u* 6 *i koji je veći od* 2.

Zadatak 31 *Za svaki ceo broj x postoji ceo broj y tako da je $x + y = 0$.*

Zadatak 32 *Za svaki ceo broj x postoji ceo broj $y \geq 0$ tako da je $x^2 = y$.*

1.2 Rešenja

Rešenje 1

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

Rešenje 2 Jeste

Rešenje 3

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

Rešenje 4 Jeste

Rešenje 5 Jeste

Rešenje 6

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	F
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Rešenje 7 Jeste

Rešenje 8 Jeste

Rešenje 9

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$	F
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Rešenje 10 Jeste

Rešenje 11 Jeste

Rešenje 12

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Rešenje 13 Jeste

Rešenje 14 Jeste

Rešenje 15 Jeste

Rešenje 16

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Rešenje 17 1) $\tau(p) = \top$

$$\begin{aligned}
\tau(F) &= \tau[((\bot \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \wedge (\bot \Rightarrow \neg r) \wedge (q \Rightarrow \neg r)) \Rightarrow \neg r] \\
&= \tau[(\top \wedge \top \wedge (q \Rightarrow \neg r)) \Rightarrow \neg r] \\
&= \tau[(q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg r]
\end{aligned}$$

(1.1.) $\tau(q) = \top$

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \tau[(\top \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg r] \\ &= \tau[\neg r \Rightarrow \neg r] \\ &= \top \end{aligned}$$

(1.2.) $\tau(q) = \bot$

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \tau[(\bot \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg r] \\ &= \tau[\top \Rightarrow \neg r] \\ &= \tau(\neg r) \end{aligned}$$

Formula F nije tautologija jer je netačna ako je $\tau(p) = \tau(r) = \top$ i $\tau(q) = \bot$.

Rešenje 18 1) $\tau(p) = \top$

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \tau[(\top \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)) \Leftrightarrow (\top \Rightarrow p_1) \vee (\top \Rightarrow p_2) \vee \ldots \vee (\top \Rightarrow p_n)] \\ &= \tau[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \Leftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)] \\ &= \top \end{aligned}$$

2) $\tau(p) = \bot$

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \tau[(\bot \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)) \Leftrightarrow (\bot \Rightarrow p_1) \vee (\bot \Rightarrow p_2) \vee \ldots \vee (\bot \Rightarrow p_n)] \\ &= \tau[\top \Leftrightarrow (\top \vee \top \vee \ldots \vee \top)] \\ &= \top \end{aligned}$$

Formula F jeste tautologija.

Rešenje 19 $\tau(p) = \top$

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \tau[((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow \top) \Leftrightarrow ((\top \Rightarrow p_1) \vee (\top \Rightarrow p_2) \vee \ldots \vee (\top \Rightarrow p_n))] \\ &= \tau[\top \Leftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)] \\ &= \tau[p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n] \end{aligned}$$

Formula F nuje tautologija, jer je netačna ako je $\tau(p) = \top$ i $\tau(p_1) = \tau(p_2) = \cdots = \tau(p_n) = \bot$.

Rešenje 20 Ako je $\tau((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p) = \bot$, onda je $\tau(p) = \top$ i $\tau(q) = \bot$.

$$\begin{aligned} \tau(F) &= (\bot \Rightarrow \bot) \wedge (\top \vee \top) \Longleftrightarrow (\bot \wedge \bot \Rightarrow \top) \\ &= \top \wedge \top \Longleftrightarrow \bot \Rightarrow \top \\ &= \top \Longleftrightarrow \top \\ &= \top \end{aligned}$$

Rešenje 21 Rečenice su redom: tačna, tačna, netačna, tačna, tačna, tačna, tačna, netačna, tačna, tačna.

Rešenje 22 $x \mid z \ \wedge \ y \mid z \ \wedge \ (\forall u)(x \mid u \ \wedge \ y \mid u \ \Rightarrow \ z \mid u)$

Rešenje 23 $(\exists y)(x = y^2)$

Rešenje 24 $\neg(\exists x \in Z)(\exists y \in Z)(x^2 = 0 \ \wedge \ y^2 = 0 \ \wedge \ x \neq y)$ ili $(\forall x \in Z)(\forall y \in Z)(x^2 = 0 \ \wedge \ y^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = y)$

Rešenje 25 $(\exists x \in Z)(x^2 = 0 \ \wedge \ (\forall y \in Z)(y^2 = 0 \Rightarrow x = y))$

Rešenje 26 $\neg(\exists x \in R)(\exists y \in R)(\exists z \in R)(|x| = 3 \ \wedge \ |y| = 3 \ \wedge \ |z| = 3 \ \wedge \ x \neq y \ \wedge \ x \neq z \ \wedge \ y \neq z)$

Rešenje 27 $\neg(\exists x \in Z)(\forall y \in Z)(y \leq x)$ ili $(\forall x \in Z)(\exists y \in Z)(x \leq y)$

Rešenje 28 $(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(\exists z \in Q)(x \neq y \Rightarrow (x < z < y \ \vee \ y < z < x))$

Rešenje 29 $(\exists x \in N)(\forall y \in N)(x \leq y)$

Rešenje 30 $(\exists x \in N)(x \mid 6 \ \wedge \ x > 2)$

Rešenje 31 $(\forall x \in Z)(\exists y \in Z)(x + y = 0)$

Rešenje 32 $(\forall x \in Z)(\exists y \in Z)(y \geq 0 \ \wedge \ x^2 = y)$

Glava 2

SKUPOVI

Skup je odredjen ako se mogu navesti svi njegovi elementi ili uslov koji oni ispunjavaju. To označavamo $A = \{a, b, c, ..., l\}$ ili $B = \{x \mid p(x)\}$. Ako je x element skupa A, to pišemo $x \in A$. Prazan skup je skup bez elemenata i označavamo ga sa $\emptyset$ ili $\{\}$. Skupove označavamo velikim, a njihove elemente, uglavnom, malim slovima.

Skup A je jednak skupu B ako su im elementi isti, tj.

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B).$$

Skup A je podskup skupa B, pišemo $A \subseteq B$ ako je svaki element skupa A i element skupa B, tj.

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

Neka su A, B, C skupovi. Tada:

(a) $A = A$,

(b) $A = B \Longrightarrow B = A$,

(c) $A = B \wedge B = C \Longrightarrow A = C$.

Neka su A, B, C skupovi. Tada:

(a) $A \subseteq A$,

(b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$,

(c) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$.

Važnije konstrukcije sa skupovima su: presek ($\cap$), unija ($\cup$), razlika ($\setminus$), simetrična razlika ($\triangle$), komplement, Dekartov proizvod ($\times$) i partitivni skup.

Presek skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup svih elemenata koji pripadaju i skupu A i skupu B, tj.

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Unija skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup svih elemenata koji pripadaju skupu A ili skupu B, tj.

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Razlika skupova A i B, u oznaci $A \setminus B$, je skup svih elemenata koji pripadaju skupu A, a ne pripadaju skupu B, tj.

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Simetrična razlika skupova A i B, u oznaci $A \triangle B$, je skup definisan na sledeći način:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Neka je S skup i A podskup od S. Komplement skupa A u odnosu na skup S, u oznaci $C_s(A)$ je skup definisan na sledeći način:

$$C_s(A) := S \setminus A.$$

Za komplement skupa A koristi se i oznaka $\bar{A}$.

Partitivni skup skupa A, u oznaci $P(A)$, je skup čiji su elementi svi podskupovi skupa A, tj.

$$P(A) := \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Polazeći od skupa $\{a, b\}$ uvodimo uređen par (a, b) kod koga je određeno koji element je prvi, a koji drugi. Kažemo da je a prva, a b druga komponenta uređenog para (a, b). Uređen par se precizno definiše na sledeći način:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Za uređene parove (a, b) i (c, d) važi:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \ \wedge \ b = d.$$

Neka je dat skup $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Uređenu $n-$torku definišemo na sledeći način:

(i) $(a_1) = a_1$

(ii) $(a_1, a_2, ..., a_n) = ((a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n)$.

Dekartov proizvod skupova A i B, u oznaci $A \times B$, je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga iz skupa B, tj.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Slično se definiše i Dekartov proizvod skupova $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n := \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Neka su A, B, C skupovi. Neke od osnovnih jednakosti sa skupovima su:

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. $A \triangle B = B \triangle A$

2.1 Zadaci

Dokazati skupovnu jednakost (33 - 50).

Zadatak 33 $A \cup A = A$

Zadatak 34 $A \cap A = A$

Zadatak 35 $A \cup B = B \cup A$

Zadatak 36 $A \cap B = B \cap A$

Zadatak 37 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Zadatak 38 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Zadatak 39 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Zadatak 40 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Zadatak 41 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Zadatak 42 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Zadatak 43 $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Zadatak 44 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Zadatak 45 $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

Zadatak 46 $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Zadatak 47 $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Zadatak 48 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Zadatak 49 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Zadatak 50 $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Zadatak 51 *Dokazati inkluziju*

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

Zadatak 52 *Dati su skupovi A' i B':*

$$A' = \left\{ x \mid x = \frac{48}{n+1} \ \wedge \ n \in N \right\} \ , \ B' = \left\{ y \mid y = \frac{m+60}{m} \ \wedge \ m \in N \right\}.$$

a) Iz skupa A', odnosno B' izdvojiti podskup A, odnosno B celih brojeva.

b) Odrediti skupove $A \cap B$ i $A \cup B$.

Zadatak 53 *Dati su skupovi: $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 3, 5, 6\}$ i za svako $n \geq 3$ rekurzivno definisani skupovi*

$$A_n = (A_{n-1} \setminus A_{n-2}) \cup (A_{n-2} \setminus A_{n-1}).$$

Odrediti A_5.

Zadatak 54 *Dati su skupovi:*

$E_1 = \{(x, y) \mid x, y \in N, \ 3x+2y = 20\}$, $E_2 = \{(x, y) \mid x, y \in N, \ x+2y = 7\}$.

Odrediti $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$ i $E_1 \setminus E_2$.

Zadatak 55 *Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$. Odrediti skup $X \subseteq N$ za koji važi: $A \cup X = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ i $A \cap X = \{3, 6\}$.*

2.2 Rešenja

Rešenje 33

$$\begin{aligned} x \in A \cup A &\iff x \in A \ \vee \ x \in A \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \vee \ p \iff p$.

Rešenje 35

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \ \vee \ x \in B \\ &\iff x \in B \ \vee \ x \in A \\ &\iff x \in B \cup A. \end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \vee \ q \iff q \ \vee \ p$.

Rešenje 37

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\iff x \in A \ \vee \ x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \ \vee \ (x \in B \ \vee \ x \in C) \\ &\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \vee \ x \in C \\ &\iff x \in A \cup B \ \vee \ x \in C \\ &\iff x \in (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \vee \ (q \ \vee \ r) \iff (p \ \vee \ q) \ \vee \ r$.

Rešenje 39

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \ \vee \ x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \\ &\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C) \\ &\iff x \in A \cup B \ \wedge \ x \in A \cup C \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \vee \ (q \ \wedge \ r) \iff (p \ \vee \ q) \wedge \ (p \ \vee \ r)$.

Rešenje 41

$$x \in \overline{A \cup B} \iff \neg x \in A \cup B$$

$$\begin{aligned}
&\iff \neg(x \in A \ \vee \ x \in B) \\
&\iff \neg x \in A \ \wedge \ \neg x \in B \\
&\iff x \in \bar{A} \ \wedge \ x \in \bar{B} \\
&\iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}.
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $\neg(p \ \vee \ q) \iff \neg p \ \wedge \ \neg q$.

Rešenje 43

$$\begin{aligned}
x \in A \cap \bar{A} &\iff x \in A \ \wedge \ x \in \bar{A} \\
&\iff x \in A \ \wedge \ \neg x \in A \\
&\iff \bot \\
&\iff x \in \emptyset
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \wedge \ \neg p \iff \bot$.

Rešenje 44

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \cup C) \\
&\iff x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \ \vee \ x \in C) \\
&\iff (x \in A \ \wedge \ \neg x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \wedge \ \neg x \in C) \\
&\iff x \in A \setminus B \ \wedge \ x \in A \setminus C \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \wedge \ \neg(q \ \vee \ r) \iff (p \ \wedge \ \neg q) \ \wedge \ (p \wedge \neg r)$.

Rešenje 45

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \setminus C) &\iff x \in A \ \vee \ x \in B \setminus C \\
&\iff x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ \neg x \in C) \\
&\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ \neg(x \in C \ \wedge \ \neg x \in A) \\
&\iff x \in A \cup B \ \wedge \ \neg(x \in C \setminus A) \\
&\iff x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \vee \ (q \ \wedge \ \neg r) \iff (p \ \vee \ q) \ \wedge \ \neg(r \wedge \neg p)$.

Rešenje 46

$$x \in (A \setminus B) \setminus C \iff x \in A \ \setminus B \ \wedge \ \neg x \in C$$

$$\begin{aligned}
&\iff (x \in A \ \wedge \ \neg x \in B) \ \wedge \ \neg x \in C \\
&\iff x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \ \vee \ x \in C) \\
&\iff x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \cup C) \\
&\iff x \in A \setminus (B \cup C)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $(p \ \wedge \ \neg q) \ \wedge \ \neg r \iff p \ \wedge \ \neg(q \ \vee \ r)$.

Rešenje 47

$$\begin{aligned}
x \in A \triangle B \quad &\iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&\iff x \in (A \setminus B) \ \vee \ x \in (B \setminus A) \\
&\iff (x \in A \ \wedge \ \neg x \in B) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ \neg x \in A) \\
&\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ \neg(x \in A \ \wedge \ x \in B) \\
&\iff x \in A \cup B \ \wedge \ \neg x \in A \cap B \\
&\iff x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $(p \ \wedge \ \neg q) \ \vee \ (q \ \wedge \ \neg p) \iff (p \ \vee \ q) \ \wedge \ \neg(p \ \wedge \ q)$.

Rešenje 48

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) \quad &\iff x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \cap C) \\
&\iff x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B \ \wedge \ x \in C) \\
&\iff (x \in A \ \wedge \ \neg x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ \neg x \in C) \\
&\iff x \in A \setminus B \ \vee \ x \in A \setminus C \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $p \ \wedge \ \neg(q \ \wedge \ r) \iff (p \ \wedge \ \neg q) \ \vee \ (p \wedge \neg r)$.

Rešenje 49

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \cup B) \times C \quad &\iff x \in A \cup B \ \wedge \ y \in C \\
&\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ y \in C \\
&\iff (x \in A \ \wedge \ y \in C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ y \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times C \ \vee \ (x, y) \in B \times C \\
&\iff (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $(p \ \vee \ q) \ \wedge \ r \iff (p \ \wedge \ r) \vee \ (q \ \wedge \ r)$.

Rešenje 50

$$(x, y) \in (A \setminus B) \times C \iff x \in A \setminus B \ \wedge \ y \in C$$

$$\begin{aligned}
&\iff (x \in A \ \wedge \ \neg x \in B) \ \wedge \ y \in C \\
&\iff (x \in A \ \wedge \ y \in C) \ \wedge \ \neg(x \in B \ \wedge \ y \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times C \ \wedge \ \neg(x, y) \in B \times C \\
&\iff (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $(p \ \wedge \ \neg q) \ \wedge \ r \iff (p \ \wedge \ r) \ \wedge \ \neg(q \ \wedge \ r)$.

Rešenje 51

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times D) &\iff (x, y) \in A \times B \ \vee \ (x, y) \in C \times D \\
&\iff (x \in A \ \wedge \ y \in B) \ \vee \ (x \in C \ \wedge \ y \in D) \\
&\implies (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (y \in B \ \vee \ y \in D) \\
&\iff x \in A \cup C \ \wedge \ y \in B \cup D \\
&\iff (x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)
\end{aligned}$$

Koristili smo tautologiju $(p \ \wedge \ q) \ \vee \ (r \ \wedge \ t) \implies (p \ \vee \ r) \ \wedge \ (q \ \vee \ t)$.

Rešenje 52

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}, \ B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 16, 21, 31, 61\}$

b) $A \cap B = \{2, 3, 4, 6, 16\}$,

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 21, 24, 31, 61\}$

Rešenje 53

$$\begin{aligned}
A_3 &= (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) = \{5, 6\} \cup \{2, 4\} = \{2, 4, 5, 6\} \\
A_4 &= (A_3 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) = \{2, 4\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3, 4\} \\
A_5 &= (A_4 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) = \{1, 3\} \cup \{5, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}
\end{aligned}$$

Rešenje 54

$E_1 = \{(2, 7), (4, 4), (6, 1)\}, \ E_2 = \{(1, 3), (3, 2), (5, 1)\}$

$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \ E_1 \cup E_2 = \{(1, 3), (2, 7), (3, 2), (4, 4), (5, 1), (6, 1)\}$

$E_1 \setminus E_2 = E_1$.

Rešenje 55 Jedini element koji pripada $A \cup X$ ne pripada skupu A je 4, pa je $X \setminus A = \{4\}$. Pošto je $A \cap X = \{3, 6\}$, imamo da je $X = \{3, 4, 6\}$.

Glava 3

RELACIJE

Neka su A i B skupovi. Svaki podskup ρ Dekartovog proizvoda $A \times B$ zove se binarna relacija redom skupova A, B. Ako je $(x, y) \in \rho$, kažemo da je x u relaciji ρ sa y i pišemo $x\rho y$. Dakle,

$$x\rho y \longleftrightarrow (x, y) \in \rho.$$

Ako je $A = B$, onda kažemo da je relacija $\rho \subseteq A \times A$ binarna relacija skupa A. Relacije $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq C \times D$ su jednake ako je ispunjeno $\rho = \sigma, A = C, B = D$. Neka je $\rho \subseteq A \times B$ relacija. Ako je $\rho = A \times B$, onda takvu relaciju zovemo puna relacija. Ako je $\rho = \emptyset$, onda tu relaciju zovemo prazna relacija. Neka je $\rho \subseteq A \times B$ relacija. Inverzna relacija relacije ρ je relacija $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ data na sledeći način:

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

Neka su $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq C \times D$ relacije. Proizvod relacija ρ i σ je relacija $\sigma \circ \rho \subseteq A \times D$ data na sledeći način:

$$\sigma \circ \rho = \{(x, y) \in A \times D \mid (\exists t \in B \cap C)((x, t) \in \rho \wedge (t, y) \in \sigma)\}.$$

Neka su $\rho \subseteq A \times B, \sigma \subseteq C \times D$ i $\tau \subseteq E \times F$ tri relacije. Tada je

$$(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho).$$

Neka je ρ relacija skupa A.

(i) Ako relacija ρ zadovoljava uslov

$$(R) \quad (\forall x)(x\rho x),$$

onda kažemo da je relacija ρ refleksivna.

(ii) Ako relacija ρ zadovoljava uslov

$$(S) \quad (\forall x)(\forall y)(x\rho y \Longrightarrow y\rho x),$$

onda kažemo da je relacija ρ simetrična.

(iii) Ako relacija ρ zadovoljava uslov

$$(AS) \quad (\forall x)(\forall y)(x\rho y \wedge y\rho x \Longrightarrow x = y),$$

onda kažemo da je relacija ρ antisimetrična.

(iv) Ako relacija ρ zadovoljava uslov

$$(T) \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\rho y \wedge y\rho z \Longrightarrow x\rho z),$$

onda kažemo da je relacija ρ tranzitivna.

Refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija zove se relacija ekvivalencije ili $RST-$relacija. Neka je A neprazan skup, $\sim \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije skupa A i $x \in A$. Klasa ekvivalencije elementa x, u oznaci C_x, data je na sledeći način:

$$C_x = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Skup $A/_\sim$ čiji su elementi sve klase ekvivalencije relacije $\sim$ zove se količnički skup, tj.

$$A/_\sim = \{C_x \mid x \in A\}.$$

Neka je $\sim$ $RST-$relacija skupa A i C_u klasa ekvivalencije elementa $u \in A$. Klase C_u su neprazne, u parovima disjunktne i njihova unija je skup A. Tada, za proizvoljne $x, y \in A$, je:

(i) $x \in C_x$, tj. svaki element iz skupa A je u nekoj klasi.

(ii) $x \sim y \Longleftrightarrow C_x = C_y$, tj. elementi u relaciji određuju istu klasu.

Refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija zove se relacija poretka. Ako je $\preceq$ relacija poretka na skupu A, onda se kaže da je skup A uređen relacijom $\preceq$. Uređen par $(A, \preceq)$ zove se parcijalno uređen skup. Za relaciju poretka $\preceq$ nepraznog skupa A kažemo da je totalno uređenje ili linearno uređenje ako je ispunjeno

$$x \preceq y \ \vee \ y \preceq x \ \text{ za sve } \ x, y \in A.$$

Ako je relacija poretka linearno uređenje skupa A, onda uređen par $(A, \preceq)$ zovemo linearno uređen skup ili lanac.

3.1 Zadaci

Zadatak 56 *Dat je skup* $A = \{a, b, c, d\}$ *i na njemu relacije:*

$\rho_1 = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$,

$\rho_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$,

$\rho_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$,

$\rho_4 = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$,

$\rho_5 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (a, c), (c, c), (d, d), (a, d)\}$,

$\rho_6 = \emptyset$,

$\rho_7 = A \times A$.

Odrediti koje od relacija $\rho_1 - \rho_7$ *su:*

a) refleksivne

b) simetrične

c) antisimetrične

d) tranzitivne.

Zadatak 57 *Dat je skup* $S = \{1, 3, 4, 8, 12\}$ *i relacija* $|$ *(se sadrži). Odrediti sve* $(x, y) \in |$.

Ispitati koja od svojstava refleksivnosti, simetričnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti ima relacija (58 - 59) u skupu realnih brojeva.

Zadatak 58 $x\rho y \Longleftrightarrow x^2 - xy + y^2 = 1$

Zadatak 59 $x\rho y \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$

Zadatak 60 *U skupu jednačina*

$$J = \left\{x^2 = 4,\ 2x + 2 = -2,\ x + 2 = 0,\ x + 1 = 0,\ 2x + 4 = 0,\ \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\right\},$$

$x \in R$, *uvedena je relacija*

$$j_1 \sim j_2 \Longleftrightarrow \textit{jednačine } j_1 \textit{ i } j_2 \textit{ su ekvivalentne.}$$

Dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije i odrediti klase.

Zadatak 61 *U skupu $\{-5, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ definisana je relacija*

$$x\rho y \Longleftrightarrow |x| = |y|.$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i odrediti klase.

3.2 Rešenja

Rešenje 56

a) $\rho_2,\ \rho_3,\ \rho_5,\ \rho_7$

b) $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4,\ \rho_6,\ \rho_7$

c) $\rho_2,\ \rho_5,\ \rho_6$

d) $\rho_2,\ \rho_3,\ \rho_5,\ \rho_6,\ \rho_7$

Rešenje 57

$|=\{(1,1),(1,3),(1,4),(1,8),(1,12),(3,3),(3,12),(4,4),(4,8),(4,12),(8,8),(12,12)\}$.

Rešenje 58

$x\rho x \Longleftrightarrow x^2 - x^2 + x^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -1$

ρ - nije refleksivna

$x\rho y \Longleftrightarrow x^2 - xy + y^2 = 1 \Longleftrightarrow y^2 - yx + x^2 = 1 \Longleftrightarrow y\rho x$

ρ - jeste simetrična

ρ - nije antisimetrična

Relacija ρ nije tranzitivna jer je $0\rho 1$ i $1\rho 0$, ali nije $0\rho 0$.

Rešenje 59

$x\rho x \Longleftrightarrow x^2 \leq x^2$, pa relacija ρ jeste refleksivna.

Relacija ρ nije simetrična jer je $1\rho 2$, ali nije $2\rho 1$.

Relacija ρ nije antisimetrična jer je $1\rho(-1)$ i $(-1)\rho 1$.

$x\rho y \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2,\ y\rho z \Longleftrightarrow y^2 \leq z^2,$ pa je $x^2 \leq z^2$, odnosno $x\rho z$.

Dakle, relacija ρ je tranzitivna.

Rešenje 60 Klase ekvivalencije su:

$C_{x+2=0} = \{2x+2=-2,\ x+2=0,\ 2x+4=0\}$

$C_{x+1=0} = \left\{x+1=0,\ \dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}\right\}$

$C_{x^2=4} = \{x^2=4\}$

Rešenje 61

$x\rho x \Longleftrightarrow |x|=|x|$ - Relacija ρ je refleksivna.

$x\rho y \Longleftrightarrow |x|=|y| \Longleftrightarrow |y|=|x| \Longleftrightarrow y\rho x$ - Relacija ρ je simetrična.

$x\rho y \Longleftrightarrow |x|=|y|, y\rho z \Longleftrightarrow |y|=|z|$, pa je $|x|=|z|$-Relacija ρ je tranzitivna.

Klase ekvivalencije su: $C_0=\{0\},\ C_1=\{1,-1\},\ C_2=\{2,-2\},$

$C_3=\{3,-3\},\ C_4=\{4,-4\},\ C_5=\{5,-5\}.$

Glava 4

FUNKCIJE, OPERACIJE

Preslikavanje (funkcija) skupa A u skup B je svaki podskup f skupa $A \times B$ (relacija skupova A i B), ako je ispunjeno:

(i) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x, y) \in f$

(ii) $(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Longrightarrow y = z)$

Kaže se da je funkcija iz A u B pravilo (postupak) kojim se svakom elementu skupa A dodeljuje tačno jedan element skupa B. Ako je $(x, y) \in f \subseteq A \times B$, gde je f funkcija, onda x zovemo original (lik) funkcije f, a y zovemo slika elementa x (originala) i pišemo $y = f(x)$. Skup A zovemo domen ili oblast definisanosti funkcije $f \subseteq A \times B$ i pišemo $A = dom(f)$. Skup B je kodomen ili oblast vrednosti funkcije f i pišemo $B = codom(f)$. Skup svih vrednosti funkcije $f \subseteq A \times B$ je skup

$$f(A) = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(x, y) \in f\}.$$

Ako je f funkcija (preslikavanje) skupa A u skup B, pišemo:

$$f : A \longrightarrow B \ \text{ ili } \ A \xrightarrow{f} B.$$

Neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : C \longrightarrow D$ dve funkcije. Tada

$$f = g \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(f(x) = g(x)) \ \wedge \ A = C \ \wedge \ B = D.$$

Neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ preslikavanja. Tada preslikavanje $h : A \longrightarrow C$ dato sa

$$h = \{(x, g(f(x))) \mid x \in A\}$$

zovemo proizvod (slaganje, kompozicija) preslikavanja f i g. Pišemo $h = g \circ f$. Dakle,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Neka su $f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C,\ h : C \longrightarrow D$ tri preslikavanja. Tada je

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Preslikavanje $f : A \longrightarrow B$ je

(i) injektivno, injekcija ili "$1-1$", ako je ispunjeno

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

za sve $x, y \in A$,

(ii) sirjektivno, sirjekcija ili "na", ako je ispunjeno

$$f(A) = B,$$

(iii) bijektivno, bijekcija ili "$1-1$" i "na", ako je injektivno i sirjektivno.

Neka je A neprazan skup. Tada funkciju I_A skupa A u skup A zovemo identično preslikavanje skupa A, ako je

$$I_A = \{(x, x) \mid x \in A\},$$

tj. $I_A(x) = x$ za sve $x \in A$. Neka je $f : A \longrightarrow B$. Ako postoji funkcija $f^{-1} : B \longrightarrow A$, sa osobinama

$$f \circ f^{-1} = I_B \ \text{ i } \ f^{-1} \circ f = I_A,$$

onda je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f. Funkcija $f : A \longrightarrow B$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je f bijekcija. Skup A je ekvivalentan sa skupom B, u oznaci $A \sim B$, ako postoji bijekcija $f : A \longrightarrow B$. Ako je A neprazan skup i $n \in N$, onda se funkcija

$$f : A^n \longrightarrow A$$

zove operacija na A. Ako je $n = 1$, operacija je unarna, za $n = 2$, f je binarna operacija na skupu A. Binarna operacija često se označava znakom koji se stavlja izmedju argumenata: umesto $*(x, y)$ koristi se oznaka $x * y$. Definišu se još i nularne operacije. To su funkcije iz $A^0 := \{\emptyset\}$ u skup A i one izdvajaju neki element iz skupa A. Tako odabrani elementi zovu se konstante.

4.1 Zadaci

Zadatak 62 *Dat je skup* $A = \{a, b, c, d\}$ *i preslikavanja:*

$f = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ *i*

$g = \{(a, c), (b, a), (c, a), (d, d)\}$

skupa A *u skup* A*. Odrediti:*

$$f(f(a)),\ f(f(b)),\ f(f(f(d))),\ g(f(g(a))),\ g(g(c)).$$

Zadatak 63 *Odrediti sva preslikavanja skupa* $\{a, b\}$ *u skup* $\{1, 2, 3\}$.

Zadatak 64 *Odrediti sva preslikavanja skupa* $\{1, 2, 3\}$ *u skup* $\{a, b\}$.

Zadatak 65 *Neka su* $f : R \to R$ *i* $g : R \to R$ *funkcije date sa* $f(x) = 3x + 1$ *i* $g(x) = 2x + 3$.

a) Odrediti: $f(1),\ g(2),\ f(g(1)),\ g(f(2)),\ f(2x),\ g(4x),\ f(g(x)),\ g(f(x))$.

b) Rešiti jednačine: $f(x) = 16,\ g(g(x)) = 17,\ f(x) = g(x)$.

Neka je $f : R \to R$. Dokazati da je f „1 - 1” i „na” preslikavanje i odrediti inverznu funkciju f^{-1} (66 - 67).

Zadatak 66 $f(x) = -5x + 2$

Zadatak 67 $f(x) = \dfrac{3x - 4}{2}$

Ispitati da li je funkcija $f : D \to R$ „1 - 1” i „na” ako je R skup realnih brojeva, a D skup definisan u zadatku: (68 - 70)

Zadatak 68 $f(x) = x^2 + 4x + 4,\ D = R$

Zadatak 69 $f(x) = \dfrac{x + 4}{x - 3},\ D = R \setminus \{3\}$

Zadatak 70 $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ D = R$

Neka je $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $x \in R \setminus \{1\}$. Dokazati (71 - 72).

Zadatak 71 $((f \circ g) \circ h)(x) = x$

Zadatak 72 $((g \circ f) \circ h)(x) = \dfrac{x-1}{x}$, *ako je* $x \neq 0$.

Zadatak 73 *Ako je funkcija* $f : R \setminus \left\{0, \dfrac{3}{2}\right\} \to R$ *data sa*

$$f\left(\frac{2x-3}{x}\right) = \frac{4x-9}{2x-3} \ ,$$

odrediti $f(x)$.

Zadatak 74 *Ako je funkcija* $f : R \setminus \left\{0, \dfrac{5}{2}\right\} \to R$ *data sa*

$$f\left(\frac{5-2x}{4x}\right) = \frac{6x+25}{5-2x} \ ,$$

odrediti $f(x)$.

4.2 Rešenja

Rešenje 62

$f(f(a)) = f(b) = a$

$f(f(b)) = f(a) = b$

$f(f(f(d))) = f(f(c)) = f(d) = c$

$g(f(g(a))) = g(f(c)) = g(d) = d$

$g(g(c)) = g(a) = c$

Rešenje 63 $f_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_3 : \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_4 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$f_5 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $f_6 : \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f_7 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_8 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f_9 : \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Rešenje 64 $f_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $f_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix}$, $f_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix}$,

$f_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix}$, $f_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix}$, $f_6 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix}$, $f_7 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix}$,

$f_8 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & b \end{pmatrix}$.

Rešenje 65

a) $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

$g(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$f(g(1)) = f(2 \cdot 1 + 3) = f(5) = 3 \cdot 5 + 1 = 16$

$g(f(2)) = g(3 \cdot 2 + 1) = g(7) = 2 \cdot 7 + 3 = 17$

$f(2x) = 3 \cdot 2x + 1 = 6x + 1$

$g(4x) = 2 \cdot 4x + 3 = 8x + 3$

$f(g(x)) = f(2x + 3) = 3(2x + 3) + 1 = 6x + 10$

$g(f(x)) = g(3x+1) = 2(3x+1)+3 = 6x+5$

b) $f(x) = 16,\ 3x+1 = 16,\ x = 5$

$g(g(x)) = 17,\ g(2x+3) = 17,\ 2(2x+3)+3 = 17,\ x = 2$

$f(x) = g(x),\ 3x+1 = 2x+3,\ x = 2$

Rešenje 66

$$f(x_1) = f(x_2),\ -5x_1+2 = -5x_2+2,\ -5x_1 = -5x_2,\ x_1 = x_2$$

$$y = -5x+2,\ 5x = 2-y,\ x = \frac{2-y}{5}\ ,\ f^{-1}(x) = \frac{2-x}{5}$$

Rešenje 67 $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+4}{3}$

Rešenje 68 $f(x) = (x+2)^2 \geqslant 0,\ f(-1) = f(-3)$
Funkcija $f : R \to R$ nije „1 - 1” i nije „na”.

Rešenje 69

$$f(x_1) = f(x_2),\ \frac{x_1+4}{x_1-3} = \frac{x_2+4}{x_2-3}\ ,$$

$$x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 - 12 = x_1x_2 + 4x_1 - 3x_2 - 12,\ -7x_1 = -7x_2,\ x_1 = x_2$$

$$y = \frac{x+4}{x-3}\ ,\ xy - 3y = x+4,\ x = \frac{3y+4}{y-1}\ ,\ y \neq 1$$

Funkcija $f : R \setminus \{3\} \to R$ jeste „1 - 1” i nije „na”.

Rešenje 70

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{4}$$

$$f(1) = f(2) = 0$$

Funkcija $f : R \to R$ nije „1 - 1” i nije „na”.

Rešenje 71 $((f\circ g)\circ h)(x) = f(g(h(x))) = f\left(g\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = f\left(\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}\right)$
$= f(1-x) = 1-(1-x) = x$

Rešenje 72 $((g\circ f)\circ h)(x) = g(f(h(x))) = g\left(f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = g\left(1-\frac{x}{x-1}\right)$
$= g\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}\ ,\ x \neq 0$

Rešenje 73 $f\left(\frac{2x-3}{x}\right) = \frac{4x-9}{2x-3}\ ,\ x \neq 0\ ,\ x \neq \frac{3}{2}$

$\frac{2x-3}{x} = t,\ x = \frac{3}{2-t},\ f(t) = \frac{4\cdot\frac{3}{2-t}-9}{2\cdot\frac{3}{2-t}-3},\ f(t) = \frac{3t-2}{t},\ f(x) = \frac{3x-2}{x}$

Rešenje 74 $f(x) = \frac{5x+4}{x}$

Glava 5

ALGEBARSKE STRUKTURE

Algebarska struktura je uredjen par $(A, \mathcal{F})$ nepraznog skupa A, koji zovemo nosač strukture i izvesnog skupa $\mathcal{F}$ operacija skupa A. Ako je $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ konačan skup operacija f_i, $(i = 1, 2, .., n)$ raznih dužina skupa A onda umesto $(A, \{f_1, f_2, ..., f_n\})$ pišemo $(A, f_1, f_2, ..., f_n)$. Dalje razmatramo samo strukture koje imaju jednu ili dve binarne operacije. Važnije algebarske strukture sa jednom operacijom su: grupoid, polugrupa i grupa.

Uredjen par $(G, *)$, gde je G neprazan skup, a $*$ binarna operacija na skupu G zove se grupoid. Grupoid $(G, *)$ zovemo polugrupa (semigrupa), ako je ispunjeno

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

za sve $x, y, z \in G$. Grupoid $(G, *)$ zovemo grupa ako u skupu G postoji element e tako da važi:

(1) $(\forall x, y, z)(x * (y * z) = (x * y) * z)$

(2) $(\forall x)(x * e = e * x = x)$

(3) $(\forall x)(\exists y)(x * y = y * x = e)$.

U prethodnoj definiciji element e se zove neutralni (jedinični) element, a y je inverzni element elementa x. Ako je u grupi $(G, *)$ ispunjeno $x * y = y * x$ za sve $x, y \in G$, onda grupu $(G, *)$ zovemo komutativna ili Abelova. Važnije algebarske strukture sa dve binarne operacije su prsteni i polja. Prsten je operacijska struktura $(R, *, \circ)$ sa dve binarne operacije, za koju važi:

(i) $(R, *)$ je Abelova grupa;

(ii) $(R, \circ)$ je polugrupa;

(iii) $(\forall x, y, z \in R)$ $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$
$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$,

tj. druga operacija je distributivna prema prvoj sa obe strane. Polje je prsten $(P, *, \circ)$ u kome je $(P \setminus \{0\}, \circ)$ Abelova grupa, gde je 0 neutralni element operacije $*$.

5.1 Zadaci

Ispitati svojstva strukture (75 - 94).

Zadatak 75 $(Z, *)$, *gde je* Z *skup celih brojeva i* $x * y := x + y + 2$.

Zadatak 76 $(R, *)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x * y := x + y + xy$.

Zadatak 77 $(Q, \circ)$, *gde je* Q *skup racionalnih brojeva i* $x \circ y := x + 2y$.

Zadatak 78 $(R, \circ)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x \circ y := 2x + 2y$.

Zadatak 79 $(R, \circ)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x \circ y := 1-(x+y)+2xy$.

Zadatak 80 $(Q^+, *)$, *gde je* Q^+ *skup pozitivnih racionalnih brojeva i* $x * y := \dfrac{xy}{x+y}$.

Zadatak 81 $(R^+, *)$, *gde je* R^+ *skup pozitivnih realnih brojeva i* $x * y := x^2y^2$.

Zadatak 82 $(G, \cdot)$, *gde je* $G = \{x + y\sqrt{5} \mid x^2 - 5y^2 = 1;\ x, y \in Q\}$, *a „·" množenje realnih brojeva.*

Zadatak 83 $(G, *)$, *gde je* $G = \{x \mid -1 < x < 1,\ x \in R\}$ *i* $x*y := \dfrac{x+y}{1+xy}$.

Zadatak 84 $(R \setminus \{0\}, *)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x * y := \dfrac{xy}{2}$.

Zadatak 85 $(S, *)$, *gde je* $S = \{(a, b) \mid a, b \in Q,\ a \neq 0\}$ *i*

$$(a, b) * (c, d) := (ac, bc + c + d).$$

Zadatak 86 $(S, \cdot)$, *gde je* $S = \left\{ \dfrac{1+2m}{1+2n} \;\middle|\; m, n \in Z \right\}$ *i „·" množenje racionalnih brojeva.*

Zadatak 87 $(S, \circ)$, *gde je* $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ *i „$\circ$" je množenje preslikavanja. Funkcije* f_1, f_2, f_3, f_4 *preslikavaju skup* $R \setminus \{0\}$ *u skup* $R \setminus \{0\}$ *i pri tome je:*

$$f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = -x, \;\; f_3(x) = \frac{1}{x} \quad i \quad f_4(x) = -\frac{1}{x} \; .$$

Zadatak 88 $(\{a, b\}, *)$ *i operacija* $*$ *je data tablicom*

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

Zadatak 89 $(\{\top, \bot\}, \; \wedge)$

Zadatak 90 $(\{\top, \bot\}, \; \vee)$

Zadatak 91 $(Z \times Q, *)$, *gde su* Z *i* Q *skupovi celih, odnosno racionalnih brojeva i*

$$(x, y) * (u, v) := (x + u, 2^u y + v).$$

Zadatak 92 $(S, \cdot)$, *gde je* $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in Q; \; a + b\sqrt{2} > 0 \right\}$ *i „$\cdot$" množenje matrica.*

Zadatak 93 $(Z, *, \circ)$, *gde je* Z *skup celih brojeva ,*

$$x * y := x + y + 1 \quad i \quad x \circ y := xy + x + y.$$

Zadatak 94 $(S, +, \cdot)$, *gde je* $S = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in Z\}$ *, i „+" i „$\cdot$" sabiranje, odnosno množenje realnih brojeva.*

5.2 Rešenja

U zadacima (75 – 92) ispituju se sledeća svojstva algebarskih struktura:

1° grupoidnost,

2° asocijativnost,

3° postojanje neutralnog elementa,

4° postojanje inverznog elementa,

5° komutativnost.

Rešenje 75

1° $x \in Z \ \wedge \ y \in Z \implies x + y + 2 \in Z$

2° $(x * y) * z = (x + y + 2) * z = (x + y + 2) + z + 2 = x + y + z + 4$
$x * (y * z) = x * (y + z + 2) = x + (y + z + 2) + 2 = x + y + z + 4$

3° $x * e = e * x = x$
$x + e + 2 = e + x + 2 = x, \ e = -2$

4° $x * x' = x' * x = -2$
$x + x' + 2 = x' + x + 2 = -2, \ x' = -x - 4$

5° $x * y = y * x$
$x + y + 2 = y + x + 2$

$(Z, *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 76

1° $x \in R \ \wedge \ y \in R \implies x + y + xy \in R$

2°
$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y + xy) * z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\ x * (y * z) &= x * (y + z + yz) = x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \end{aligned}$$

3° $x * e = e * x = x,\ x + e + xe = e + x + ex = x,\ e(1 + x) = 0,\ e = 0$

4° $x * x' = x' * x = 0,\ x + x' + xx' = x' + x + x'x = 0,\ (1 + x)x' = -x,$
$x' = -\dfrac{x}{1+x},\ x \neq -1$

5° $x * y = y * x,\ x + y + xy = y + x + yx$

$(R, *)$ nije grupa jer za element -1 ne postoji inverzni element.
$(R, *)$ je komutativna polugrupa sa neutralnim elementom.

Rešenje 77

1° $x \in Q \ \wedge\ y \in Q \implies x + 2y \in Q$

2° $(x \circ y) \circ z = (x + 2y) \circ z = (x + 2y) + 2z = x + 2y + 2z$
$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + 2z) = x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z$

3° $x \circ e = x,\ x + 2e = x,\ e = 0$
$0 \circ x = 0 + 2x = 2x$

4° Pošto ne postoji neutralni element, nema smisla ispitivati egzistenciju inverznih elemenata.

5° $x \circ y = x + 2y,\ y \circ x = y + 2x$

$(Q, \circ)$ je grupoid.

Rešenje 78

1° $x \in R \ \wedge\ y \in R \implies 2x + 2y \in R$

2° $(x \circ y) \circ z = (2x + 2y) \circ z = 2(2x + 2y) + 2z = 4x + 4y + 2z$
$x \circ (y \circ z) = x \circ (2y + 2z) = 2x + 2(2y + 2z) = 2x + 4y + 4z$

3° $x \circ e = e \circ x \neq x$
$2x + 2e = 2e + 2x \neq x$

4° Ne postoji inverzni element.

5° $x \circ y = 2x + 2y$
$y \circ x = 2y + 2x = 2x + 2y$

$(R, \circ)$ je komutativan grupoid.

Rešenje 79

$1^\circ \quad x \in R \ \wedge \ y \in R \implies 1-(x+y)+2xy \in R$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad (x \circ y) \circ z &= (1-x-y+2xy) \circ z \\ &= 1-(1-x-y+2xy)-z+2(1-x-y+2xy)z \\ &= x+y+z-2xy-2xz-2yz+4xyz \\ x \circ (y \circ z) &= x \circ (1-y-z+2yz) \\ &= 1-x-(1-y-z+2yz)+2x(1-y-z+2yz) \\ &= x+y+z-2xy-2xz-2yz+4xyz \end{aligned}$$

$3^\circ \quad x \circ e = e \circ x = x$

$1-x-e+2xe = 1-e-x+2ex = x$

$1-2x-e+2xe = 0, \ (1-2x)(1-e) = 0, \ e = 1$

$4^\circ \quad x \circ x' = x' \circ x = 1, \ 1-x-x'+2xx' = 1-x'-x+2x'x = 1, \ (2x-1)x' = x,$

$x' = \dfrac{x}{2x-1}, \ x \neq \dfrac{1}{2}$

$5^\circ \quad x \circ y = 1-x-y+2xy, \ y \circ x = 1-y-x+2yx = 1-x-y+2xy$

$(R, \circ)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom.

Rešenje 80

$1^\circ \quad x \in Q^+ \ \wedge \ y \in Q^+ \implies \dfrac{xy}{x+y} \in Q^+$

$$2^\circ \quad (x * y) * z = \frac{xy}{x+y} * z = \frac{\dfrac{xy}{x+y} z}{\dfrac{xy}{x+y} + z} = \frac{xyz}{xy+xz+yz}$$

$$x * (y * z) = x * \frac{yz}{y+z} = \frac{x \dfrac{yz}{y+z}}{x + \dfrac{yz}{y+z}} = \frac{xyz}{xy+xz+yz}$$

$3^\circ \quad x * e = e * x = x, \ \dfrac{xe}{x+e} = \dfrac{ex}{e+x} = x, \ xe = x^2 + xe, \ x^2 = 0$

$(Q^+, *)$ nema neutralni element.

4° $(Q^+, *)$ nema inverzni element.

5° $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$

$y * x = \dfrac{yx}{y+x} = \dfrac{xy}{x+y}$

$(Q^+, *)$ je komutativna polugrupa.

Rešenje 81

1° $x \in R^+ \ \wedge \ y \in R^+ \implies x^2y^2 \in R^+$

2° $(x * y) * z = (x^2y^2) * z = (x^2y^2)^2z^2 = x^4y^4z^2$

$x * (y * z) = x * (y^2z^2) = x^2(y^2z^2)^2 = x^2y^4z^4$

3° $x * e = e * x = x, \ x^2e^2 = e^2x^2 = x$

$(R^+, *)$ nema neutralni element.

4° $(R^+, *)$ nema inverzni element.

5° $x * y = x^2y^2$

$y * x = y^2x^2 = x^2y^2$

$(R^+, *)$ je komutativan grupoid.

Rešenje 82

1° Ako je $a, b \in G$, onda postoje $x_1, y_1, x_2, y_2 \in Q$ takvi da je

$a = x_1 + y_1\sqrt{5}, \ b = x_2 + y_2\sqrt{5}, \ x_1^2 - 5y_1^2 = 1$ i $x_2^2 - 5y_2^2 = 1$. Tada je

$$a \cdot b = (x_1 + y_1\sqrt{5}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{5}) = (x_1x_2 + 5y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{5}.$$

Neposredno je jasno da je $x_1x_2+5y_1y_2, \ x_1y_2+x_2y_1 \in Q$. Dalje imamo:

$$\begin{aligned}
&(x_1x_2 + 5y_1y_2)^2 - 5(x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\
&= x_1^2x_2^2 + 10x_1x_2y_1y_2 + 25y_1^2y_2^2 - 5x_1^2y_2^2 - 10x_1x_2y_1y_2 - 5x_2^2y_1^2 \\
&= x_1^2x_2^2 - 5x_1^2y_2^2 - 5x_2^2y_1^2 + 25y_1^2y_2^2 \\
&= x_1^2(x_2^2 - 5y_2^2) - 5y_1^2(x_2^2 - 5y_2^2) \\
&= (x_1^2 - 5y_1^2) \cdot (x_2^2 - 5y_2^2) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2° Asocijativnost važi jer je u pitanju množenje realnih brojeva.

3° Neutralni element je $e = 1 + 0 \cdot \sqrt{5}$.

4° Neka je $a = x + y\sqrt{5}$. Dokažimo da je $a' = \dfrac{1}{x + y\sqrt{5}}$ inverzni element elementa a.

$$a' = \frac{1}{x + y\sqrt{5}} \cdot \frac{x - y\sqrt{5}}{x - y\sqrt{5}} = \frac{x - y\sqrt{5}}{x^2 - 5y^2} = \frac{x - y\sqrt{5}}{1} = x - y\sqrt{5}$$

$$x^2 - 5(-y)^2 = x^2 - 5y^2 = 1.$$

5° Komutativnost važi jer je u pitanju množenje realnih brojeva.

$(G, \cdot)$ je komutativna grupa

Rešenje 83

1° $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$

$$(1 - x^2)(1 - y^2) > 0$$

$$1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 > 0$$

$$1 + 2xy + x^2y^2 > x^2 + 2xy + y^2$$

$$(1 + xy)^2 > (x + y)^2$$

$$\frac{(x + y)^2}{(1 + xy)^2} < 1, \ 1 + xy > 0$$

$$\left| \frac{x + y}{1 + xy} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{x + y}{1 + xy} < 1.$$

2° $$(x * y) * z = \frac{x + y}{1 + xy} * z = \frac{\dfrac{x + y}{1 + xy} + z}{1 + \dfrac{x + y}{1 + xy} \cdot z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}$$

$$x * (y * z) = x * \frac{y + z}{1 + yz} = \frac{x + \dfrac{y + z}{1 + yz}}{1 + x\dfrac{y + z}{1 + yz}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}.$$

3° $x * e = e * x = x,$
$$\frac{x+e}{1+xe} = \frac{e+x}{1+ex} = x,$$
$$e(1-x^2) = 0,\ e = 0$$

4° $x * x' = x' * x = 0$
$$\frac{x+x'}{1+xx'} = \frac{x'+x}{1+x'x} = 0,\ x' = -x$$

5° $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{y+x}{1+yx} = y * x.$

$(G, *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 84

1° $x, y \in R \setminus \{0\} \Longrightarrow \dfrac{xy}{2} \in R \setminus \{0\}$

2° $(x * y) * z = \left(\dfrac{xy}{2}\right) * z = \dfrac{\frac{xy}{2}z}{2} = \dfrac{xyz}{4}$

$x * (y * z) = x * \left(\dfrac{yz}{2}\right) = \dfrac{x\frac{yz}{2}}{2} = \dfrac{xyz}{4}$

3° $x * e = e * x = x,$
$$\frac{xe}{2} = \frac{ex}{2} = x,\ e = 2$$

4° $x * x' = x' * x = 2$
$$\frac{xx'}{2} = \frac{x'x}{2} = 2,\ x' = \frac{4}{x}$$

5° $x * y = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{yx}{2} = y * x.$

$(R \setminus \{0\}, *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 85

1° $(a, b) \in S \wedge (c, d) \in S \Longrightarrow (ac,\ bc + c + d) \in S$

2° $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac,\ bc + c + d) * (e, f)$
$= (ace,\ bce + ce + de + e + f)$
$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (ce,\ de + e + f)$
$= (ace,\ bce + ce + de + e + f)$

3° $(a,b)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(a,b)=(a,b)$

$(ae_1,\ be_1+e_1+e_2)=(e_1a,\ e_2a+a+b)=(a,b)$

$ae_1=e_1a=a,\ e_1=1$

$be_1+e_1+e_2=e_2a+a+b=b$

$b+1+e_2=e_2a+a+b=b,\ e_2=-1$

$(1,-1)$ je neutralni element za operaciju $*$.

4° $(a,b)*(a',b')=(a',b')*(a,b)=(1,-1)$

$(aa',\ ba'+a'+b')=(a'a,\ b'a+a+b)=(1,-1)$

$aa'=a'a=1,\ a'=\dfrac{1}{a}$

$ba'+a'+b'=b'a+a+b=-1$

$b\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+b'=b'a+a+b=-1,\ b'=-\dfrac{a+b+1}{a}$

$\left(\dfrac{1}{a}\ ,\ -\dfrac{a+b+1}{a}\right)$ je inverzni element za (a,b).

5° $(a,b)*(c,d)=(ac,\ bc+c+d)$

$(c,d)*(a,b)=(ca,\ da+a+b)$

$(S,*)$ je nekomutativna grupa.

Rešenje 86

1° $x=\dfrac{1+2m_1}{1+2n_1}\ ,\ y=\dfrac{1+2m_2}{1+2n_2}$

$x\cdot y=\dfrac{1+2m_1}{1+2n_1}\cdot\dfrac{1+2m_2}{1+2n_2}=\dfrac{1+2(m_1+m_2+2m_1m_2)}{1+2(n_1+n_2+2n_1n_2)}\in S$

2° Asocijativnost važi jer je u pitanju množenje racionalnih brojeva.

3° $e=1=\dfrac{1+2\cdot 0}{1+2\cdot 0}$

4° $x=\dfrac{1+2\cdot m}{1+2\cdot n}\ ,\ x'=\dfrac{1+2\cdot n}{1+2\cdot m}$

5° Komutativnost važi jer je u pitanju množenje racionalnih brojeva.

$(S,\cdot)$ je komutativna grupa.

Rešenje 87

1°

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

2° Asocijativnost važi jer je u pitanju množenje preslikavanja.

3° $e = f_1$

4° $f_1' = f_1,\ f_2' = f_2,\ f_3' = f_3,\ f_4' = f_4$

5° Iz tablice neposredno sledi komutativnost operacije $\circ$.

$(S\circ)$ je komutativna grupa.

Rešenje 88

1° $x, y \in \{a, b\} \Longrightarrow x * y \in \{a, b\}$.

2°

x	y	z	$x * y$	$y * z$	$(x * y) * z$	$x * (y * z)$
a	a	a	a	a	a	a
a	a	b	a	b	b	b
a	b	a	b	b	b	b
a	b	b	b	a	a	a
b	a	a	b	a	b	b
b	a	b	b	b	a	a
b	b	a	a	b	a	a
b	b	b	a	a	b	b

3° $e = a$

4° $a' = a,\ b' = b$

5°

x	y	$x * y$	$y * x$
a	a	a	a
a	b	b	b
b	a	b	b
b	b	a	a

$(\{a, b\},\ *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 89

1° $x, y \in \{\top, \bot\} \Longrightarrow x \wedge y \in \{\top, \bot\}$.

2°

x	y	z	$x \wedge y$	$y \wedge z$	$(x \wedge y) \wedge z$	$x \wedge (y \wedge z)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

3° $e = \top$

$$x \wedge \top = \top \wedge x = x$$
$$x = x = x$$

4° $x' \wedge \bot = \bot \wedge x' = \bot \neq \top$

Element $x = \bot$ nema inverzni element.

5°

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$(\{\top, \bot\},\ \wedge)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom.

Rešenje 90 $(\{\top, \bot\},\ \vee)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom.

Rešenje 91

1° $(x, y), (u, v) \in Z \times Q \Longrightarrow (x + u,\ 2^u y + v) \in Z \times Q$

2° $$\begin{aligned}((a, b) * (c, d)) * (e, f) &= (a + c,\ 2^c b + d) * (e, f) \\ &= (a + c + e,\ 2^e(2^c b + d) + f)\end{aligned}$$

$$= (a+c+e,\ 2^{e+c}b + 2^e d + f)$$

$$(a,b) * ((c,d) * (e,f)) = (a,b) * (c+e,\ 2^e d + f)$$

$$= (a+c+e, 2^{c+e}b + 2^e d + f)$$

3° $(e_1, e_2) = (0,0),\ (x,y) * (0,0) = (0,0) * (x,y) = (x,y)$

4° $(x,y)' = (-x, -2^{-x}y)$

5° $(x,y) * (u,v) = (x+u, 2^u y + v)$

$(u,v) * (x,y) = (u+x, 2^x v + y)$

$(Z \times Q, *)$ je grupa.

Rešenje 92

1° $x = \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix},\ a_1 + b_1\sqrt{2} > 0,\ a_2 + b_2\sqrt{2} > 0$

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2a_1b_2 + 2a_2b_1 \\ a_2b_1 + a_1b_2 & 2b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} = a_1(a_2 + b_2\sqrt{2}) + b_1\sqrt{2}(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= (a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) > 0$$

2° Množenje matrica je asocijativno.

3° $e = \begin{bmatrix} 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S,\ 1 + 0\sqrt{2} = 1 > 0$

4° $x = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix},\ x' = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2-2b^2} & \dfrac{-2b}{a^2-2b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2-2b^2} & \dfrac{a}{a^2-2b^2} \end{bmatrix}$

$$\frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a-b\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} > 0$$

5° $\begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2a_1b_2 + 2a_2b_1 \\ a_2b_1 + a_1b_2 & 2b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2a_2b_1 + 2a_1b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & 2b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$$

$(S, \cdot)$ je komutativna grupa.

U zadacima $(93-94)$ ispituju se svojstva algebarskih struktura sa dve operacije i to:

1) U tačkama $(1^\circ - 5^\circ)$ svojstva prve operacije redom: grupoidnost, asocijativnost, postojanje neutralnog elementa, postojanje inverznog elementa i komutativnost.

2) U tački 6° se ispituje distributivnost druge operacije prema prvoj.

3) U tačkama $(7^\circ - 11^\circ)$ se ispituju svojstva druge operacije istim redom kao svojstva prve operacije u tačkama $(1^\circ - 5^\circ)$.

Rešenje 93

1° $x \in Z \ \wedge \ y \in Z \Longrightarrow x + y + 1 \in Z$

2° $(x * y) * z = (x + y + 1) * z = x + y + z + 2$

$x * (y * z) = x * (y + z + 1) = x + y + z + 2$

3° $x * e = e * x = x$

$x + e + 1 = e + x + 1 = x, \ e = -1$

4° $x * x' = x' * x = -1$

$x + x' + 1 = x' + x + 1 = -1, \ x' = -x - 2$

5° $x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$

6° $x \in Z \wedge y \in Z \Longrightarrow xy + x + y \in Z$

7° $(x \circ y) \circ z = (xy + x + y) \circ z = (xy + x + y)z + (xy + x + y) + z$

$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (yz + y + z) = x(yz + y + z) + x + (yz + y + z)$

$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$

8° $x \circ e' = e' \circ x = x$

$xe' + x + e' = e'x + e' + x = x$

$(x + 1)e' = 0, \ e' = 0$

9° $x \neq -1$

$x \circ x' = x' \circ x = 0$

$xx' + x + x' = x'x + x' + x = 0$

$(x+1)x' = -x,\ x' = -\dfrac{x}{x+1}$

10° $x \circ y = xy + x + y = yx + y + x = y \circ x$

11° $x \circ (y * z) = x \circ (y + z + 1) = x(y + z + 1) + x + (y + z + 1)$

$= 2x + y + z + 1 + xy + xz$

$(x \circ y) * (x \circ z) = (xy + x + y) * (xz + x + z)$

$= xy + x + y + xz + x + z + 1$

$= 2x + y + z + 1 + xy + xz$

$(Z, *, \circ)$ je polje.

Rešenje 94

1° $a = x_1 + y_1\sqrt{2},\ b = x_2 + y_2\sqrt{2}$

$a + b = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{2} \in S$

2° Sabiranje je asocijativno.

3° $e = 0 = 0 + 0\sqrt{2}$

4° $a = x + y\sqrt{2},\ a' = -x - y\sqrt{2}$

5° Sabiranje je komutativno.

6° $a = x_1 + y_1\sqrt{2},\ b = x_2 + y_2\sqrt{2}$

$a \cdot b = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2} \in S$

7° Množenje je asocijativno.

8° $e' = 1 = 1 + 0\sqrt{2}$

9° $a = 0 + 1\sqrt{2} \in S,\ a' = \dfrac{1}{0 + 1\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \notin S$

10° Množenje je komutativno.

11° Množenje je distributivno prema sabiranju.

Glava 6

POLINOMI

Neka je $(C, +, \cdot)$ polje kompleksnih brojeva. Polinom nad C, u oznaci $P(x)$ je izraz

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ iz C i zovu se koeficijenti, pri čemu je $a_n \neq 0$. x je promenljiva, a broj $n \in N_0$ je stepen polinoma. Izrazi $a_0, a_1 x, \ldots, a_n x^n$ su članovi polinoma, a među njima je $a_n x^n$ vodeći član, dok je a_0 slobodan član. Svaki kompleksni broj, osim nule, je polinom nultog stepena nad poljem C. U slučaju $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, kažemo da je $P_n(x)$ nula-polinom i smatramo da je neodređenog stepena. Dva polinoma po x su jednaki ako su im jednaki koeficijenti uz odgovarajuće stepene promenljive x.

Polinom $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ određuje polinomnu funkciju, tj. preslikavanje $f_p : C \longrightarrow C$, definisano na sledeći način: Za svako $b \in C$,

$$f_p(b) = a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n.$$

Uobičajeno je da se funkcija f_p označava isto kao i polinom, dakle sa $P(x)$. Uprkos istoj oznaci, polinomna funkcija i polinom su dva različita pojma, jer je polinom samo formalni izraz.

Nula (koren) polinoma $P(x)$ je broj $\alpha \in C$ za koji važi $P(\alpha) = 0$. Rešenje (koren) algebarske jednačine $P(x) = 0$ je nula polinoma $P(x)$.

Neka su $P(x)$ i $S(x)$ dati polinomi. Jedinstveni polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ za koje važi

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$$

nazivaju se količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $S(x)$. Ako za polinome $P(x)$ i $S(x)$ postoji polinom $Q(x)$ takav da je

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x),$$

kažemo da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $S(x)$ (ili da se polinom $S(x)$ sadrži u polinomu $P(x)$).

Svaki polinom stepena n ima tačno n nula u skupu kompleksnih brojeva; pri tome se svaka nula broji onoliko puta kolika je njena višestrukost.

Bezuova teorema: Ostatak pri deljenju polinoma $P_n(x)$ polinomom $x-x_1$ je $P_n(x_1)$, tj. postoji polinom $Q_{n-1}(x)$ tako da je

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x) + P_n(x_1).$$

Ako je x_1 nula polinoma $P_n(x)$, onda postoji polinom $Q_{n-1}(x)$ tako da je

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x).$$

Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma $P_n(x)$, onda je

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Neka je dat polinom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Ako je $\omega \in C$ nula tog polinoma, onda je i $\bar{\omega}$ takođe njegova nula.

Neka je $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom sa celobrojnim koeficijentima. Ako je $z = \dfrac{p}{q}$ koren polinoma, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi i $pq \neq 0$, onda je $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.

Polinom W je najveći zajednički delilac polinoma U i V (u oznaci $W = NZD(U, V)$) ako $W \mid U$, $W \mid V$ i ako iz $P \mid U$, $P \mid V$ sledi $P \mid W$.

Neka su dati polinomi U i V ($U \neq 0, V \neq 0$). $NZD(U, V)$ postoji i može se odrediti sa tačnošću do multiplikativne konstante, tj. ako je $W = NZD(U, V)$, tada je $W' = NZD(U, V)$ ako i samo ako je $W' = aW$ za neko $a \in R$, $a \neq 0$.

Euklidov algoritam za određivanje $NZD(U, V)$:

$$\begin{array}{lclcl}
U & = & V \cdot Q_1 & + & R_1 \\
V & = & R_1 \cdot Q_2 & + & R_2 \\
R_1 & = & R_2 \cdot Q_3 & + & R_3 \\
 & \vdots & & & \\
R_{i-1} & = & R_i \cdot Q_{i+1} & + & R_{i+1} \\
 & \vdots & & &
\end{array}$$

Ponavljanjem postupka dolazimo do nekog k za koje je $R_{k+1} = 0$ ili stepen R_k je nula. Dakle, dolazi se do $R_{k-1} = R_k \cdot Q_{k+1}$. Tada je

$$R_k = NZD(U, V).$$

Hornerov algoritam: Neka je

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \ \ (a_0 \neq 0).$$

Tada je, za $a \in R$:

$$P = Q(x - a) + R,$$

gde je

$$Q = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1},$$

pri čemu je

$$\begin{array}{lcl} b_0 & = & a_0, \\ & \vdots & \\ b_{k+1} & = & a \cdot b_k + a_{k+1}, \ (k = 0, \ldots, n-2) \\ & \vdots & \\ R & = & a \cdot b_{n-1} + a_n. \end{array}$$

Hornerov postupak se može zapisati u obliku šeme:

a	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{k+1}	$\cdots$	a_n
	a_0	$ab_0 + a_1$	$ab_1 + a_2$	$\cdots$	$ab_k + a_{k+1}$	$\cdots$	$ab_{n-1} + a_n$
	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{k+1}	$\cdots$	R

Vijetove formule: Neka je dat polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

čiji su koreni $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tada je

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \vdots \end{array}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_k + \cdots + x_{n-k+1} \cdot x_{n-k+2} \cdots x_n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n},$$
$$\vdots$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

6.1 Zadaci

Zadatak 95 *Odrediti realne brojeve a, b i c tako da polinomi*

$$A(x) = 12x^3 - 40x^2 + 27x - 5 \quad i \quad B(x) = (3x-1)(ax^2 + bx + c)$$

budu jednaki.

Zadatak 96 *Dat je polinom*

$$P(x) = 2x^3 - 4mx^2 + mx - 2m.$$

Odrediti parametar m tako da polinom $P(x)$ bude deljiv sa $x - 2$.

Zadatak 97 *Dat je polinom*

$$P(x) = 2x^3 - 4mx^2 + mx - 2m.$$

Odrediti parametar m tako da ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - 1$ bude jednak 7.

Naći količnik i ostatak pri deljenju polinoma $A(x)$ polinomom $B(x)$ (98 - 103).

Zadatak 98 $A(x) = 6x^2 - 13x,\ B(x) = 2x - 3$

Zadatak 99 $A(x) = x^3 + 2x^2,\ B(x) = x^2 + x + 1$

Zadatak 100 $A(x) = x^2 + 2x - 7,\ B(x) = x^2 - 2x + 7$

Zadatak 101 $A(x) = x + 3,\ B(x) = x^2 - x + 11$

Zadatak 102 $A(x) = x^2 + \frac{1}{6}x,\ B(x) = x + \frac{1}{2}$

Zadatak 103 $A(x) = 8x^4 - 10x^3 + 15x^2 + 13x - 2,\ B(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Zadatak 104 *Ako polinom $P(x)$ pri deljenju sa $x - 1$ daje ostatak 3, a pri deljenju sa $x + 1$ daje ostatak 1, naći ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x^2 - 1$.*

Zadatak 105 *Ako polinom $P(x)$ pri deljenju sa $x - 1$ daje ostatak 3, a pri deljenju sa $x - 2$ ostatak 4, naći ostatak pri deljenju polinomom $P(x)$ sa $(x - 1)(x - 2)$.*

Naći ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ ako je (106 - 107):

Zadatak 106 $P(x) = x^{100} - 2x^{99} - 1,\ Q(x) = x^2 - 3x + 2$

Zadatak 107 $P(x) = x^{100} - 3x^{99} + 1,\ Q(x) = x^2 - 4x + 3$

Koristeći Bezuovu teoremu rastaviti na činioce polinom $P(x)$ (108 - 113).

Zadatak 108 $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$

Zadatak 109 $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

Zadatak 110 $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$

Zadatak 111 $x^3 - 19x + 30$

Zadatak 112 $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

Zadatak 113 $27x^3 - 45x^2 + 24x - 4$

Zadatak 114 *Za koje vrednosti parametara m i n je polinom $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + mx + n$ deljiv polinomom $Q(x) = x^2 - 3x + 2$?*

Zadatak 115 *Dat je polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x$. Izračunati $P(1 + 2i)$.*

Zadatak 116 *Polinom*

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

izraziti kao polinom po promenljivoj $x - 1$.

Odrediti najveći zajednički delilac (NZD) za polinome $P(x)$ i $Q(x)$ ukoliko je (117 - 118):

Zadatak 117 $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ *i* $Q(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

Zadatak 118 $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ *i* $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

Rešiti jednačinu (119 - 123).

Zadatak 119 $x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = 0$

Zadatak 120 $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

Zadatak 121 $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$

Zadatak 122 $3x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 55x - 20 = 0$

Zadatak 123 $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

Zadatak 124 *Odrediti realne brojeve* a *i* b *tako da* $x_1 = 1 + i$ *bude koren jednačine* $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ *, a zatim rešiti tako dobijenu jednačinu.*

Zadatak 125 *Odrediti realne brojeve* a *i* b *tako da* $x_1 = i$ *bude koren jednačine* $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ *, a zatim rešiti tako dobijenu jednačinu.*

Zadatak 126 *Pokazati da* $P(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6 = 0$ *ima nulu* $x_1 = -i\sqrt{3}$ *. Odrediti ostale nule polinoma.*

6.2 Rešenja

Rešenje 95 $A(x) = (3x-1)(4x^2-12x+5)$, pa je $a = 4,\ b = -12,\ c = 5$.

Rešenje 96 $P(2) = 16 - 16m = 0,\ m = 1$

Rešenje 97 $P(1) = 2 - 5m = 7,\ m = -1$

Rešenje 98 $Q(x) = 3x - 2,\ R(x) = -6$

Rešenje 99 $Q(x) = x + 1,\ R(x) = -2x - 1$

Rešenje 100 $Q(x) = 1,\ R(x) = 4x - 14$

Rešenje 101 $Q(x) = 0,\ R(x) = x + 3$

Rešenje 102 $Q(x) = x - \dfrac{1}{3}\ ,\ R(x) = \dfrac{1}{6}$

Rešenje 103 $Q(x) = 4x^2 + x - 1,\ R(x) = 5x + 3$

Rešenje 104 Imamo da je

$$P(x) = Q(x)(x-1)(x+1) + ax + b \qquad (*).$$

Po Bezuovoj teoremi je $P(1) = 3,\ P(-1) = 1$. Ako vrednosti $x = 1$ i $x = -1$ zamenimo u $(*)$, dobijamo

$$3 = P(1) = a + b,\ 1 = P(-1) = -a + b.$$

Iz poslednjih jednakosti se dobija $b = 2,\ a = 1$. Dakle, ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x^2 - 1$ je $x + 2$.

Rešenje 105 $x + 2$

Rešenje 106 Uočimo da je $Q(x) = (x-1)(x-2)$ i da je $P(1) = -2$ i $P(2) = -1$. Traženi ostatak je $x - 3$.

Rešenje 107 $x-2$

Rešenje 108 $x^3+9x^2+23x+15=(x+1)(x+3)(x+5)$

Rešenje 109 $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=(x-2)^2(x+1)^2$

Rešenje 110 $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$

Rešenje 111 $P(x)=(x-2)(x-3)(x+5)$

Rešenje 112 $P(x)=(x-1)(x+3)(x+7)$

Rešenje 113 $P(x)=(3x-1)(3x-2)^2$

Rešenje 114 Da bi polinom $P(x)$ bio deljiv polinomom $Q(x)=(x-1)(x-2)$ potrebno je i dovoljno da bude deljiv sa $x-1$ i $x-2$. Iz

$$P(1)=2+m+n=0,\ P(2)=28+2m+n=0$$

sledi $m=-26,\ n=24$.

Rešenje 115 Prema Bezuovoj teoremi tražena vrednost jednaka je ostatku pri deljenju polinoma $P(x)$ binomom $x-(1+2i)$. Primenimo Hornerov postupak:

$1+2i$	1	-1	1	0
	1	$(1+2i)-1=2i$	$(1+2i)\cdot 2i+1=-3+2i$	$(1+2i)(-3+2i)=-7-4i$

Prema tome, dobili smo vrednost polinoma $P(1+2i)=-7-4i$.

Rešenje 116 $P(x)=1\cdot(x-1)^3+0\cdot(x-1)^2+1\cdot(x-1)+3$

Rešenje 117 Primenimo Euklidov algoritam. Ako polinom $P(x)$ podelimo polinomom $Q(x)$ dobijamo ostatak $2R(x)$, gde je

$$R(x)=3x^3+x^2+x-2.$$

Sada, zbog jednostavnijeg računa, delimo polinom $3Q(x)$ polinomom $R(x)$ i dobijamo ostatak $-\frac{5}{3}R_1(x)$, gde je $R_1(x)=x^2+x+1$. Ukoliko podelimo

polinom $R(x)$ polinomom $R_1(x)$ dobijamo količnik $3x-2$, a ostatak je jednak nuli. Dakle,

$$NZD(P,Q) = R_1(x) = x^2 + x + 1.$$

Rešenje 118 $NZD(P,Q) = x + 1.$

Rešenje 119 Prema teoremi o racionalnim nulama polinoma, sva racionalna rešenja date jednačine pripadaju skupu $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$. Proverom utvrđujemo da su -3 i 2 dva rešenja date jednačine, čime se dobija

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = (x+3)(x-2)(x^2+4).$$

Prema tome rešenja date jednačine su

$$x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_{3,4} = \pm 2i.$$

Rešenje 120 $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

Rešenje 121 $x_1 = -3,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_{3,4} = \dfrac{-1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Rešenje 122 $x_1 = -4,\ x_2 = \dfrac{1}{3},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{5}\ i$

Rešenje 123 $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 1$

Rešenje 124 Kako je $x_1 = 1 + i$ koren datog polinoma, to je i $x_2 = 1 - i$ takođe njegov koren. Sada je polinom deljiv faktorom

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - 2x + 2,$$

pa, kako je

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b}{x^2 - 2x + 2} = x^2 + 4x + 9 + \frac{(a+10)x + (b-18)}{x^2 - 2x + 2},$$

sledi da je ostatak jednak nuli, tj, $a = -10$ i $b = 18$. Do preostalih nula se lako dolazi i one su $x_{3,4} = -2 \pm i\sqrt{5}$.

Rešenje 125 $a = 6,\ b = 4,\ x_2 = -i,\ x_3 = -2 - i,\ x_4 = -2 + i$

Rešenje 126 Kako je

$$P(x) = 9(-i\sqrt{3})^5 - 6(-i\sqrt{3})^4 + 22(-i\sqrt{3})^3 - 16(-i\sqrt{3})^2 - 15(-i\sqrt{3}) + 6$$

$$\begin{aligned} &= -9i \cdot 9\sqrt{3} - 6 \cdot 9 + 22i \cdot 3\sqrt{3} + 16 \cdot 3 + 15i\sqrt{3} + 6 \\ &= (-81\sqrt{3} + 66\sqrt{3} + 15\sqrt{3})i - 54 + 48 + 6 = 0, \end{aligned}$$

to $-i\sqrt{3}$ jeste nula datog polinoma. Zbog toga je i $x_2 = i\sqrt{3}$ nula polinoma $P(x)$, pa je on deljiv faktorom

$$(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3}) = x^2 + 3.$$

Kako je

$$(9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6) : (x^2 + 3) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2,$$

preostale tri nule polinoma $P(x)$ jesu nule polinoma

$$Q(x) = 9x^3 - 6x^2 - 5x + 2.$$

To je polinom sa celobrojnim koeficijentima, pa, ako ima racionalnih nula oblika $\frac{p}{q}$, onda je p delilac broja 2, a q delilac broja 9. Moguće nule su, prema tome, $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}$. Neposredno se proverava da je $x_3 = 1$ nula polinoma $Q(x)$, pa je on deljiv binomom $x - 1$. Lako nalazimo da je $Q(x) = (x - 1)(9x^2 + 3x - 2)$. Sada su x_4 i x_5 rešenja jednačine $9x^2 + 3x - 2 = 0$. Odavde je $x_4 = -\frac{2}{3},\ x_5 = \frac{1}{3}$.

Glava 7

BULOVA ALGEBRA

Bulova algebra

$$\mathcal{B} \ = \ (B \ , \ \cdot \ , \ \vee \ , \ ^{-} \ , \ 0 \ , \ 1)$$

je neprazan skup B na kome su date dve binarne operacije $\cdot$ i $\vee$, jedna unarna operacija $^{-}$ i dve konstante 0 i 1, za koje važi:

(1) $x \cdot y = y \cdot x$

(2) $x \vee y = y \vee x$

(3) $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$

(4) $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$

(5) $x \vee 0 = x$

(6) $x \cdot 1 = x$

(7) $x \cdot \bar{x} = 0$

(8) $x \vee \bar{x} = 1$

(9) $0 \neq 1$

za sve x, y i z iz B.

Za dva tvrđenja, koja se odnose na Bulove algebre, kažemo da su dualna, ako se jedno iz drugog mogu dobiti zamenom svih pojavljivanja operacije $\cdot$ operacijom $\vee$ i obratno, kao i zamenom konstante 0 (gde god se ona pojavi) konstantom 1 i obratno.

Princip dualnosti: Ako se neko tvrđenje može izvesti iz aksioma $1-9$, onda se i njemu dualno tvrđenje može izvesti iz tih aksioma.

Osnovne jednakosti u Bulovoj algebri su sledeće:

(1) $x \cdot 0 = 0,\ x \vee 1 = 1$

(2) $\begin{array}{l} x \cdot (x \vee y) = x \\ x \vee (x \cdot y) = x \end{array}$ (zakoni apsorpcije)

(3) $x \cdot x = x,\ x \vee x = x$ (idempotentnost)

(4) $\begin{array}{l} x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array}$ (asocijativnost)

(5) $\begin{array}{l} \overline{(x \cdot y)} = \bar{x} \vee \bar{y} \\ \overline{(x \vee y)} = \bar{x} \cdot \bar{y} \end{array}$ (De Morganovi zakoni)

(6) $\overline{(\bar{x})} = x$

(7) $\bar{0} = 1,\ \bar{1} = 0$

Bulovi izrazi i polinomi

Bulove izraze možemo definisati na sledeći način:

(1) Promenljive $x, y, z, \ldots$ i konstante 0 i 1 su Bulovi izrazi.

(2) Ako su A i B Bulovi izrazi, onda su i $(A \cdot B)$, $(A \vee B)$, $\neg A$ Bulovi izrazi.

(3) Bulovi izrazi se mogu dobiti jedino konačnom primenom (1) i (2).

Specijalne Bulove izraze - Bulove polinome uvodimo sledećim nizom definicija. Elementarna konjunkcija je izraz

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n,$$

gde su za $n \in N$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ različite promenljive sa negacijom ili bez nje. Elementarna disjunkcija je izraz

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n,$$

gde su za $n \in N$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ različite promenljive sa negacijom ili bez nje.

Disjunktivna normalna forma (DNF) je izraz

$$C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$$

u kome su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ($k \in N$) elementarne konjunkcije. Konjunktivna normalna forma (KNF) je izraz

$$D_1 \cdot D_2 \cdots D_k,$$

gde su $D_1, D_2, \ldots, D_k$ ($k \in N$) elementarne disjunkcije. Elementarna konjunkcija (disjunkcija) f sadrži elementarnu konjunkciju (disjunkciju) g akko se sve promenljive i sve negacije promenljivih iz g pojavljuju i u f (g je podkonjunkcija od f).

Posmatrajmo sada prethodno definisane Bulove polinome u odnosu na tačno utvrđene promenljive $x_1, \ldots,\ x_n$. Kanonska elementarna konjunkcija (KEK) u odnosu na promenljive $x_1, \ldots,\ x_n$ je elementarna konjunkcija (EK) u kojoj se javlja svaka od tih promenljivih (negirana ili ne). Kanonska elementarna disjunkcija (KED) u odnosu na promenljive $x_1, \ldots,\ x_n$ je elementarna disjunkcija (ED) u kojoj se javlja svaka od tih promenljivih (negirana ili ne).

Kanonska disjunktivna normalna forma ($KDNF$) u odnosu na promenljive $x_1, \ldots,\ x_n$ je DNF u kojoj učestvuju samo različite KEK u odnosu na te promenljive. Kanonska konjunktivna normalna forma ($KKNF$) u odnosu na promenljive $x_1, \ldots,\ x_n$ je KNF u kojoj učestvuju samo različite KED u odnosu na iste promenljive.

Disjunkcija svih KEK za promenljive $x_1, \ldots, x_n$ je 1. Konjunkcija svih KED za promenljive $x_1, \ldots, x_n$ je 0.

Ako je x promenljiva i $m \in \{0, 1\}$, onda je

$$x^m := \begin{cases} x, & \text{za } \ m = 1 \\ \bar{x}, & \text{za } \ m = 0. \end{cases}$$

Neka je $f(x_1, \ldots, x_n)$ Bulov izraz. Tada je

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \cdots\ x_n^{\alpha_n}.$$

Prethodno tvrđenje pokazuje da se svaki Bulov izraz može svesti na $KDNF$. Isto se može postići i na jednostavniji način. Koristeći De Morganove zakone, distributivnost, apsorpciju i idempotentnost prvo se dobije DNF, a zatim, koristeći jednakost $x \vee \bar{x} = 1$, ta forma svede na kanonsku.

Bulove funkcije

Neka je $\mathcal{B} = (B\ ,\ \cdot\ ,\ \vee\ ,\ ^{-}\ ,\ 0\ ,\ 1)$ proizvoljna Bulova algebra. Svaka funkcija $B^n \longrightarrow B$, za $n \in N$, je jedna n-arna operacija na skupu B. Jasno je da i svaki Bulov izraz $f(x_1, \ldots, x_n)$ definiše jednu takvu operaciju

$$f_B(x_1, \ldots, x_n).$$

Do nje se dolazi direktno interpretiranjem promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ elementima skupa B, na koje se onda primenjuju operacije koje u toj Bulovoj algebri odgovaraju simbolima $\cdot$, $\vee$ i $^{-}$. Isti Bulov izraz na različitim Bulovim algebrama određuje i različite operacije. Više Bulovih izraza mogu definisati istu Bulovu funkciju na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$. Kažemo da su ti izrazi jednaki kao funkcije nad $\mathcal{B}$. Iz jednakosti Bulovih izraza sledi i njihova jednakost kao funkcija nad proizvoljnom Bulovom algebrom. Neka su $f(x_1, \ldots, x_n)$ i $g(x_1, \ldots, x_n)$ Bulovi izrazi a f_B i g_B odgovarajuće Bulove funkcije na Bulovoj algebri $\mathcal{B}$. Ako je

$$f_B(x_1, \ldots, x_n) = g_B(x_1, \ldots, x_n),$$

onda se jednakost

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

može izvesti iz aksioma.

U sledećim tablicama navedene su sve unarne i binarne operacije na skupu $\{0, 1\}$ - nosaču dvoelementne Bulove algebre $\mathcal{B}_2$.

x	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Broj različitih n-arnih operacija na skupu $\{0, 1\}$ je 2^{2^n}. Funkcija f_{15} ($|$) se zove Šeferova a f_9 ($\downarrow$) Lukašijevićeva funkcija.

Skup funkcija sa jednom i dve promenljive pomoću kojih se mogu izraziti sve Bulove funkcije nad $\mathcal{B}_2$ zovemo funkcionalno kompletan sistem Bulovih funkcija. Minimalan funkcionalno kompletan sistem Bulovih funkcija zovemo baza. Baze su:

$$\{g_3, f_2\}, \{g_3, f_8\}, \{f_{15}\}, \{f_9\}.$$

Minimizacija Bulovih funkcija na algebri $\mathcal{B}_2$

Postupak nalaženja najjednostavnijeg izraza koji odgovara datoj Bulovoj funkciji na $\mathcal{B}_2$ zove se minimizacija Bulovih funkcija. Problem razmatramo u funkcionalno kompletnom sistemu: konjunkcija (f_2), disjunkcija (f_8), negacija (g_3). Predmet pojednostavljivanja su Bulovi izrazi, a najjednostavnije oblike tražimo u DNF. Postupaka minimizacije ima mnogo, a mi ćemo razmotriti samo dva: *Metoda Kvajna i Mak Klaskog* i *Metoda Karnoovih karata*. Postupak Kvajna i Mak Klaskog je primenljiv na funkcije sa proizvoljnim brojem promenljivih, a njegova mana je nužnost prelaska na $KDNF$. Metoda Karnoovih karata je jednostavan, slikovit postupak, ali je ograničen na funkcije sa najviše šest promenljivih.

Ako je F Bulov izraz u DNF, označimo sa p_F ukupan broj pojavljivanja promenljivih u F, a sa k_F ukupan broj EK u F. Neka su F_1 i F_2 Bulovi izrazi u DNF. Izraz F_1 je jednostavniji od izraza F_2, ako je $p_{F_1} \leq p_{F_2}$ i $k_{F_1} \leq k_{F_2}$ i bar jedna nejednakost je striktna.

DNF Φ je minimalna za Bulov izraz F, ako su Φ i F jednaki i ni jedna DNF jednostavnija od Φ nije jednaka sa F. EK f je implikanta Bulovog izraza F, akko je $f \leq F$. EK f je implikanta Bulovog izraza F ako F ima vrednost 1 za svaki niz vrednosti promenljivih za koji i f ima vrednost 1, u proizvoljnoj Bulovoj algebri $\mathcal{B}$.

EK f je prosta implikanta Bulovog izraza F, ako je f implikanta za F i ni jedna potkonjunkcija od f nema tu osobinu. Svaka minimalna DNF Bulovog izraza F je disjunkcija jedne ili više prostih implikanti tog Bulovog izraza.

Neka je F Bulov izraz u $KDNF$ u odnosu na promenljive $x_1, \ldots, x_n$, a f EK čije su promenljive neke od navedenih. Tada je f implikanta izraza F, akko su sve KEK u odnosu na $x_1, \ldots, x_n$, koje sadrže f, uključene u izraz F.

Postupak Kvajna i Mak Klaskog za određivanje svih prostih implikanti Bulovog izraza F:

(1) Za izraz F odredi se $KDNF$.

(2) Urede se po rastućem broju negacijskih simbola sve KEK te forme.

(3) U dobijenom nizu označe se sve EK oblika xf i $\bar{x}f$, a niz se proširi sa f.

(4) Prethodni postupak se ponavlja na celom nizu, sve dok je to moguće.

(5) Neoznačene EK, koje preostanu u nizu, su proste implikante izraza F.

Neka je F $KDNF$, a Φ proizvoljna disjunkcija prostih implikanti izraza F. Tada je $F = \Phi$ akko svaka EK iz F sadrži neku konjunkciju iz Φ. Ako neka konjunkcija iz F ima samo jednu potkonjunkciju φ iz skupa svih prostih implikanti, tada φ mora biti član svake minimalne DNF. Takve proste implikante su esencijalne.

Pregledan način određivanja esencijalnih prostih implikanti i uklanjanja suvišnih jesu tablice prostih implikanti:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f & \cdot & \cdot & \cdot & f_n \\
\hline
\varphi_1 & & & & & \cdot & & & & \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & \\
\varphi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \\
\varphi_k & & & & & & & & &
\end{array}
$$

gde su $f_1, \ldots, f_n$ elementarne konjunkcije iz F, a $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ proste implikante. U tablici se označava $(*)$ pripadnost proste implikante φ elementarnoj konjunkciji f iz F. Analizom tablice zaključujemo:

(1) Ako se u nekoj koloni nalazi samo jedan znak $*$, odgovarajuća prosta implikanta je esencijalna. Pogodno je označiti (precrtati) sve KEK u kojima su esencijalne implikante potkonjunkcije (imaju zvezdice u istoj vrsti).

(2) Ako kolona α tablice ima $*$ u svim vrstama u kojima i kolona β, konjunkcija, koja odgovara koloni α, može se izostaviti.

(3) Ako u vrsti α zvezdice stoje na svim onim mestima na kojima i zvezdice u vrsti β i pri tom implikanta vrste α ima manje promenljivih od implikante vrste β, eliminiše se vrsta β, odnosno njena prosta implikanta ne učestvuje u minimalnoj DNF.

Karnoove karte: Metoda Karnoovih karata daje postupak za određivanje minimalnih DNF datog Bulovog izraza, bez prethodnog određivanja skupa svih njegovih prostih implikanti. Prikazaćemo Karnoove karte za Bulove izraze od dve, tri i četiri promenljive.

	y	$\bar{y}$
x		
$\bar{x}$		

$f(x, y)$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$f(x, y, z)$

	uv	$u\bar{v}$	$\bar{u}\bar{v}$	$\bar{u}v$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				

$f(x, y, u, v)$

Svakom polju karte odgovara jedna KEK u odnosu na odgovarajući broj promenljivih. Označavanjem polja tako se jednostavno može zadati proizvoljna $KDNF$.

Polja Karnoove karte, koja (kao kvadrati) imaju zajedničku stranicu, zovemo susednim. Susednim smatramo i prvo, odnosno poslednje polje svake vrste (kolone). Za svako označeno polje ispita se da li postoji jedinstven maksimalan skup od jednog, dva, četiri ili osam označenih polja koji ga sadrži. Takvi skupovi se obeležavaju zatvorenom linijom i to prvo oni sa manjim brojem polja. Za preostala označena polja odrede se svi maksimalni skupovi koji ih sadrže. Tako dobijene familije obeleženih skupova polja određuju disjunktivne forme, od kojih treba izdvojiti minimalne.

7.1 Zadaci

U proizvoljnoj Bulovoj algebri važe jednakosti (127 - 128).

Zadatak 127 $x \cdot 0 = 0$

Zadatak 128 $x \vee 1 = 1$

Bulov izraz $F(x, y, z)$ napisati u $KDNF$ ($KKNF$) u odnosu na promenljive x, y, z, ako je (129 - 132):

Zadatak 129 $F(x, y, z) \;=\; \overline{x \cdot y} \;\vee\; \bar{y} \cdot z$

Zadatak 130 $F(x, y, z) \;=\; (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot z$

Zadatak 131 $F(x, y, z) \;=\; \overline{(x \vee \bar{y})} \;\vee\; z \;\vee\; \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Zadatak 132 $F(x, y, z) \;=\; x \cdot (\bar{y} \vee z) \;\vee\; \bar{z}$

Zadatak 133 *Odrediti Bulovu funkciju koju određuje Bulov izraz*

$$f(x, y) = x \cdot \bar{y}$$

na Bulovoj algebri:

a) $\mathcal{B}_2$, *b)* $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

Odrediti $KDNF$ i $KKNF$ za funkcije date tablicama (134 - 135).

Zadatak 134

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Zadatak 135

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Metodom Kvajna i Mak Klaskog odrediti minimalnu DNF Bulovog izraza (136 - 149).

Zadatak 136 $F(x,y,z) = \overline{(x \vee \bar{y})} \vee z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Zadatak 137 $F(x,y,z) = xy\bar{z} \vee x\bar{y} \vee yz$

Zadatak 138 $F(a,b,c) = abc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c} \vee \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c}$

Zadatak 139 $F(x,y,z,u) = \bar{x}y\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}\bar{u} \vee x\bar{y}z\bar{u} \vee xyz\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{u}$

Zadatak 140 $F(x,y,z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z$

Zadatak 141 $F(x,y,z) = (xyz \vee \overline{xy}\bar{z}) \cdot x\bar{z}$

Zadatak 142

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= xyuv \vee x\bar{y}uv \vee \bar{x}yu\bar{v} \vee x\bar{y}\bar{u}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{u}\bar{v} \vee xyu\bar{v} \\ &\vee\ x\bar{y}u\bar{v} \vee x\bar{y}\bar{u}v \vee \bar{x}yuv \vee \bar{x}y\bar{u}v \vee \bar{x}\bar{y}\bar{u}\bar{v} \end{aligned}$$

Zadatak 143

$$F(a,b,c,d) = abcd \vee ab\bar{c}d \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}cd \vee \bar{a}bcd \vee \bar{a}bc\bar{d} \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

Zadatak 144

$$\begin{aligned} F(x,y,z,u) &= xyzu \vee x\bar{y}zu \vee \bar{x}yz\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{u} \vee xyz\bar{u} \\ &\vee\ x\bar{y}z\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z}u \vee \bar{x}yzu \vee \bar{x}y\bar{z}u \end{aligned}$$

Zadatak 145 $F(x,y,z) = xyz \vee \overline{xy}\bar{z}$

Zadatak 146 $F(x,y,z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z$

Zadatak 147 $F(x,y,z,t) = xy\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$

Zadatak 148

$$F(a,b,c,d) = abcd \vee ab\bar{c}d \vee a\bar{b}cd \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}bcd \vee \bar{a}bc\bar{d} \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}d$$

Zadatak 149 $F(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$

Pomoću Karnoovih karata odrediti minimalnu DNF Bulovog izraza (150 - 162).

Zadatak 150 $F(x,y,z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Zadatak 151 $F(x,y,z) = \bar{x} \vee xy\bar{z} \vee xyz$

Zadatak 152

$$\begin{aligned} F(x,y,u,v) &= \bar{x}\bar{y}\bar{u}v \vee \bar{x}\bar{y}u\bar{v} \vee \bar{x}\bar{y}uv \vee \bar{x}y\bar{u}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{u}v \vee \bar{x}yu\bar{v} \vee \bar{x}yuv \\ &\vee\ x\bar{y}\bar{u}\bar{v} \vee x\bar{y}\bar{u}v \vee x\bar{y}u\bar{v} \vee x\bar{y}uv \end{aligned}$$

Zadatak 153 $F(x,y) \;=\; xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$

Zadatak 154 $F(x,y,z) \;=\; xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z$

Zadatak 155 $F(x,y,z) \;=\; xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$

Zadatak 156 $F(x,y,z) \;=\; xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z}$

Zadatak 157

$$F(x,y,u,v) = xyuv \vee xy\bar{u}\bar{v} \vee xy\bar{u}v \vee \bar{x}\bar{y}uv \vee \bar{x}\bar{y}u\bar{v} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{u}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{u}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{u}v$$

Zadatak 158 $F(x,y,u,v) \;=\; xyu \vee xuv \vee x\bar{y}v \vee \bar{x}y\bar{u} \vee y\bar{u}v$

Zadatak 159

$$F(x,y,u,v) = \bar{x}\bar{y}uv \vee xyu\bar{v} \vee x\bar{y}u\bar{v} \vee \bar{x}\bar{y}u\bar{v} \vee x\bar{y}\bar{u}\bar{v} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{u}\bar{v} \vee \bar{x}y\bar{u}\bar{v} \vee x\bar{y}\bar{u}v$$

Zadatak 160 $F(x,y,z) \;=\; xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$

Zadatak 161 $F(x,y,z) \;=\; \overline{(x \vee \bar{y})} \vee z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Zadatak 162 $F(a,b,c,d) \;=\; abc \vee \bar{b}cd \vee b\bar{d} \vee a\bar{b}cd$

7.2 Rešenja

Rešenje 127

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= (x \cdot 0) \ \vee \ 0 = (x \cdot 0) \ \vee \ (x \cdot \bar{x}) = x \cdot (0 \ \vee \ \bar{x}) = x \cdot (\bar{x} \ \vee \ 0) \\ &= x \cdot \bar{x} = 0 \end{aligned}$$

Rešenje 128

$$\begin{aligned} x \ \vee \ 1 &= (x \ \vee \ 1) \cdot 1 = (x \ \vee \ 1) \cdot (x \ \vee \ \bar{x}) = x \ \vee \ (1 \cdot \bar{x}) = x \ \vee \ (\bar{x} \cdot 1) \\ &= x \ \vee \ \bar{x} = 1 \end{aligned}$$

Rešenje 129

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \overline{xy} \vee \bar{y}z \\ &= \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{y}z \\ &= \bar{x} \vee \bar{y} \\ &= \bar{x}(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee \bar{y}(x \vee \bar{x})(z \vee \bar{z}) \\ &= \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\ &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \\ F(x,y,z) &= \overline{xy} \vee \bar{y}z \\ &= \bar{x} \vee \bar{y} \\ &= (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee z\bar{z} \\ &= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

Rešenje 130

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)z \\ &= x\bar{x}z \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee y\bar{y}z \\ &= xyz \vee \bar{x}\bar{y}z \\ F(x,y,z) &= (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)z \\ &= ((x \vee \bar{y}) \vee (z\bar{z}))((\bar{x} \vee y) \vee (z\bar{z})) \vee (z \vee (x\bar{x}) \vee (y\bar{y})) \\ &= (x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \\ &\quad (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \\ &= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z) \\ &\quad (x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z) \end{aligned}$$

Rešenje 131

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \overline{(x \vee \bar{y})} \vee z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= \bar{x}y \vee z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= \bar{x}y(z \vee \bar{z}) \vee z(x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz \\
F(x,y,z) &= \overline{(x \vee \bar{y})} \vee z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= \bar{x}y \vee z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= (\bar{x} \vee \bar{x} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee z \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z) \\
&\quad (y \vee \bar{y} \vee z)(y \vee z \vee \bar{z}) \\
&= (\bar{x} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z) \\
&= ((\bar{x} \vee z) \vee (y\bar{y}))(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z) \\
&= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z) \\
&= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)
\end{aligned}
$$

Rešenje 132

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= x(\bar{y} \vee z) \vee \bar{z} \\
&= x\bar{y} \vee xz \vee \bar{z} \\
&= x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xz(y \vee \bar{y}) \vee \bar{z}(x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y}) \\
&= x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \\
&\quad \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz \\
F(x,y,z) &= x(\bar{y} \vee z) \vee \bar{z} \\
&= (x \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z \vee \bar{z}) \\
&= x \vee \bar{z} \\
&= (x \vee \bar{z}) \vee (y\bar{y}) \\
&= (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})
\end{aligned}
$$

Rešenje 133 a)

x	y	$f_{\mathcal{B}_2}(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

b) $f(x,y) = x \cap y', \quad \mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

x	y	$f_{\mathcal{P}(\{a,b\})}(x,y)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{b\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$

Rešenje 134

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \\ f(x,y,z) &= (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

Rešenje 135

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz \\ f(x,y,z) &= (x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \end{aligned}$$

Rešenje 136 $F(x,y,z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$\underline{xyz}$	$*$	yz	$*$	$\underline{z}$
$\bar{x}yz$	$*$	$\underline{xz}$	$*$	$\bar{x}$
$\underline{x\bar{y}z}$	$*$	$\bar{x}z$	$*$	
$\bar{x}\bar{y}z$	$*$	$\bar{x}y$	$*$	
$\underline{\bar{x}y\bar{z}}$	$*$	$\underline{\bar{y}z}$	$*$	
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$*$	$\bar{x}\bar{y}$	$*$	
		$\bar{x}\bar{z}$	$*$	

Proste implikante su: z, $\bar{x}$.

	xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}$			$*$	$*$	$*$	$\circledast$
z	$\circledast$	$*$	$*$		$*$	

Proste implikante $\bar{x}$ i z su i esencijalne, pa je minimalna DNF:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \bar{\mathbf{x}} \vee \mathbf{z}.$$

Rešenje 137 $F(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$

$\underline{xyz}$	$*$	yz		x
$\bar{x}yz$	$*$	xz	$*$	
$x\bar{y}z$	$*$	$\underline{xy}$	$*$	
$\underline{xy\bar{z}}$	$*$	$\underline{x\bar{y}}$	$*$	
$x\bar{y}\bar{z}$	$*$	$x\bar{z}$	$*$	

	xyz	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
x	$*$		$*$	$\circledast$	$*$
yz	$*$	$\circledast$			

$$\phi(x, y, z) = x \vee yz$$

Rešenje 138 $F(a, b, c) = abc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c} \vee \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c}$

$$
\begin{array}{lllll}
\underline{abc} & * & ac & * & a \\
a\bar{b}c & * & \underline{ab} & * & \\
\underline{ab\bar{c}} & * & a\bar{b} & * & \\
a\bar{b}\bar{c} & * & \bar{b}c & & \\
\bar{a}\bar{b}c & * & a\bar{c} & * & \\
\bar{a}b\bar{c} & * & b\bar{c} & &
\end{array}
$$

	abc	$a\bar{b}c$	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$	$\bar{a}b\bar{c}$
a	$\circledast$	$*$	$*$	$*$		
$\bar{b}c$		$*$			$\circledast$	
$b\bar{c}$			$*$			$\circledast$

$$\phi(a,b,c) = a \vee \bar{b}c \vee b\bar{c}$$

Rešenje 139 $F(x,y,z,u) = \bar{x}y\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}\bar{u} \vee x\bar{y}z\bar{u} \vee xyz\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{u}$

$$
\begin{array}{lllll}
\underline{xyz\bar{u}} & * & xy\bar{u} & * & x\bar{u} \\
xy\bar{z}\bar{u} & * & \underline{xz\bar{u}} & * & \\
\underline{x\bar{y}z\bar{u}} & * & y\bar{z}\bar{u} & & \\
\bar{x}y\bar{z}\bar{u} & * & x\bar{z}\bar{u} & * & \\
x\bar{y}\bar{z}\bar{u} & * & x\bar{y}\bar{u} & * &
\end{array}
$$

	$xyz\bar{u}$	$xy\bar{z}\bar{u}$	$x\bar{y}z\bar{u}$	$\bar{x}y\bar{z}\bar{u}$	$x\bar{y}\bar{z}\bar{u}$
$x\bar{u}$	$\circledast$	$*$	$*$		$*$
$y\bar{z}\bar{u}$		$*$		$\circledast$	

$$\phi(x,y,z,u) = x\bar{u} \vee y\bar{z}\bar{u}$$

Rešenje 140 $F(x,y,z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z$

$$
\begin{array}{lll}
\bar{x}yz & * & \bar{x}z \\
x\bar{y}z & * & \bar{y}z \\
\underline{xy\bar{z}} & & \\
\bar{x}\bar{y}z & * &
\end{array}
$$

	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{x}z$	$\circledast$			$*$
$\bar{y}z$		$\circledast$		$*$
$xy\bar{z}$			$\circledast$	

$$\phi(x,y,z) = \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

Rešenje 141

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= (xyz \vee \overline{xy}\bar{z}) \cdot x\bar{z} \\
&= (xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) \cdot \bar{z}) \cdot x\bar{z} \\
&= (xyz \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}) \cdot x\bar{z} \\
&= xyz\bar{z} \vee x\bar{x}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \\
&= x\bar{y}\bar{z}
\end{aligned}$$

$$\phi(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z}$$

Rešenje 142

$\underline{xyuv}$	$*$	yuv	$*$	yu
$\bar{x}yuv$	$*$	xuv	$*$	$\underline{xu}$
$x\bar{y}uv$	$*$	$\underline{xyu}$	$*$	$\bar{x}y$
$\underline{xyu\bar{v}}$	$*$	$\bar{x}yu$	$*$	$x\bar{y}$
$\bar{x}yu\bar{v}$	$*$	$\bar{x}yv$	$*$	
$x\bar{y}u\bar{v}$	$*$	$x\bar{y}u$	$*$	
$x\bar{y}\bar{u}v$	$*$	$x\bar{y}v$	$*$	
$\underline{\bar{x}y\bar{u}v}$	$*$	$yu\bar{v}$	$*$	
$x\bar{y}\bar{u}\bar{v}$	$*$	$\underline{xu\bar{v}}$	$*$	
$\underline{\bar{x}y\bar{u}\bar{v}}$	$*$	$\bar{x}y\bar{v}$	$*$	
$\bar{x}\bar{y}\bar{u}\bar{v}$	$*$	$x\bar{y}\bar{v}$	$*$	
		$x\bar{y}\bar{u}$	$*$	
		$\underline{\bar{x}y\bar{u}}$	$*$	
		$\bar{y}\bar{u}\bar{v}$		
		$\bar{x}\bar{u}\bar{v}$		

Proste implikante su: $\bar{y}\bar{u}\bar{v}$, $\bar{x}\bar{u}\bar{v}$, yu, xu, $\bar{x}y$, $x\bar{y}$.

	$\boxed{xyuv}$	$\bar{x}yuv$	$x\bar{y}uv$	$\boxed{xyu\bar{v}}$	$\bar{x}yu\bar{v}$	$x\bar{y}u\bar{v}$	$x\bar{y}\bar{u}v$	$\bar{x}y\bar{u}v$	$x\bar{y}\bar{u}\bar{v}$	$\bar{x}y\bar{u}\bar{v}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{u}\bar{v}$
xu	$\boxed{*}$		$*$	$\boxed{*}$		$*$					
yu	$\boxed{*}$	$*$		$\boxed{*}$	$*$						
$\boxed{\bar{x}y}$		$*$			$*$			$\circledast$		$*$	
$\boxed{x\bar{y}}$			$*$			$*$	$\circledast$		$*$		
$\bar{x}\bar{u}\bar{v}$										$*$	$*$
$\bar{y}\bar{u}\bar{v}$									$*$		$*$

Esencijalne implikante su: $\bar{x}y$, $x\bar{y}$.

	$xyuv$	$\bar{x}\bar{y}\bar{u}\bar{v}$
xu	$*$	
yu	$*$	
$\bar{x}\bar{u}\bar{v}$		$*$
$\bar{y}\bar{u}\bar{v}$		$*$

$$\phi_1(x,y,u,v) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xu \vee \bar{x}\bar{u}\bar{v}$$
$$\phi_2(x,y,u,v) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xu \vee \bar{y}\bar{u}\bar{v}$$
$$\phi_3(x,y,u,v) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yu \vee \bar{x}\bar{u}\bar{v}$$
$$\phi_4(x,y,u,v) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee yu \vee \bar{y}\bar{u}\bar{v}$$

Rešenje 143

$\underline{abcd}$	$*$	abd	$*$	bd
$ab\bar{c}d$	$*$	acd		
$a\bar{b}cd$	$*$	$\underline{bcd}$	$*$	
$\underline{\bar{a}bcd}$	$*$	$ab\bar{c}$		
$ab\bar{c}\bar{d}$	$*$	$b\bar{c}d$	$*$	
$\bar{a}bc\bar{d}$	$*$	$\bar{a}bc$		
$\underline{\bar{a}b\bar{c}d}$	$*$	$\bar{a}bd$	$*$	
$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$				

Proste implikante su: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, acd, $ab\bar{c}$, $\bar{a}bc$, bd.

	$abcd$	$ab\bar{c}d$	$a\bar{b}cd$	$\bar{a}bcd$	$ab\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
bd	$*$	$*$		$*$			$\circledast$	
acd	$*$		$\circledast$					
$ab\bar{c}$		$*$			$\circledast$			
$\bar{a}bc$				$*$		$\circledast$		
$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$								$\circledast$

$$\phi(a,b,c,d) = bd \vee acd \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

Rešenje 144

$\underline{xyzu}$	$*$	xyz	$*$	xz
$xyz\bar{u}$	$*$	xzu	$*$	$\underline{yz}$
$x\bar{y}zu$	$*$	$\underline{yzu}$	$*$	$x\bar{y}$
$\underline{\bar{x}yzu}$	$*$	$xz\bar{u}$	$*$	$\bar{x}y$
$x\bar{y}z\bar{u}$	$*$	$yz\bar{u}$	$*$	
$x\bar{y}\bar{z}u$	$*$	$x\bar{y}z$	$*$	
$\bar{x}yz\bar{u}$	$*$	$x\bar{y}u$	$*$	
$\underline{\bar{x}y\bar{z}u}$	$*$	$\bar{x}yz$	$*$	
$\bar{x}y\bar{z}\bar{u}$	$*$	$\underline{\bar{x}yu}$	$*$	
$x\bar{y}\bar{z}\bar{u}$	$*$	$x\bar{y}\bar{u}$	$*$	
		$x\bar{y}\bar{z}$	$*$	
		$\bar{x}y\bar{u}$	$*$	
		$\bar{x}y\bar{z}$	$*$	

Proste implikante su: xz, yz, $x\bar{y}$, $\bar{x}y$.

	$\boxed{xyzu}$	$\boxed{xyz\bar{u}}$	$x\bar{y}zu$	$\bar{x}yzu$	$x\bar{y}z\bar{u}$	$x\bar{y}\bar{z}u$	$\bar{x}yz\bar{u}$	$\bar{x}y\bar{z}u$	$\bar{x}y\bar{z}\bar{u}$	$x\bar{y}\bar{z}\bar{u}$
xz	$\boxed{*}$	$\boxed{*}$	$*$		$*$					
yz	$\boxed{*}$	$\boxed{*}$		$*$			$*$			
$\boxed{x\bar{y}}$			$*$		$*$	$\circledast$				$*$
$\boxed{\bar{x}y}$				$*$			$*$	$\circledast$	$*$	

Esencijalne implikante su: $x\bar{y}$, $\bar{x}y$.

$$\Phi_1(x,y,z,u) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xz$$
$$\phi_2(x,y,z,u) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee yz$$

Rešenje 145

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= xyz \vee \overline{xy}\bar{z} \\
&= xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \\
&= xyz \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \\
&= xyz \vee \bar{x}\bar{z}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{y}\bar{z}(x \vee \bar{x}) \\
&= xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{y} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
&= xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
\underline{xyz} & & \bar{y}\bar{z} \\
x\bar{y}\bar{z} & * & \bar{x}\bar{z} \\
\underline{\bar{x}y\bar{z}} & * & \\
\bar{x}\bar{y}\bar{z} & * &
\end{array}$$

	xyz	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}\bar{z}$			$\circledast$	$*$
$\bar{y}\bar{z}$		$\circledast$		$*$
xyz	$\circledast$			

$$\phi(x,y,z) = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xyz$$

Rešenje 146

$$\begin{array}{lcl}
xy\bar{z} & & \bar{y}z \\
x\bar{y}z & * & \underline{\bar{x}z} \\
\underline{\bar{x}yz} & * & \bar{x}\bar{y} \\
\underline{\bar{x}\bar{y}z} & * & \\
\bar{x}\bar{y}\bar{z} & * &
\end{array}$$

	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$\bar{x}z$			$\circledast$	$*$	
$\bar{y}z$		$\circledast$		$*$	
$\bar{x}\bar{y}$				$*$	$\circledast$
$xy\bar{z}$	$\circledast$				

$$\phi(x,y,z) = \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee xy\bar{z}$$

Rešenje 147

$$\begin{array}{lcl c l}
\underline{xy\bar{z}t} & * & x\bar{z}t & * & \bar{z}t \\
x\bar{y}\bar{z}t & * & \underline{y\bar{z}t} & * & \\
\bar{x}y\bar{z}t & * & \bar{y}\bar{z}t & * & \\
\underline{\bar{x}\bar{y}zt} & * & \bar{x}\bar{z}t & * & \\
\underline{\bar{x}\bar{y}\bar{z}t} & * & \underline{\bar{x}\bar{y}t} & & \\
\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} & * & \underline{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} & &
\end{array}$$

	$xy\bar{z}t$	$x\bar{y}\bar{z}t$	$\bar{x}y\bar{z}t$	$\bar{x}\bar{y}zt$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}t$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$
$\bar{z}t$	$\circledast$	$*$	$*$		$*$	
$\bar{x}\bar{y}t$				$\circledast$	$*$	
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$					$*$	$\circledast$

$$\phi(x,y,z,t) = \bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Rešenje 148

$$\begin{array}{lcl c l}
\underline{abcd} & * & abd & * & bd \\
ab\bar{c}d & * & acd & & \\
a\bar{b}cd & * & \underline{bcd} & * & \\
\underline{\bar{a}bcd} & * & ab\bar{c} & & \\
ab\bar{c}\bar{d} & * & b\bar{c}d & * & \\
\bar{a}bc\bar{d} & * & \bar{a}bc & & \\
\underline{\bar{a}b\bar{c}d} & * & \underline{\bar{a}bd} & * & \\
\bar{a}\bar{b}\bar{c}d & * & \bar{a}\bar{c}d & &
\end{array}$$

	$abcd$	$ab\bar{c}d$	$a\bar{b}cd$	$\bar{a}bcd$	$ab\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$
bd	$*$	$*$		$*$			$*$	
$\boxed{acd}$	$*$		$\circledast$					
$\boxed{ab\bar{c}}$		$*$			$\circledast$			
$\boxed{\bar{a}bc}$				$*$		$\circledast$		
$\boxed{\bar{a}\bar{c}d}$							$*$	$\circledast$

$$\phi(a,b,c,d) = acd \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee \bar{a}\bar{c}d$$

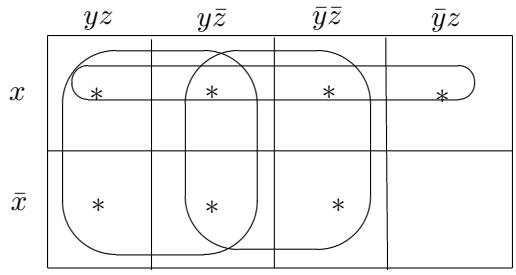
Rešenje 149

$$\begin{array}{lll}
\underline{xyz} & * & xz \\
x\bar{y}z & * & \underline{yz} \\
\underline{\bar{x}yz} & * & x\bar{y} \\
x\bar{y}\bar{z} & * & \bar{x}y \\
\bar{x}y\bar{z} & * &
\end{array}$$

	xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$
xz	$*$	$*$			
yz	$*$		$*$		
$\boxed{x\bar{y}}$		$*$		$\circledast$	
$\boxed{\bar{x}y}$			$*$		$\circledast$

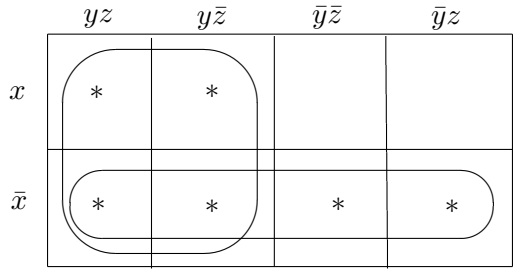
$$\phi_1(x,y,z) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xz$$
$$\phi_2(x,y,z) = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee yz$$

Rešenje 150



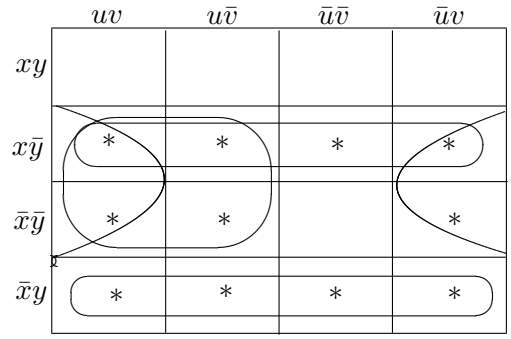
$$\phi(x,y,z) = x \ \vee \ y \ \vee \ \bar{z}$$

Rešenje 151

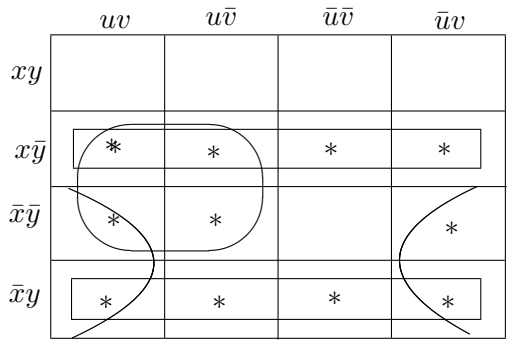


$$\phi(x,y,z) = y \ \vee \ \bar{x}$$

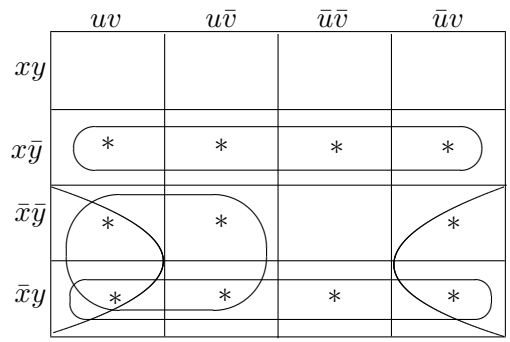
Rešenje 152



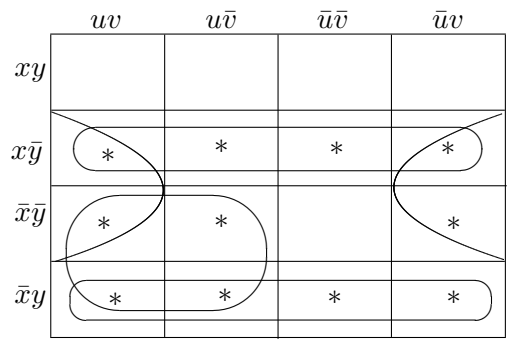
$$\phi_1(x,y,u,v) = x\bar{y} \ \vee \ \bar{x}y \ \vee \ \bar{y}u \ \vee \ \bar{y}v$$



$$\phi_2(x,y,u,v) = x\bar{y} \ \vee \ \bar{x}y \ \vee \ \bar{y}u \ \vee \ \bar{x}v$$

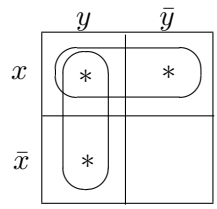


$$\phi_3(x,y,u,v) = x\bar{y} \ \vee \ \bar{x}y \ \vee \ \bar{x}u \ \vee \ \bar{x}v$$



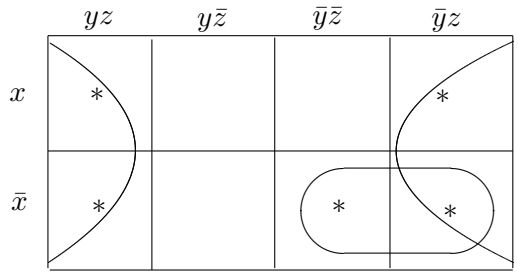
$$\phi_4(x,y,u,v) = x\bar{y} \ \vee \ \bar{x}y \ \vee \ \bar{x}u \ \vee \ \bar{y}v$$

Rešenje 153



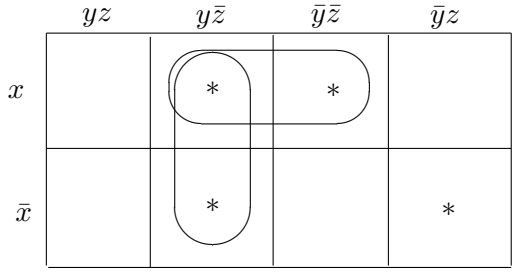
$$\phi(x, y) = x \ \vee \ y$$

Rešenje 154



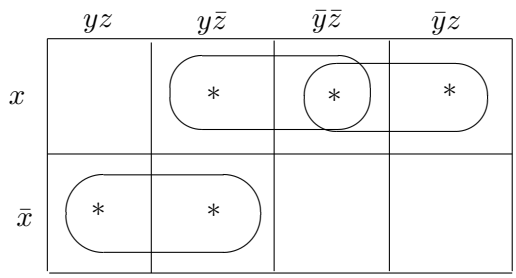
$$\phi(x, y, z) = z \ \vee \ \bar{x}\bar{y}$$

Rešenje 155

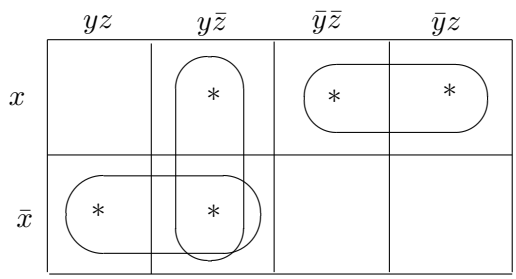


$$\phi(x, y, z) = x\bar{z} \ \vee \ y\bar{z} \ \vee \ \bar{x}\bar{y}z$$

Rešenje 156

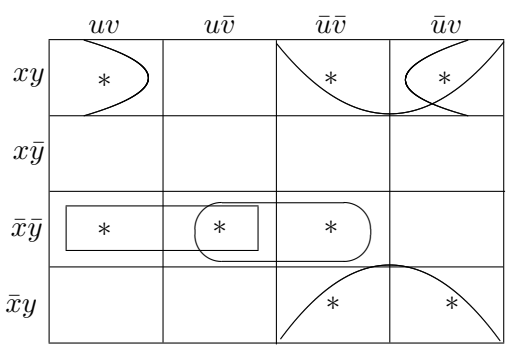


$$\phi_1(x,y,z) = x\bar{y} \ \vee \ \bar{x}y \ \vee \ x\bar{z}$$

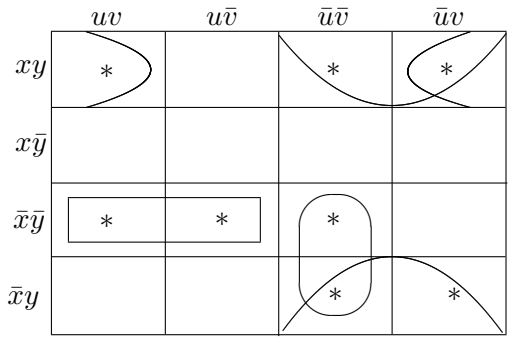


$$\phi_2(x,y,z) = x\bar{y} \ \vee \ \bar{x}y \ \vee \ y\bar{z}$$

Rešenje 157

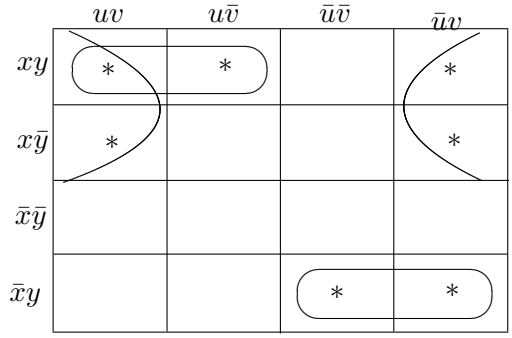


$$\phi_1(x,y,u,v) = y\bar{u} \ \vee \ xyv \ \vee \ \bar{x}\bar{y}u \ \vee \ \bar{x}\bar{y}\bar{v}$$



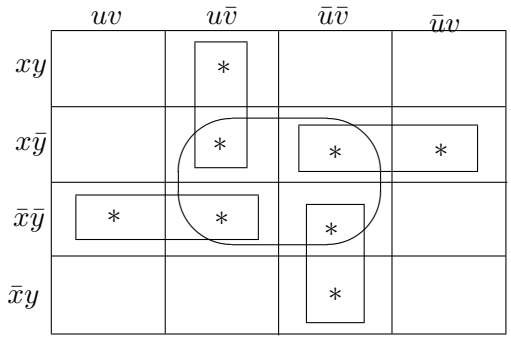
$$\phi_2(x,y,u,v) = y\bar{u} \ \vee \ xyv \ \vee \ \bar{x}\bar{y}u \ \vee \ \bar{x}\bar{u}\bar{v}$$

Rešenje 158



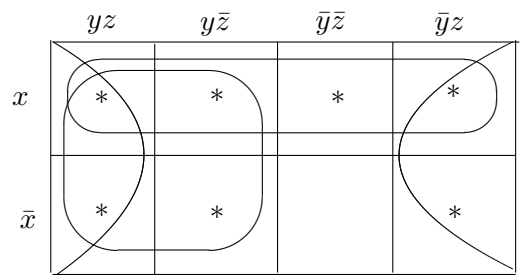
$$\phi(x,y,u,v) = xv \ \vee \ xyu \ \vee \ \bar{x}y\bar{u}$$

Rešenje 159



$$\phi(x,y,u,v) = \bar{x}\bar{y}u \ \vee \ \bar{x}\bar{u}\bar{v} \ \vee \ x\bar{y}\bar{u} \ \vee \ xu\bar{v}$$

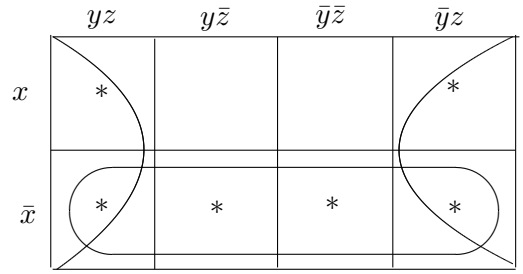
Rešenje 160



$$\phi(x,y,z) = x \ \vee \ y \ \vee \ z$$

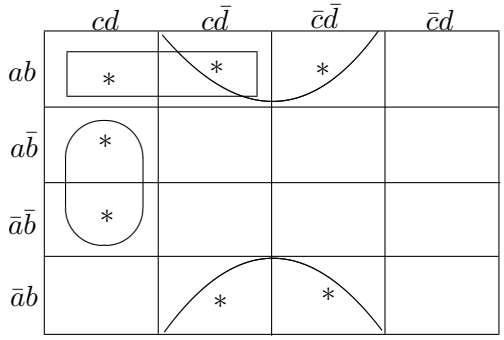
Rešenje 161

$$F(x,y,z) \ = \ \overline{(x \vee \bar{y})} \ \vee \ z \ \vee \ \bar{x}\bar{y}\bar{z} \ = \ \bar{x}y \ \vee \ z \ \vee \ \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

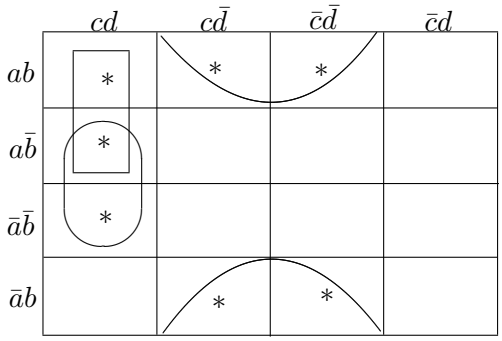


$$\phi(x,y,z) = \bar{x} \ \vee \ z$$

Rešenje 162



$$\phi_1(a,b,c,d) = b\bar{d} \ \vee \ \bar{b}cd \ \vee \ abc$$



$$\phi_1(a,b,c,d) = b\bar{d} \ \vee \ \bar{b}cd \ \vee \ acd$$

Glava 8

RASPLINUTE (FUZZY) STRUKTURE

Pokazalo se da klasične matematičke discipline, kojima je u osnovi teorija skupova i dvovalentna logika, ne mogu na zadovoljavajući način da posluže za razmatranje sistema baziranih na ljudskom ponašanju. U takvim sistemima nije uvek jasna pripadnost elemenata skupu sa određenim svojstvom. Zato je L.A. Zadeh 1965. godine uveo rasplinute skupove (fuzzy sets), proširivši pojam pripadanja na stepen pripadanja elemenata kolekciji.

U klasičnoj matematici pojam karakteristične funkcije je u tesnoj vezi sa pojmom podskupa: Ako je A neprazan skup i $B \subseteq A$, onda je ta funkcija $k_B : A \longrightarrow \{0, 1\}$ data sa

$$k_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in B \\ 0, & \text{za } x \notin B \text{ (tj. } x \in A \setminus B). \end{cases}$$

Između svih podskupova datog skupa A i svih karakterističnih funkcija na skupu A ($k :\longrightarrow \{0, 1\}$) postoji bijekcija: funkciji k odgovara $B \subseteq A$, takav da $x \in B$ akko je $k(x) = 1$.

Mreža je parcijalno uređen skup

$$\mathcal{L} = (L, \leq)$$

u kome svaki dvoelementni podskup $\{p, q\}$ ima infimum ($\inf\{p, q\}$) i supremum ($\sup\{p, q\}$). Na mreži L se definišu dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$: Za $p, q \in L$,

$$p \wedge q := \inf\{p, q\} \text{ i } p \vee q := \sup\{p, q\}.$$

Nula (0) i jedinica (1) su po definiciji najmanji i najveći elementi u mreži ako postoje.

Neka A neprazan skup i $\mathcal{L} = (L, \leq)$ proizvoljna mreža sa nulom i jedinicom. Svako preslikavanje

$$\bar{A} : A \longrightarrow L$$

je jedan rasplinuti skup na A. Skup A je univerzum za $\bar{A}$. Za $a \in A$, $\bar{A}(a)$ je stepen pripadanja elementa a rasplinutom skupu $\bar{A}$.

Rasplinuti skup identifikovan je sa preslikavanjem - uopštenjem karakteristične funkcije. Ako je $L = \{0, 1\}$, rasplinuti skup je upravo jedna karakteristična funkcija. Neka su dati neprazan skup S i mreža $\mathcal{L}$. Za rasplinute skupove $\bar{A}, \bar{B} : S \longrightarrow L$ kažemo da su jednaki ($\bar{A} = \bar{B}$), ako su jednaki kao funkcije, tj. akko važi: Za svako $x \in S$, $\bar{A}(x) = \bar{B}(x)$. Kolekciju svih rasplinutih skupova na S zovemo rasplinutim partitivnim skupom skupa S (u odnosu na datu mrežu) i označavamo sa $\overline{P(S)}$. Dakle,

$$\overline{P(S)} := \{\bar{X} | \bar{X} : S \longrightarrow L\}.$$

Ako su $\bar{A}$ i $\bar{B}$ rasplinuti skupovi na S, tj. $\bar{A}, \bar{B} : S \longrightarrow L$, kažemo da je $\bar{A}$ rasplinuti podskup od $\bar{B}$, u oznaci $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, akko je za svako $x \in S$, $\bar{A}(x) \leq \bar{B}(x)$ (u smislu poretka na mreži L). Ako su $\bar{A}$ i $\bar{B}$ rasplinuti skupovi na S, tj. $\bar{A}, \bar{B} : S \longrightarrow L$, onda je $\bar{A} \cap \bar{B} : S \longrightarrow L$ (presek), pri čemu je za svako x iz S

$$\bar{A} \cap \bar{B}\ (x) := \bar{A}(x) \wedge \bar{B}(x).$$

Slično, $\bar{A} \cup \bar{B} : S \longrightarrow L$ (unija),

$$\bar{A} \cup \bar{B}\ (x) := \bar{A}(x) \vee \bar{B}(x).$$

Ako je $L = [0, 1]$, odgovarajuće mrežne operacije imaju sledeći oblik:

$$\bar{A} \cap \bar{B}\ (x) = \min\{\bar{A}(x), \bar{B}(x)\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B}\ (x) = \max\{\bar{A}(x), \bar{B}(x)\}.$$

Unarna operacija, koja odgovara skupovnom komplementu, zavisi od izbora mreže $\mathcal{L}$. Ako je $L = [0, 1]$, komplement se definiše na sledeći način: Za $\bar{A} : S \longrightarrow [0, 1]$,

$$\bar{A}' : S \longrightarrow [0, 1],\ \bar{A}'(x) = 1 - \bar{A}(x)$$

za sve $x \in S$. Neka je dat skup $S \neq \emptyset$ i proizvoljna mreža $\mathcal{L} = (L, \leq)$ sa nulom i jedinicom. Svaki podskup $\bar{\rho}$ direktnog stepena S^n ($n \in N$, $n > 1$) je jedna n-arna rasplinuta relacija na S. Dakle,

$$\bar{\rho} : S^n \longrightarrow L.$$

8.1 Zadaci

Zadatak 163 *Dat je skup* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *i njegovi podskupovi:* $B = \{c, e\}$, $C = \{a, d, e\}$ *i* $\emptyset$. *Odrediti odgovarajuće karakteristične funkcije.*

Zadatak 164 *Dat je skup* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ *i karakteristične funkcije*

$$K_B = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; K_C = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Odrediti odgovarajuće podskupove.

Zadatak 165 *Dat je skup* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ *i karakteristične funkcije*

$$K_B = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; K_C = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odrediti: $K_B \cap K_C$, $K_B \cup K_C$ *i* K'_B.

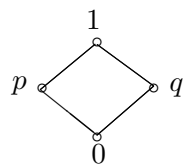
Zadatak 166 *Neka je* $S = \{a, b, c, d\}$ *i neka je* α *troelementni lanac*

$$\alpha = \begin{array}{l} \bullet\ 1 \\ \bullet\ \frac{1}{2} \\ \bullet\ 0 \end{array} .$$

Navesti tri rasplinuta skupa na S.

Zadatak 167 *Neka je dat skup* $S = \{x, y, z\}$ *i neka je data mreža*

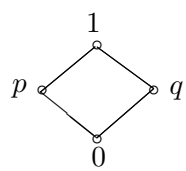
α :



Navesti tri rasplinuta skupa na S.

Zadatak 168 *Neka je dat skup* $S = \{a, b\}$ *i neka je data mreža*

α :



Odrediti rasplinuti partitivni skup skupa S.

Zadatak 169 *Neka je dat skup* $S = \{a, b, c, d\}$, *mreža* α *kao u zadatku (168) i rasplinuti skupovi*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & p & p \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & p & q \end{pmatrix}$$

Odrediti $\bar{A} \cap \bar{B}$ *i* $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Zadatak 170 *Ako je* $S = \{a, b, c\}$, $L = [0, 1]$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}, \ \bar{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0,3 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odrediti $\bar{A} \cap \bar{B}$ *i* $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Zadatak 171 *Ako je* $S = \{a, b, c, d, e\}$, $\alpha = ([0, 1], \leq)$ *i*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix},$$

odrediti $\bar{A}'$.

Zadatak 172 *Neka je dat skup* $S = \{a, b, c, d\}$ *i mreža* α *kao u zadatku (168). Navesti primer binarne rasplinute relacije na* S.

8.2 Rešenja

Rešenje 163

$$K_B = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_C = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_\emptyset = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rešenje 164 $\quad B = \{b, c, e\}, \quad C = \{a, b, c, e, f\}.$

Rešenje 165

$$\begin{aligned}
K_B \cap K_C &= \begin{pmatrix} a & & b & & c & & d & & e & & f \\ 0 & \wedge & 0 & 1 & \wedge & 1 & 1 & \wedge & 0 & 0 & \wedge & 1 & 1 & \wedge & 0 & 0 & \wedge & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
K_B \cup K_C &= \begin{pmatrix} a & & b & & c & & d & & e & & f \\ 0 & \vee & 0 & 1 & \vee & 1 & 1 & \vee & 0 & 0 & \vee & 1 & 1 & \vee & 0 & 0 & \vee & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
K'_B &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Rešenje 166

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \bar{B} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{C} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Rešenje 167

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & p & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ p & q & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rešenje 168 Elementi skupa $\overline{P(S)}$ su

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ p & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ p & p \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ p & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ q & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ q & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ q & q \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ q & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rešenje 169

$$\begin{aligned}
\bar{A} \cap \bar{B} &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & p & p \end{pmatrix} \bigcap \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & p & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & & b & & c & & d & \\ 0 & \wedge\ 1 & 1 & \wedge\ 0 & p & \wedge\ p & p & \wedge\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix} \\
\bar{A} \cup \bar{B} &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & p & p \end{pmatrix} \bigcup \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & p & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & & b & & c & & d & \\ 0 & \vee\ 1 & 1 & \vee\ 0 & p & \vee\ p & p & \vee\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & p & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Rešenje 170

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0,2 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} \cup \bar{B} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0,3 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Rešenje 171

$$\begin{aligned}
\bar{A}' &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1-0,5 & 1-0,3 & 1-1 & 1-0 & 1-0,2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0,5 & 0,7 & 0 & 1 & 0,8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Rešenje 172

$\bar{\rho}_1$	a	b
a	p	1
b	q	0

,

$\bar{\rho}_2$	a	b
a	1	p
b	p	0

Glava 9

DETERMINANTE

Permutacija nepraznog skupa A je svaka bijekcija $\pi : A \to A$. Posmatraćemo permutacije konačnog skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, pri čemu ćemo umesto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

pisati

$$\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n).$$

Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ ćemo označiti sa S_n. Par $(\pi(i), \pi(j))$ elemenata permutacije $\pi \in S_n$, obrazuje inverziju ako je $(\pi(i) > \pi(j))$ za $i < j$. Permutacija je parna, odnosno neparna, ako je broj inverzija u permutaciji paran, odnosno neparan. Šema kompleksnih brojeva

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva se matrica tipa $n \times n$ ili kvadratna matrica.

Determinanta matrice A je broj $detA = |A|$ koji se definiše izrazom

$$detA := \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{inv\ \pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

i označava sa

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gde je sa $inv\ \pi$ označen ukupan broj inverzija u permutaciji $\pi \in S_n$.

Elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in};\ i = 1, 2, \ldots, n$ obrazuju i-tu vrstu, a elementi $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj};\ j = 1, 2, \ldots, n$ obrazuju j-tu kolonu. Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots,$ a_{nn} obrazuju glavnu dijagonalu, a elementi $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$ sporednu. Za determinantu matrice tipa $n \times n$ kaže se da je reda n.

Važnije osobine determinanti su:

1. Determinanta ne menja vrednost ako se vrste redom zamene kolonoma.

2. Ako dve vrste (kolone) zamene mesta, determinanta menja znak.

3. Ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni sa odgovarajućim elementima druge vrste (kolone), determinanta je jednaka nuli; specijalno: Ako su u determinanti dve vrste ili kolone jednake, vrednost determinante je nula.

4. Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone jednaki nuli, determinanta je jednaka nuli.

5. Determinanta se množi brojem tako što se svaki element jedne i samo jedne vrste (kolone) pomnoži tim brojem.

6. Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste (kolone) pomnoženi istim brojem.

7. Ako su svi elementi i-te vrste determinante predstavljeni u obliku $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, onda je determinanta jednaka zbiru dve determinante kod kojih su vrste u obe, osim i-te, jednake vrstama date determinante, a i-ta vrsta jedne determinante jednaka je $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a druge $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Neka je data determinanta $detA = |a_{ij}|_{n\times n}$. Ako se u njoj izostave i-ta vrsta i j-ta kolona, dobija se determinanta M_{ij} reda $n-1$, koja se zove minor elementa a_{ij}. Ako je M_{ij} minor elementa a_{ij}, onda je determinanta $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ kofaktor elementa a_{ij}.

Neka je $|A| = |a_{ij}|_{n\times n}$ determinanta reda n. Ako su $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ kofaktori elemenata i-te vrste, a $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$ kofaktori elemenata j-te kolone, $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$, onda je

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Aij = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} Aij.$$

9.1 Zadaci

Izračunati determinantu (173 - 187).

Zadatak 173 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

Zadatak 174 $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$

Zadatak 175 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

Zadatak 176 $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$

Zadatak 177 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Zadatak 178 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

Zadatak 179 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

Zadatak 180 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Zadatak 181 $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Zadatak 182 $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Zadatak 183 $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$, *gde je* $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadatak 184 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

Zadatak 185 $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$

Zadatak 186 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$

Zadatak 187 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix}$

Dokazati jednakost $(213 - 216)$.

Zadatak 188 $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(b-a)(a-c)$

Zadatak 189 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Zadatak 190 $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = a(x-y)(x-z)(z-y)$

Zadatak 191 $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$

Rešiti jednačinu (192 - 194).

Zadatak 192 $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$

Zadatak 193 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

Zadatak 194 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$

9.2 Rešenja

Rešenje 173 14

Rešenje 174 $4xy$

Rešenje 175 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$

Rešenje 176 0

Rešenje 177 40

Rešenje 178 -68

Rešenje 179 100

Rešenje 180 -5

Rešenje 181 -2

Rešenje 182 -1032

Rešenje 183
$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = (z^3-1)^2 = \Big(\Big(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3-1\Big)^2 = 0$$

Rešenje 184 $3abc - a^3 - b^3 - c^3$

Rešenje 185 $(ab+bc+ca)x + abc$

Rešenje 186 $abcd + abd + acd + bcd + abc$

Rešenje 187 $-8abcd$

Rešenje 188 $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ca-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & -c(b-a) \\ c-a & -b(c-a) \end{vmatrix}$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (b-c)(b-a)(a-c)$$

Rešenje 192 $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$

Dodavanjem elemenata druge i treće kolone odgovarajućim elementima prve kolone dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 3x-2 & x+2 & x-1 \\ 3x-2 & x-4 & x \\ 3x-2 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0, \quad (3x-2)\begin{vmatrix} 1 & x+2 & x-1 \\ 1 & x-4 & x \\ 1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3x-2)\begin{vmatrix} 1 & x+2 & x-1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad (3x-2)\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$3x-2=0, \quad x=\frac{2}{3}$$

Rešenje 193 $x_1 = 1,\ x_2 = 3$

Rešenje 194

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (1-x^2)(4-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-(1-x^2)(4-x^2) = 0, \quad x \in \{-2,-1,1,2\}$$

Glava 10

MATRICE

Matrica tipa $m \times n$ je pravougaona šema brojeva

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ obrazuju i-tu vrstu, a elementi $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ obrazuju j-tu kolonu ($i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$).

Ako je $m = n$ matricu zovemo kvadratna. Matricu A označavamo sa $[a_{ij}]_{m\times n}$. Dve matrice su jednake ako su istog tipa i odgovarajući elementi su im jednaki. Matrica čiji su svi elementi 0 naziva se nula matrica i označava sa 0. Kvadratna matrica reda n, kod koje je $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$, a svi ostali elementi jednaki 0, naziva se jedinična matrica reda n i označava sa I_n, odnosno I.

Zbir matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, u oznaci $A + B$, je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ za koju je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$). Ako su A, B, C i O matrice istog tipa, onda je:

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(iii) $A + 0 = A$.

Proizvod skalara (broja) λ i matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ je matrica $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, gde je $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$). Neka su A i B matrice istog tipa i neka su α i β brojevi. Tada važe jednakosti:

(i) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,

(ii) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$,

(iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,

(iv) $1A = A$,

(v) $2A = A + A,\ 3A = A + A + A, \ldots$

Matrica $-A$ definisana je sa $-A = (-1)A$. Neka su A i B matrice istog tipa. Razlika matrica A i B, u oznaci $A - B$ se definiše na sledeći način:

$$A - B := A + (-1)B.$$

Proizvod $A \cdot B$ matrica A i B definiše se kada je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice. Ako je $A = [a_{ij}]_{m\times k}$ i $B = [b_{ij}]_{k\times n}$, onda je

$$A \cdot B \ := [c_{ij}]_{m\times n}, \qquad \text{gde je} \qquad c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Ako navedeni proizvodi i zbirovi postoje, za matrično množenje važe zakoni:

(i) $(AB)C = A(BC)$,

(ii) $A(B+C) = AB + AC$,

(iii) $(A+B)C = AC + BC$,

(iv) $IA = AI = A$,

(v) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$,

gde je $a \in R$.

Transponovana matrica za matricu A je matrica A^T čije su sve vrste redom jednake kolonama matrice A. Matrica za koju je $A = A^T$ zove se simetrična matrica. Matricu, čiji su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0, zovemo dijagonalna matrica.

Za kvadratne matrice istog tipa važi:

(i) $detA = detA^T$,

(ii) $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$.

Ako je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, onda je sledeća matrica adjungovana za matricu A:

$$adjA := [A_{ij}]^T_{n\times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gde su A_{ij} kofaktori elemenata a_{ij}.

Neka je A kvadratna matrica reda n. Ako postoji matrica B reda n takva da je

$$AB = BA = I_n,$$

tada kažemo da je B inverzna matrica matrice A. Ako inverzna matrica matrice A postoji, ona je jedinstvena. Inverznu matricu matrice A označavamo sa A^{-1}. Matricu, koja ima inverznu matricu, zovemo regularna, a onu, koja nema inverznu matricu, singularna. Matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ima inverznu matricu akko je $detA \neq 0$. Ako je matrica A regularna, onda je

$$A^{-1} = (detA)^{-1} adjA.$$

Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrica tipa $m \times n$. Posmatrajmo izvestan broj r ($r \leq m,\ r \leq n$) vrsta i isto toliko kolona matrice A. Elementi, koji se nalaze u presecima izdvojenih vrsta sa kolonama, obrazuju determinantu za koju kažemo da je minor reda r. Matrica A ima rang r, u oznaci $rangA = r$, ako ima bar jedan minor reda r različit od nule, a svi minori reda $r + 1$ i višeg, ukoliko postoje, su jednaki nuli.

Rang matrice se ne menja:

1. ako neke vrste (kolone) zamene mesta,
2. ako se svi elementi neke vrste (kolone) pomnože istim brojem i dodaju odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone),
3. ako se svi elementi neke vrste (kolone) pomnože brojem različitim od nule,
4. izostavljanjem vrste (kolone) koja je linearna kombinacija nekih drugih vrsta (kolona),
5. Izostavljanjem vrsta (kolona) čiji su svi elementi nule.

Ako matrice A i B imaju isti rang, onda kažemo da su matrice A i B ekvivalentne i pišemo $A \sim B$.

10.1 Zadaci

Zadatak 195 *Date su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti: $A + B,\ A - B,\ 3A + 2B.$

Zadatak 196 *Date su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti matricu X *tako da je* $4A + 3X = B.$

Odrediti proizvod $A \cdot B$ matrica A i B ako je (197 - 205):

Zadatak 197 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Zadatak 198 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Zadatak 199 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Zadatak 200 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 201 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Zadatak 202 $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

Zadatak 203 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Zadatak 204 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zadatak 205 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Zadatak 206 *Ako je* $F(x) = -2 - 5x + 3x^2$ *i* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, *odrediti* $F(A)$.

Odrediti inverznu matricu matrice A ako je (207 - 210) :

Zadatak 207 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Zadatak 208 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zadatak 209 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Zadatak 210 $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

Rešiti matričnu jednačinu (211 - 218)

Zadatak 211 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

Zadatak 212 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Zadatak 213 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

Zadatak 214 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Zadatak 215 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

Zadatak 216 $X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 217 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$

Zadatak 218 $(A - 2I) \cdot X = A + I$ *, gde je* I *jedinična matrica i* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Odrediti rang matrice (219 - 223) :

Zadatak 219 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Zadatak 220 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Zadatak 221 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 222 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Zadatak 223 $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix}$

Odrediti rang matrice A za razne vrednosti parametra λ ako je (224 - 228) :

Zadatak 224 $A = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Zadatak 225 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Zadatak 226 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

Zadatak 227 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 228 $A = \begin{bmatrix} 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 7 & -1 & \lambda & 5 \\ 2 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

10.2 Rešenja

Rešenje 195

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A-B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ 3A+2B &= \begin{bmatrix} 7 & 7 & 16 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rešenje 196

$$4A+3X=B,\ X=\frac{1}{3}(B-4A),\ X=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje 197 [14]

Rešenje 198

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Rešenje 199

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje 200

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešenje 201

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Rešenje 202

$$\begin{bmatrix} 23 & -39 & 29 \\ 24 & -48 & 32 \\ 58 & 24 & 56 \end{bmatrix}$$

Rešenje 203

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje 204

$$\begin{bmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešenje 205

$$\begin{bmatrix} 8 & -11 & 1 & 4 \\ -13 & 10 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Rešenje 206

$$F(A) = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Rešenje 207

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Rešenje 208

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje 209

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Rešenje 210

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje 211

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Rešenje 212

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Rešenje 213

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešenje 214

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešenje 215

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Rešenje 216

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Rešenje 217

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje 218

$$(A - 2I) \cdot X = A + I,\ X = (A - 2I)^{-1} \cdot (A + I),\ X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Rešenje 219 $r = 2$

Rešenje 220

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad r = 2$$

jer su svi minori reda 3 jednaki nuli, a minor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Rešenje 221

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad rangA = 3$$

Rešenje 222 $r = 2$

Rešenje 223

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 11 & 1 & 6 \\ 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 11 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 11 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}, \quad rangA = 4.$$

Rešenje 224

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 5 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 10 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 1 & 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 5 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & -\lambda-10 & -7 \\ 0 & 3 & -21 & \lambda-12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & -\lambda-10 & -7 \\ 0 & 0 & 3\lambda+9 & \lambda+9 \end{bmatrix}, \ r = 3$$

jer je bar jedan od minora

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -\lambda-10 \\ 0 & 0 & 3\lambda+9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & \lambda+9 \end{vmatrix}$$

različit od nule.

Rešenje 225

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Ako je $\lambda \neq 0$, onda je $rangA = 3$. Ako je $\lambda = 0$, onda je $rangA = 2$.

Rešenje 226

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 2 & 5 & \lambda & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & \lambda-10 \\ 0 & 3 & \lambda+12 & -21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & \lambda-10 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & -3\lambda+9 \end{bmatrix}$$

Ako je $\lambda \neq 3$, onda je $rangA = 3$. Ako je $\lambda = 3$, onda je $rangA = 2$.

Rešenje 227

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & \lambda & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & \lambda-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda+5 \\ 0 & 3 & \lambda-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda+5 \\ 0 & 0 & 4\lambda+13 \end{bmatrix}$$

Ako je $\lambda \neq -\dfrac{13}{4}$, onda je $rangA = 3$. Ako je $\lambda = -\dfrac{13}{4}$, onda je

$rangA = 2.$

Rešenje 228

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 7 & -1 & \lambda & 5 \\ 2 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 7 & -1 & \lambda & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & -6 \\ 2 & 3 & \lambda & -1 \\ 5 & 7 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & \lambda - 20 & 11 \\ 0 & -3 & -51 & \lambda + 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & \lambda - 20 & 11 \\ 0 & 0 & -3\lambda + 9 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

Ako je $\lambda \neq 3$, onda je $rangA = 3$. Ako je $\lambda = 3$, onda je $rangA = 2.$

Glava 11

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Linearni term nad skupom realnih brojeva R definiše se rekurzivno na sledeći način:

(i) Promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i oznake elemenata skupa R su linearni termi.

(ii) Ako su t_1 i t_2 linearni termi, onda su i $(t_1 + t_2)$, $(t_1 - t_2)$, $\alpha \cdot t_1$ linearni termi.

(iii) Linearni termi su samo oni izrazi do kojih se dolazi samo konačnim brojem primena pravila (i) i (ii).

Neka su t_1 i t_2 linearni termi po $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tada jednakosnu formulu

$$t_1 = t_2$$

zovemo linearna jednačina po nepoznatim $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Sistem linearnih jednačina je konjunkcija

$$J_1 \wedge J_2 \wedge \ldots \wedge J_m$$

linearnih jednačina $J_1, J_2, \ldots, J_m$. Sistem se obično navodi kao niz jednačina, jedna ispod druge, a znak konjunkcije se izostavlja. Kažemo da su linearne jednačine J_1 i J_2 ekvivalentne ako je $J_1 \Longleftrightarrow J_2$ tačna formula na skupu R.

Sistemi linearnih jednačina S_1 i S_2 su ekvivalentni ako je $S_1 \Longleftrightarrow S_2$ tačna formula na skupu R.

Neka je $J(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ linearna jednačina sa nepoznatim $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Uređena n-torka $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ elemenata iz R je rešenje ove jednačine ako je $J(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tačan iskaz. Ako je $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sistem linearnih jednačina u kome su nepoznate tačno $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onda je $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$ rešenje sistema ako je $S(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tačan iskaz u skupu R.

Jednačine J_1 i J_2 sa istim nepoznatim su ekvivalentne ako i samo ako im se poklapaju skupovi rešenja. Linearna jednačina $J(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ekvivalentna je sa nekom jednačinom oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 \cdots + a_nx_n = b;\ a_1, a_2, \cdots a_n, b \in R.$$

Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih ekvivalentan je sa sa nekim sistemom oblika

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

gde su $a_{ij} \in R$ koeficijenti uz nepoznate, a $b_i \in R$ slobodni članovi.

Ako su svi slobodni članovi nule, sistem je homogen, inače je nehomogen. Sistem je saglasan (moguć) ako ima bar jedno rešenje, u protivnom je protivurečan (nemoguć). Homogen sistem uvek ima bar jedno, tzv. trivijalno rešenje, n-torku $(0, 0, \ldots, 0)$. Saglasan sistem može imati jedinstveno rešenje i tada ga zovemo određen sistem ili beskonačno mnogo rešenja i tada ga zovemo neodređen sistem.

Ekvivalentan sistem se dobija ako se:

1. promeni redosled jednačina u sistemu,

2. promeni redosled sabiraka u jednačinama sistema,

3. bilo koja jednačina sistema pomnoži brojem različitim od nule,

4. proizvoljnoj jednačini sistema doda bilo koja druga jednačina tog sistema, pomnožena brojem različitim od nule.

Gausov algoritam

Neka je dat sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Prvo se prelazi na ekvivalentan sistem kod koga je $a_{11} \neq 0$. Takva jednačina mora postojati, jer se inače u sistemu ne bi javljala nepoznata x_1. Zatim se drugoj jednačini doda prva pomnožena sa $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$. Isto se uradi i sa svim ostalim jednačinama: za $i = 2, 3, \ldots, m$; i-toj jednačini doda prva pomnožena sa $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$. Tako se dolazi do sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ & & a'_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array}$$

kod koga se x_1 javlja samo u prvoj jednačini, a sam sistem je ekvivalentan sa polaznim. U dobijenom sistemu može se pojaviti jednačina oblika $0 = b$. Ako slobodan član b nije nula, formula $0 = b$ je kontradikcija, pa je ovaj sistem, a zato i polazni, protivurečan i nema rešenja. Postupak rešavanja je time završen. Ako je b nula, jednačina o kojoj je reč, ima oblik $0 = 0$. Ona se izostavlja, a sistem ostaje ekvivalentan početnom. Dalje se analogni postupak primenjuje na nepoznatu x_2 u poslednjem sistemu, ali tako da se prva jednačina više ne dira. Ako se u preostalim jednačinama ne pojavljuje x_2, menja se redosled nepoznatih. U konačnom broju koraka tako se ili utvrđuje da je polazni sistem protivurečan, ili se dolazi do tzv. trougaonog sistema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \cdots & + & c_{1r}x_r & + & \cdots & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\ & & c_{22}x_2 & + & \cdots & + & c_{2r}x_r & + & \cdots & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & & c_{rr}x_r & + & \cdots & + & c_{rn}x_n & = & d_r \end{array}$$

Ovde su koeficijenti $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{rr}$ svi različiti od nule. Redosled nepoznatih ne mora biti isti kao u polaznom sistemu, ali, zbog jednostavnosti, one su i

ovde navedene od x_1 do x_n. Ako se dođe do ovakvog sistema, onda je polazni sistem saglasan.

U specijalnom slučaju kada je $r = n$ imamo:

$$\begin{array}{ccccccccc} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \cdots & + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\ & & c_{22}x_2 & + & \cdots & + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & c_{nn}x_n & = & d_n \end{array}$$

i u ovom slučaju postoji jedinstveno rešenje.

Ako je $r < n$, polazni sistem je ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \cdots & + & c_{1r}x_r & = & d_1 & - & c_{1,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & c_{1n}x_n \\ & & c_{22}x_2 & + & \cdots & + & c_{2r}x_r & = & d_2 & - & c_{2,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & c_{2n}x_n \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & c_{rr}x_r & = & d_r & - & c_{r,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & c_{rn}x_n \end{array}$$

Ako se nepoznate $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sa desne strane gornjih jednačina zamene proizvoljnim brojevima, sistem se svodi na prethodni specijalan slučaj, pri čemu je broj jednačina i nepoznatih r. U ovom slučaju je sistem neodređen.

Determinante i sistemi linearnih jednačina

Neka je dat sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih u sređenom obliku:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Determinanta

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

čiji su elementi koeficijenti uz nepoznate, zove se determinanta sistema. Za svako $k = 1, 2, \ldots, n$, označimo sa D_k determinantu koja se dobija iz determinante sistema D, kada se k-ta kolona zameni kolonom koju čine slobodni

članovi $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Kramerovo pravilo: Ako je $D \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje dato sa

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Ako je determinanta sistema $D = 0$, a bar jedna od determinanti $D_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$, sistem je protivurečan.

Matrice i sistemi linearnih jednačina

Neka je dat sistem

$$(S) \qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrica sistema i

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

proširena matrica sistema.

Kroneker-Kapelijeva teorema: Sistem (S) je saglasan ako i samo ako je rang matrice A jednak rangu matrice A_p.

Za sistem (S) je ispunjeno:

1. Ako je $rangA = rangA_p = n$ $(m \geq n)$, sistem ima jedinstveno rešenje.
2. Ako je $rangA = rangA_p < n$, sistem ima beskonačno mnogo rešenja.
3. Ako je $rangA < rangA_p$, sistem nema rešenja.

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

možemo zameniti matričnom jednačinom

$$A \cdot X = B,$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ako postoji inverzna matrica A^{-1}, onda je

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

odakle se neposredno dobija rešenje sistema.

11.1 Zadaci

Gausovom metodom rešiti sistem jednačina (229 - 240).

Zadatak 229

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & 2 \end{array}$$

Zadatak 230

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 2 \\ 6x & - & 4y & = & 3 \end{array}$$

Zadatak 231

$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 5y & = & 2 \\ 8x & + & 10y & = & 4 \end{array}$$

Zadatak 232

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

Zadatak 233

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

Zadatak 234

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 3 \\ 5x & - & 8y & + & 6z & = & 5 \end{array}$$

Zadatak 235

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 6x & - & 2y & + & 6z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & & & = & 2 \end{array}$$

Zadatak 236

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ y & + & z & = & 4 \\ z & + & x & = & 5 \end{array}$$

Zadatak 237

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

Zadatak 238

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & + & 8t & = & -1 \\ x & + & 3y & - & 6z & + & 2t & = & 3 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & - & 2t & = & 8 \\ 2x & - & y & + & 2z & & & = & 4 \end{array}$$

Zadatak 239

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & 3y & + & 2z & - & t & = & 8 \\ 3x & - & 2y & + & z & - & 3t & = & 7 \\ 2x & - & y & & & - & 5t & = & 6 \\ 5x & - & 3y & + & z & - & 8t & = & 1 \end{array}$$

Zadatak 240

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 7y & + & 3z & + & t & = & 5 \\ x & + & 3y & + & 5z & - & 2t & = & 3 \\ x & + & 5y & - & 9z & + & 8t & = & 1 \\ 5x & + & 18y & + & 4z & + & 5t & = & 12 \end{array}$$

Matričnom metodom rešiti sistem jednačina (241 - 243):

Zadatak 241

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & + & z & = & 7 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & = & 16 \\ 2x & + & 5y & + & 4z & = & 9 \end{array}$$

Zadatak 242

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 13 \\ -x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \end{array}$$

Zadatak 243

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 5 \\ 3x & - & y & = & 1 \end{array}$$

Kramerovom metodom rešiti sistem jednačina (244 - 249):

Zadatak 244

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 2 \\ 2x & - & 3y & = & -3 \end{array}$$

Zadatak 245

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 2 \\ -3x & + & 6y & = & 1 \end{array}$$

Zadatak 246

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 2 \\ -2x & + & 4y & = & -4 \end{array}$$

Zadatak 247

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & - & 6z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & 6z & = & 4 \end{array}$$

Zadatak 248

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & & & + & 5z & = & 5 \end{array}$$

Zadatak 249

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 3y & + & z & = & 3 \end{array}$$

Diskutovati sistem jednačina u zavisnosti od realnih parametara a i b i rešiti sistem u slučajevima kad ima rešenje (250 - 265):

Zadatak 250

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & 4y & = & 2 \\ 9x & + & ay & = & 3 \end{array}$$

Zadatak 251

$$\begin{array}{rcrcr} ax & - & 9y & = & 6 \\ 10x & - & by & = & 10 \end{array}$$

Zadatak 252

$$\begin{array}{rcrcl} (a-2)x & + & (a^2-4)y & = & a^2+2a \\ (a-2)x & - & (a-2)y & = & 3 \end{array}$$

Zadatak 253

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ ax & + & 4y & + & z & = & 5 \\ 6x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 13 \end{array}$$

Zadatak 254

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2ax & - & 23y & + & 29z & = & 6 \\ 7x & + & ay & + & 4z & = & 7 \\ 5x & + & 2y & + & az & = & 5 \end{array}$$

Zadatak 255

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 12 \end{array}$$

Zadatak 256

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

Zadatak 257

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & (1+a)y & + & z & = & 2a \\ x & + & y & - & (1+a)z & = & 0 \end{array}$$

Zadatak 258

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & ay & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & az & = & 1 \end{array}$$

Zadatak 259

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & & & + & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 2y & & & = & 1 \\ x & - & 2y & + & bz & = & 3 \end{array}$$

Zadatak 260

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ ax & + & 4y & + & z & = & 0 \\ 6x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

Zadatak 261

$$\begin{array}{rcrcrcl} (a-1)x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & a \\ (a+2)x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & 2a+1 \\ (a+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a+1 \end{array}$$

Zadatak 262

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Zadatak 263

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Zadatak 264

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & & & + & 2x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & bx_3 & = & 3 \end{array}$$

Zadatak 265

$$\begin{array}{rcrcrcl} (a+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & (a+1)x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+1)x_3 & = & a^2 \end{array}$$

11.2 Rešenja

Rešenje 229 $x = 3, \quad y = -1$

Rešenje 230 Sistem je protivurečan.

Rešenje 231 $(x, y) = \left(\dfrac{2 - 5\alpha}{4},\ \alpha\right),\ \alpha \in R$

Rešenje 232 $x = y = z = 0$

Rešenje 233 $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

Rešenje 234 $(x, y, z) = (10\alpha + 1,\ 7\alpha,\ \alpha),\ \alpha \in R$

Rešenje 235 Sistem je protivurečan.

Rešenje 236 $x = 2,\ y = 1,\ z = 3$

Rešenje 237 $x_1 = -2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

Rešenje 238 $x = 2,\ y = -3,\ z = -\dfrac{3}{2},\ t = \dfrac{1}{2}$

Rešenje 239 Sistem je protivurečan.

Rešenje 240 $(x, y, z, t) = (6 - 26\alpha + 17\beta,\ -1 + 7\alpha - 5\beta,\ \alpha,\ \beta);\ \alpha,\ \beta \in R$

Rešenje 241 $x = 3,\ y = -1,\ z = 2$

Rešenje 242 $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

Rešenje 243 $x = 1,\ y = 2$

Rešenje 244 $x = 0,\ y = 1$

Rešenje 245 Sistem je protivurečan.

Rešenje 246 Sistem je neodredjen. $(x, y) = (2\alpha + 2,\ \alpha),\ \alpha \in R$

Rešenje 247 $D = 48, D_x = -48, D_y = 24, D_z = 16, x = -1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$

Rešenje 248 Sistem je protivurečan.

Rešenje 249 Sistem je neodredjen. $(x, y, z) = \Big(\frac{3}{5} - \alpha,\ \frac{1}{5} + \alpha,\ \alpha\Big),\ \alpha \in R$

Rešenje 250 $D = (a-6)(a+6),\ D_x = 2(a-6),\ D_y = 3(a-6)$
Za $a \neq \pm 6$ sistem je odredjen i ima rešenje $(x, y) = \Big(\frac{2}{a+6}, \frac{3}{a+6}\Big)$.
Za $a = 6$ sistem je neodredjen i ima rešenje $(x, y) = \Big(\alpha,\ \frac{1-3\alpha}{2}\Big),\ \alpha \in R$.
Za $a = -6$ sistem je protivurečan.

Rešenje 251 $D = -(ab-90),\ D_x = -6(b-15),\ D_y = 10(a-6)$. Za $ab \neq 90$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y) = \Big(\frac{6(b-15)}{ab-90}, \frac{10(6-a)}{ab-90}\Big).$$

Za $a = 6$ i $b = 15$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y) = \Big(\frac{3\alpha+2}{2},\ \alpha\Big),\ \alpha \in R.$$

Za $ab = 90$ i $a \neq 6$ sistem je protivurečan.

Rešenje 252 $D = -(a-2)^2(a+3),\ D_x = -(a-2)(a+2)(a+3),\ D_y = -(a-2)(a-1)(a+3)$. Za $a \neq 2$ i $a \neq -3$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y) = \Big(\frac{a+2}{a-2}, \frac{a-1}{a-2}\Big).$$

Za $a = -3$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y) = \Big(\alpha,\ \frac{5\alpha+3}{5}\Big),\ \alpha \in R.$$

Za $a = 2$ sistem je protivurečan.

Rešenje 253 $D = (a+3)(a-4),\ D_x = -(a+3),\ D_y = a+3,\ D_z = 6(a+3)(a-4)$. Za $a \neq -3$ i $a \neq 4$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(-\frac{1}{a-4}, \frac{1}{a-4}, 6\Big),$$

Za $a = -3$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\alpha,\ \frac{4\alpha - 1}{3}, \frac{19 - 7\alpha}{3}\Big),\ \alpha \in R.$$

Za $a = 4$ sistem je protivurečan.

Rešenje 254 $D = 2(a-3)(a^2+3a+9),\ D_x = 2(a-3)(3a+17),\ D_y = 2(a-3)(7a-20),\ D_z = 2(a-3)(5a-14)$. Za $a \neq 3$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\frac{3a+17}{a^2+3a+9}, \frac{7a-20}{a^2+3a+9}, \frac{5a-14}{a^2+3a+9}\Big).$$

Za $a = 3$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = (\alpha, 1-\alpha, 1-\alpha),\ \alpha \in R.$$

Rešenje 255 $D = -(a-1),\ D_x = 12,\ D_y = -9(a-1),\ D_z = 2(a-7)$. Za $a \neq 1$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\frac{12}{1-a}, 9, \frac{2a-14}{1-a}\Big).$$

Za $a = 1$ sistem je protivurečan.

Rešenje 256 $D = (a-1)^2(a+2),\ D_x = -(a-1)^2(a+1),\ D_y = (a-1)^2,\ D_z = (a-1)^2(a+1)^2$. Za $a \neq 1$ i $a \neq -2$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\frac{-a-1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\Big).$$

Za $a = 1$ sistem je neodređen i ima rešenje

$$(x, y, z) = (\alpha,\ \beta, 1-\alpha-\beta);\ \alpha, \beta \in R.$$

Za $a = -2$ sistem je protivurečan.

Rešenje 257 $D = -a(a+2),\ D_x = -a(a^2-2),\ D_y = -a(a+2),\ D_z = -a^2$. Za $a \neq 0$ i $a \neq -2$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\frac{a^2-2}{a+2}, 1, \frac{a}{a+2}\Big).$$

Za $a = 0$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = (\alpha, -\alpha, 0);\ \alpha \in R.$$

Za $a = -2$ sistem je protivurečan.

Rešenje 258 $D = -a(a-1)(a+1),\ D_x = -(a-1)^2,\ D_y = -(a-1)^2,\ D_z = (a-1)(a+1)$. Za $a \neq 0,\ a \neq 1$ i $a \neq -1$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\frac{a-1}{a(a+1)}, \frac{a-1}{a(a+1)}, -\frac{1}{a}\Big).$$

Za $a = 1$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = (\alpha, 0, \alpha - 1);\ \alpha \in R.$$

Za $a = 0$ ili $a = -1$ sistem je protivurečan.

Rešenje 259 $D = 2(ab - 12),\ D_x = 4(b-4),\ D_y = ab - 10b + 28,\ D_z = 8(a-3)$.
Za $ab \neq 12$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\frac{2(b-4)}{ab-12}, \frac{ab-10b+28}{2(ab-12)}, \frac{4(a-3)}{ab-12}\Big).$$

Za $a = 3$ i $b = 4$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = \Big(\alpha, \frac{1-5\alpha}{2}, \frac{2-3\alpha}{2}\Big);\ \alpha \in R.$$

Za $ab = 12$ i $a \neq 3$ sistem je protivurečan.

Rešenje 260 $D = (a-4)(a+3),\ D_x = D_y = D_z = 0$. Za $a \notin \{-3, 4\}$ sistem ima samo trivijalno rešenje $x = y = z = 0$
Za $a = -3$ sistem je neodredjen i ima rešenje $(x, y, z) = (-3\alpha, -4\alpha, 7\alpha)$; $\alpha \in R$.
Za $a = 4$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x, y, z) = (\beta, -\beta, 0);\ \beta \in R.$$

Rešenje 261 $D = 2a(a-1),\ D_1 = a(2a-3),\ D_2 = a(2a-1),\ D_3 = a(2-a)$.
Za $a \neq 0$ i $a \neq 1$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{2a-3}{2(a-1)}, \frac{2a-1}{2(a-1)}, \frac{2-a}{2(a-1)}\Big).$$

Za $a = 0$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\alpha,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\Big),\ \alpha \in R.$$

Za $a = 1$ sistem je protivurečan.

Rešenje 262 $D = 2(a-1),\ D_1 = -1,\ D_2 = 3(2a-1),\ D_3 = 3a-1.$
Za $a \neq 1$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(-\frac{1}{2(a-1)}, \frac{3(2a-1)}{2(a-1)}, \frac{3a-1}{2(a-1)}\Big).$$

Za $a = 1$ sistem je protivurečan.

Rešenje 263 $D = -5a+4,\ D_1 = -1,\ D_2 = -a+1,\ D_3 = 3a-3.$
Za $a \neq \frac{4}{5}$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{1}{5a-4}, \frac{a-1}{5a-4}, \frac{3-3a}{5a-4}\Big).$$

Za $a = \frac{4}{5}$ sistem je protivurečan.

Rešenje 264 $D = 2(ab-12),\ D_1 = 4(b-4),\ D_2 = ab-10b+28,\ D_3 = 8(a-3).$
Za $ab \neq 12$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{2(b-4)}{ab-12}, \frac{ab-10b+28}{2(ab-12)}, \frac{4(a-3)}{ab-12}\Big).$$

Za $a = 3$ i $b = 4$ sistem je neodredjen i ima rešenje

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\alpha,\ \frac{1-5\alpha}{2}, \frac{2-3\alpha}{2}\Big),\ \alpha \in R.$$

Za $ab = 12$ i $a \neq 3$ sistem je protivurečan.

Rešenje 265 $D = a^2(a+3),\ D_1 = -a(a^2-2),\ D_2 = a(2a-1),\ D_3 = a(a^3+2a^2-a-1).$
Za $a \neq 0$ i $a \neq -3$ sistem je odredjen i ima rešenje

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{2-a^2}{a(a+3)}, \frac{2a-1}{a(a+3)}, \frac{a^3+2a^2-a-1}{a(a+3)}\Big).$$

Za $a = 0$ ili $a = -3$ sistem je protivurečan.