Fizički fakultet
Univerziteta u Beogradu

Iris Borjanović

Kvantna hromodinamika

seminarski rad

Beograd, maj 2002.

Sadržaj

1 Uvod

Kvantna hromodinamika (QCD) je kvantna teorija polja koja opisuje jake interakcije. QCD zajedno sa elektroslabom teorijom[1] formira Standardni model čija se predviđanja odlično slažu sa rezultatima eksperimenta.

QCD je velika oblast sa puno poddisciplina od kojih svaka ima posebne stepene slobode: perturbativan QCD, efektivne teorije teških kvarkova, nerelativistička QCD, kiralna teorija, QCD na rešetki, QCD u nuklearnoj fizici i drugi. Trenutno nepostoji jedinstven pristup svim aspektima teorije već postoji familija različitih jezika koji odgovaraju različitim skalama.

QCD ima **dve aimptotske oblasti**. Prva oblast se odnosi na velike transfere impulsa. Tu su kvarkovi kvazi-slobodne čestice (asimptotska sloboda) jer je konstanta interakcije mala. Eksperimenti sa dubokim neelastičnim rasejanjima odvijaju se u ovoj oblasti. Druga oblast odnosi se na male transfere impulsa kada je konstanta interakcije velika i kada su kvarkovi vezani unutar hadrona. To je oblast zarobljenosti kvarkova ("confinement").

U QCD-u se predviđanja teorije dobijaju na dva načina:

- **Perturbativnim pristupom**
  On je zasnovan na asimptotskoj slobodi pošto mala konstanta interakcije na malim rastojanjima dozvoljava perturbativni razvoj. Ovaj metod je još uvek glavna kvantitativna veza sa eksperimentom.
- **Neperturbativnim metodama**
  One se primenjuju u slučajevima kada je konstanta interakcije velika i kada perturbativni razvoj nevaži. U ove metode spadaju:
  - Simulacije na rešetki (u velikom je progresu);
  - Efektivni lagranžijani:
    - kiralni lagranžijan,
    - efektivne teorije teških kvarkova;
  - Modeli sa potencijalom (kvarkonijum);
  - QCD pravila sumiranja;

U **ovom radu** opisane su glavne karakteristike QCD-a i detaljnije su obrađene dve oblasti: perturbativan QCD i QCD na rešetki.

U **drugoj glavi** su opisani eksperimentalni i teorijski modeli koji su postavili temelje za razvoj QCD-a. Prvo je postuliran teorijski kvark-model Gell-Mann-a i Zweig-a. Zatim slede prvi eksperimenti sa dubokim neelastičnim rasejanjima elektrona i neutrina na nukelonima. Iz njih je

[1] Elektroslaba teorija opisuje interakcije kvarkova i leptona pod dejstvom kombinovane elektromagnetne i slabe interakcije.

utvrđeno postojanje konstituenata hadrona kao i njihov spin i naelektrisanje. Fejnman zatim uvodi svoj parton model po kom je proton sastavljen iz partona koji su kasnije identifikovani sa kvarkovima. Takođe su rađeni eksperimenti sa elektron-pozitron anihilacijom u hadrone. Primećeno je da pored kvarkova nukleon sačinjavaju i gluoni prenosioci jake interakcije. Utvrđeno je da se kvarkovi pojavljuju u tri boje. Iz čitavog niza kasnijih eksperimenata zaključno sa današnjim trenutkom utvrđeno je da postoji ukupno šest aromata kvarkova. Sve su to bile činjenice na temeljima kojih je formulisan QCD.

U **trećoj glavi** je opisan novi kvantni broj kvarkova, boja. Kvarkovi se pojavljuju u tri boje, crvenoj, plavoj i zelenoj. Antikvarkovi nose antiboju. Gluoni su takođe obojeni što će biti glavni razlog za drugačije osobine jake interakcije u poređenju sa elektromagnetnom. Tu su takođe opisani eksperimenti u kojima je pokazano da je broj boja tri.

Četvrta glava se odnosi na QCD potencijal. Potencijal je Kulnovog tipa na malim rastojanjima, a linearno zavisi od rastojanja na velikim rastojanjima. Opisani su eksperimenti koji su ovo potvrdili. Ovde su takođe opisani zarobljenosti kvarkova i hadronizacija kao direktne posledice linearnog potencijala na velikim rastojanjima.

U **petoj glavi** su opisane osnovne postavke perturbativnog metoda koji u QCD-u daje dobre rezultate za procese sa velikim transferima impulsa kada je konstanta interakcije mala. Dati su primeri na kojima je prikazano kako se neki proces može predstsviti kao suma dijagrama sa kvantnim korekcijama nultog, prvog, dgugog i višeg reda. Opisano je kako se kvantizacijom klasičnog lagranžija dobija kvantni lagranžijan iz kog se zatim izvode Fejnmanova pravila. Pomoću Fejnmanovih pravila se zatim računaju amplitude procesa i preseci.

U **šestoj glavi** je opisano kako se konstanta interakcije menja sa energijom. Za razliku od konstante EM interakcije koja opada sa porastom rastojanja zbog zaklanjanja naelektrisanja elektron-pozitron parovima, u QCD-u konstanta interakcije raste sa rastojanjem jer se ovde pored zaklanjajućeg efekta kvark-antikvark parova javljaju doprinosi gluona koji imaju suprotan efekat od kvark-antikvark parova i šire obojeno naelektrisanje.

U **sedmoj glavi** opisan je QCD na rešetki koji daje rezultate u oblastima gde je konstanta interakcije velika. Polazeći od "path" integral reprezentacije kvantne mehanike prelazi se na reprezentaciju teorije polja preko funkcionalnih integrala preko kojih se radi diskretizacija QCD-a na rešetki. Svi računi rade se numerički pomoću Monte-Karlo metoda.

U **osmoj glavi** je zaključak.

2 Razvoj QCD-a

Ovde je opisano kako se tokom vremena zahavaljujući eksperimentima (duboka neelastična rasejanja, elektron-pozitron anihilacija...) i teorijskim modelima (kvark model, Fejnmanov parton model...) razvijala slika o strukturi nukleona koja je posle uopštena na sve hadrone.

2.1 Kvark model

Kvark model se pojavio 1964. To je bio teorijski model pomoću kog je izvršena klasifikacija svih do tada poznatih hadrona. Gell-Mann i Zweig su pretpostavili postojanje u, d i s kvarka nelektrisanja 2/3, -1/3 i -1/3 respektivno, stranosti 0, 0, -1 respektivno i spina 1/2. Smatralo se da je

- svaki barion sastavljen od tri kvarka (a svaki antibarion od tri antikvarka),
- svaki mezon sastavljen od kvarka i antikvarka.

Tako je proton sastavljen od dva u-kvarka i jednog d-kvarka, a neutron obrnuto. Takođe je bilo jednostavno konstruisati barionski dekuplet (Slika 1.) i mezonski nonet (Slika 2.).

THE BARYON DECUPLET

qqq	Q	S	Baryon
uuu	2	0	Δ^{++}
uud	1	0	Δ^{+}
udd	0	0	Δ^{0}
ddd	−1	0	Δ^{-}
uus	1	−1	Σ^{*+}
uds	0	−1	Σ^{*0}
dds	−1	−1	Σ^{*-}
uss	0	−2	Ξ^{*0}
dss	−1	−2	Ξ^{*-}
sss	−1	−3	Ω^{-}

Slika 1: Barionski dekuplet.

THE MESON NONET

$q\bar{q}$	Q	S	Meson
$u\bar{u}$	0	0	π^0
$u\bar{d}$	1	0	π^+
$d\bar{u}$	−1	0	π^-
$d\bar{d}$	0	0	η
$u\bar{s}$	1	1	K^-
$d\bar{s}$	0	1	K^0
$s\bar{u}$	−1	−1	K^-
$s\bar{d}$	0	−1	$\bar{K}^0$
$s\bar{s}$	0	0	??

Slika 2: Mezonski nonet.

2.2 Duboka neelastična rasejanja

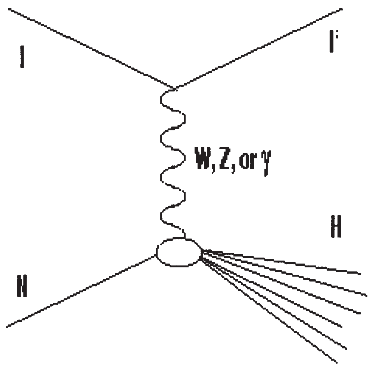
Eksperimenti sa dubokim neelastičnim rasejanjima bili su presudni u rasvetljavanju strukture hadrona i postavljanju temelja za razvoj QCD-a. Rađena su rasejanja elektrona i neutrina na nukleonima.

2.2.1 Kinematika dubokih neelastičnih rasejanja

Pri dubokom neelastičnom rasejanju leptona l na nukleonu N

$$l \,+\, N \,\rightarrow\, l^{'} \,+\, \text{hadroni} \;,$$

u finalnom stanju dobijaju se hadroni i lepton $l^{'}$. Interakcija leptona sa nukleonom preko izmene virtuelnog fotona, Z- ili W-bozona može biti predstavljen Fejnmanovim dijagramom (Slika 3.).



Slika 3: Duboko neelastično rasejanje leptona na nukleonu izmenom fotona, Z- ili W-bozona. U finalnom stanju se dobijaju lepton i hadroni.

Četvoro-impulsi p i $p^{'}$ upadnog i rasejanog leptona su:

$$p = (E, \vec{p}) \;, \;\; p^{'} = (E^{'}, \vec{p^{'}}) \;,$$

a četvoro-impuls virtuelnog fotona je

$$q = (\nu, \vec{q}) = p - p^{'} \;.$$

Masa nukleona je M, a masa finalnog hadronskog stanja je W.

Proizvod dva četvoro-vektora definiše se kao

$$p_i \cdot p_j = E_i E_j - \vec{p_i} \cdot \vec{p_j} \;.$$

Da bi se opisala interakcija često se koriste sledeće kinematičke varijable

- Transfer energije ili tvrdoća (Lorenc invarijanta)
$$Q^2 \;=\; -q^2 \;= -(p-p^{'})^2 \approx 4EE^{'} \sin^2\frac{\theta}{2},$$
gde je θ ugao rasejanja leptona u labaratorijskom sistemu.

- Gubitak energija leptona u laboratorijskom sistemu je
$$\nu \;=\; E - E^{'} \;.$$

- Kvadrat mase (invarijantna masa) finalnog hadronskog stanja je
$$W^2 \;=\; M^2 \;+\; 2M\nu \;-\; Q^2 \;.$$

- Bjorkenova (bezdimenziona) varijabla skaliranja je
$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}\;, \qquad (0 \;<\; x \;<\; 1)\;.$$

- Neelastičnost (invarijanta) predstavlja relativan gubitak energije leptona u laboratorijskom sistemu
$$y = \frac{\nu}{E}\;.$$

Bilo koje dve nezavisne varijable (na primer Q^2 i ν) su dovoljne da opišu duboko neelastično rasejanje.

2.2.2 Duboko neelastično elektron-nukleon rasejanje

1967. počeli su prvi eksperimenti sa dubokim neelastičnim elektron-proton rasejanjima na SLAC-u (Stanford Linear Accelerator Centre). Energije snopa elektrona iznosile su 21 GeV. Razmatranje ovih rasejanja bilo je zgodno jer je QED davala dobar opis interakcije elektrona sa naelektrisanjima i magnetnim momentima.

Efikasan presek za rasejanje nepolarizovanog elektrona na nepolarizovanom nukleonu (u aproksimaciji jednog fotona) glasio je:
$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} \;=\; \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\,\frac{E^{'}}{EM}\left[\, W_2(\,Q^2,\nu)\;\cos^2\frac{\theta}{2} \;+\; 2W_1(\,Q^2,\nu)\;\sin^2\frac{\theta}{2}\,\right],$$
gde su W_1 i W_2 strukturne funkcije[2] koje sadrže sve informacije o strukturi mete dobijene iz rasejanja. Pošto intermedijarni foton ima dva moguća stanja polarizacije (transverzalnu i longitudinalnu) bile su potrebne dve funkcije da se rasejanje opiše. Očekivalo se da ove funkcije zavise od ν i q^2.

[2] Ako se uvedu nove funkcije F_1 i F_2
$$F_1(\,Q^2,\nu) \;=\; W_1(\,Q^2,\nu),$$

Iz rasejanja su ubrzo zapažena dva efekta koja su odstupala od očekivanja fizičara tog vremena:

- efikasni presek za duboka neelastična rasejanja slabo je zavisio od transfera impulsa Q^2,
- strukturne funkcije F_1 i F_2 su umesto od dve kinematički dozvoljene varijable zavisile samo od jedne varijable.

2.2.3 Bjorkenova hipoteza skaliranja

Bjorken je uveo **hipotezu skaliranja** koja kaže da za rasejanje leptona na tačkastoj čestici funkcije F_1 i F_2 ne zavise od Q^2 i ν već samo od x. Jednostavnije rečeno u limesu

$$Q^2 \to \infty \ , \quad \nu \to \infty \ ,$$

funkcija

$$F(\,Q^2, \nu) \ \to \ F(x) \ ,$$

ostaje konačna i zavisi samo od bezdimenzionog odnosa ove dve veličine tj. od $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$. Pošto je x bezdimenziono nema skale za masu ili dužinu.

U eksperimentima sa rasejanjima elektrona na nukleonu na SLAC-u dobijeno da strukturne funkcije nukleona F_1 i F_2 umesto od dve zavise samo od jedne varijable (Slika 4.).

Dinamičko poreklo skaliranja u to vreme nije bilo jasno i pojavili su se mnogi modeli koji su to pokušali da objasne. Tako su se pojavile i **prve pretpostavke da nukleon nije elementaran nego složen**.

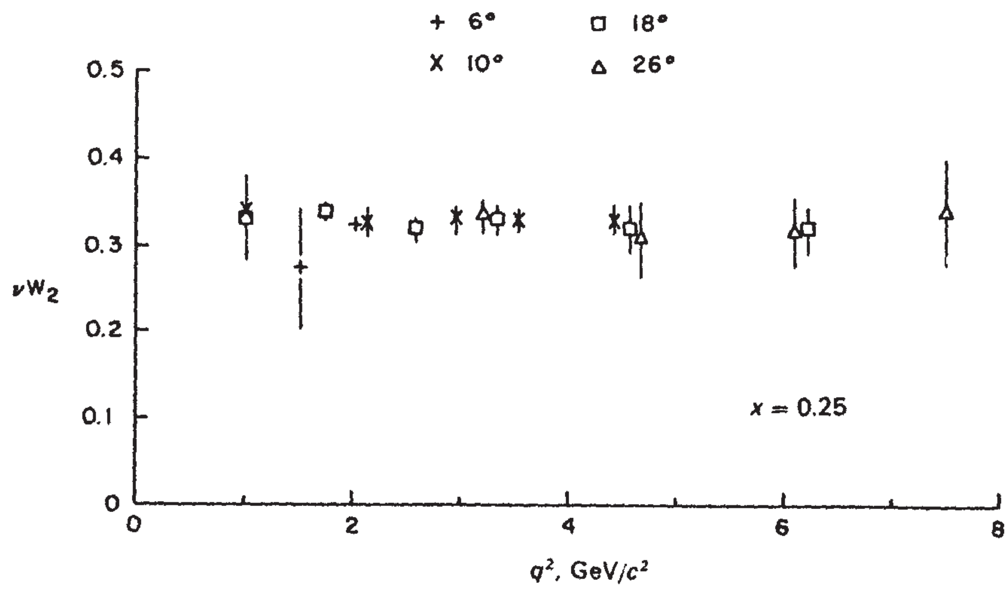
2.2.4 Fejnmanov parton model

Interpretaciju invarijantnosti skale dao je Fejnman u svom **parton modelu**. On je pretpostavio da se proton sastoji od nekog broja tačkastih čestica, tzv. partona, spina 1/2 i da se pri rasejanjima elektron rasejava na pojedinačnom partonu. Neka se sve posmatra iz sistema reference u kom proton (meta) ima jako velik (beskonačan) tro-impuls u kom zbog dilatacije vremena izgleda da partoni skoro miruju. Za vreme izmene virtuelnog fotona partoni međusobno ne interaguju. Kada se zanemari masa protona njegov četvoro-impuls je $P = (p, 0, 0, ip)$ i može se zamisliti da se on sastoji od paralelne struje partona koji imaju četvoro-impuls xP (Slika 5.), pa x **predstavlja relativan udeo impulsa partona** u sistemu reference u kom je impuls protona beskonačan.

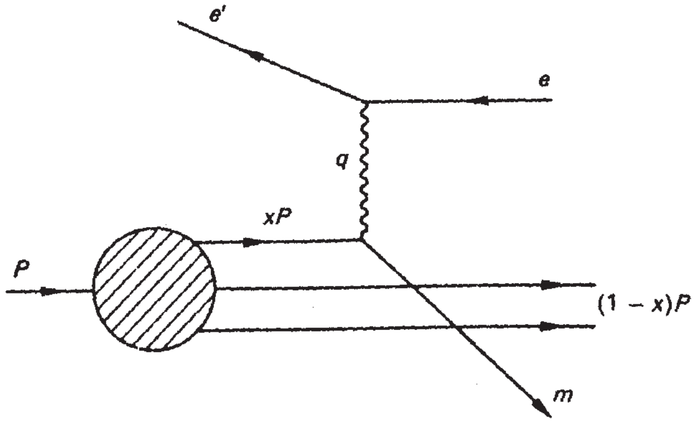
$$F_2(\,Q^2, \nu) \ = \ \frac{\nu W_2(\,Q^2, \nu)}{M}$$

onda presek za rasejanje glasi:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx} \ = \ \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[(1-y)\frac{F_2(\,Q^2, x)}{x} \ + \ \frac{y^2}{2}\frac{2xF_1(\,Q^2, x)}{x} \right]$$



Slika 4: Merena zavisnost F_2 od q^2 pri rasejanjima elektrona za x=0.25 na SLAC-u iz koje se vidi da F_2 praktično nezavisi od q^2.



Slika 5: Parton model u dubokim neelastičnim rasejanjima.

Ako parton ima masu m u laboratorijskom sistemu ($Q^2 = 2m\nu$ za elastično rasejanje), onda je

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{m}{M} ,$$

pa x **predstavlja relativan deo mase nukleona koju parton nosi** u sistemu reference u kom parton u početnom trenutku miruje (laboratorijski sistem).

2.2.5 Neutrino-nukleon neelastično rasejanje

Efikasan presek za rasejanje neutrina ili antineutrina na nukleonu glasi[3]:

$$\frac{d^2\sigma^{\nu N,\bar{\nu} N}}{dq^2 dx} = \frac{G^2}{2\pi}\left[(1-y)\frac{F_2^{\nu N}(x)}{x} + \frac{y^2}{2}\frac{2xF_1^{\nu N}}{x} \pm y(1-\frac{y}{2})\frac{xF_3^{\nu N}(x)}{x}\right].$$

Pošto postoje tri moguća stanja polarizacije intermedijarnog W-bozona potrebne su tri strukturne funkcije da opišu rasejanje neutrina (antineutrina) na nukleonu. Posle integracije po x i y od $[0,1]$ dobijalo se da je ukupni efikasni presek proporcionalan energiji E, što je potvrđeno u eksperimentima.

2.2.6 Spin partona

Poređenjem izraza za efikasni presek pri rasejanju na tačkastoj čestici spina 1/2, mase m i naelektrisanja Ze

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2 z^2}{q^4}(\frac{E'}{E})^2(\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m^2}\sin^2\frac{\theta}{2}) ,$$

sa izrazom za efikasni presek pri rasejanju leptona na nukleonu mase M

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}(F_2(x)\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{q^2}{2M^2x^2}2xF_1(x)\sin^2\frac{\theta}{2})\frac{1}{x} ,$$

(uz identifikaciju $m = xM$) dobija se **Callan-Gross** relacija:

$$\frac{2xF_1(x)}{F_2(x)} = 1 .$$

Ona je eksperimentalno potvrđena u eksperimentima sa rasejanjima elektrona na SLAC-u (Slika 6.).

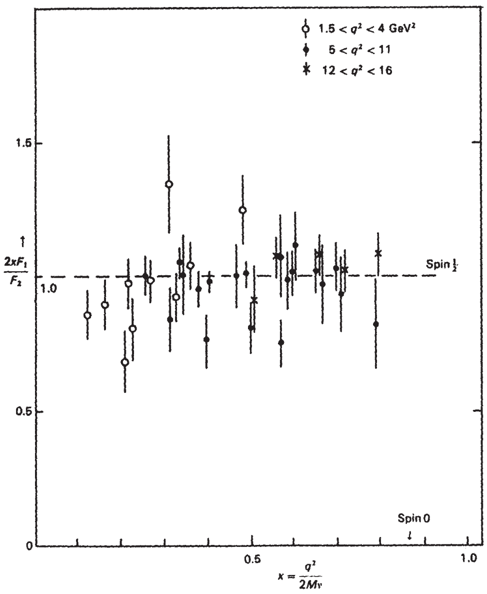
Ovo je bio dokaz činjenice da je **spin partona 1/2.**

2.2.7 Naelektrisanje partona

Poređenjem strukturnih funkcija za rasejanje elektrona i neutrina na nukleonima dobijeni su dokazi o razlomljenom naelektrisanju kvarkova.

[3] Efikasni presek se na drugi način može zapisati kao

$$\frac{d^2\sigma^{\nu N,\bar{\nu} N}}{dy dx} = \frac{G^2 ME}{\pi}\left[(1-y)F_2^{\nu N}(x) + \frac{y^2}{2}2xF_1^{\nu N} \pm y(1-\frac{y}{2})xF_3^{\nu N}(x)\right] .$$



Slika 6: Odnos $\frac{2xF_1(x)}{F_2(x)}$ meren u elektron-nukleon rasejanjima na SLAC-u.

Strukturna funkcija $F_2^{\nu N}$ za rasejanje neutrina na nukleonima proporcionalna je sumi partonskih i antipartonskih gustina otežinjenih relativnim masenim udelom partona x u protonu

$$F_2^{\nu N}(x) = x[u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x)] \ , \tag{1}$$

gde su $u(x)$, $d(x)$, $\bar{u}(x)$, i $\bar{d}(x)$ gustine kvarkova u protonu.

Odnos strukturne funkcije F_2^{ep} za rasejanje elektrona na protonu i masenog udela partona u nukleonu x proporcionalan je gustinama kvarkova u protonu otežinjenih kvadratima naelektrisanja kvarkova

$$F_2^{ep}(x) = x[\frac{4}{9}[u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9}[d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)]] \ .$$

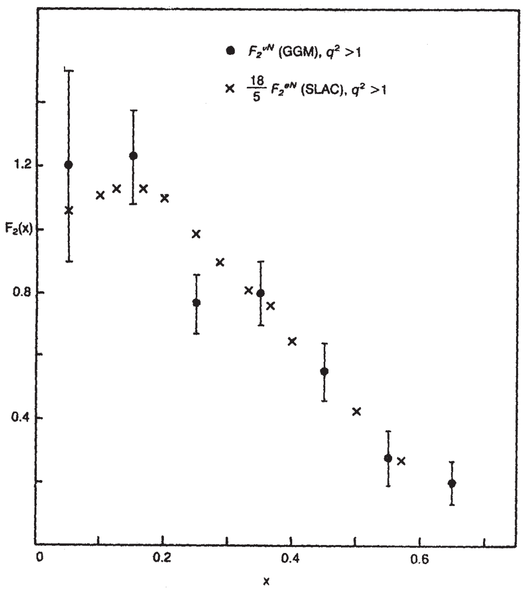
Strukturna funkcija F_2^{en} za rasejanje elektrona na neutronu dobija se zamenom $u \to d$ i $\bar{u} \to \bar{d}$ u izrazu za F_2^{ep}, pa je strukturna funkcija za rasejanje elektrona na nukleonu glasi

$$F_2^{eN}(x) = x[\frac{5}{18}[u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9}[s(x) + \bar{s}(x)]] \ . \tag{2}$$

Ovo je izračunato **uz pretpostavku da je naelektrisanje u-kvarka $2/3e$, a d- i s-kvarka $-1/3e$**. Poređenjem izraza (9) i (10) dobilo se

$$F_2^{\nu N}(x) \leq \frac{18}{5} F_2^{eN}(x) \ .$$

Ova razmatranja su se slagala eksperimentalno izmerenim vrednostima strukturnih funkcija (Slika 7.) što je bila potvrda pretpostavke o razlomljenom naelektrisanju kvarkova.



Slika 7: Poređenje merernja $F_2^{\nu N}$ u CERN-u, sa merenjima F_2^{eN} na SLAC-u. Ova dva merenja se poklapaju ako se rezultati merenja F_2^{eN} pomnože sa $\frac{18}{5}$ što je srednja suma kvadrata naelektrisanja u- i d- kvarka u nukleonu.

2.2.8 Gross-Liewellyn-Smith pravilo sumiranja

Podaci o neutrino i antineutrino rasejanjima iskorišćeni su za prebrojavanje kvarkova u nukleonu. Pošto je treća strukturna funkcija nukleona bila proporcionalna razlici kvarkovskih i antikvarkovskih gustina

$$xF_3^{\nu N}(x) = x[u(x) + d(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x)] \ ,$$

očekivalo se da se integracijom ove funkcije dobije ukupan broj kvarkova u nukleonu

$$I = \int_0^1 \frac{xF_3(x)}{x} dx = \int_0^1 [u_v(x) + d_v(x)] dx = 3 \ .$$

$u_v = u - \bar{u}$ i $d_v = d - \bar{d}$ je broj valentnih kvarkova u nukleonu, a $\bar{u}$ i $\bar{d}$ je broj kvark-antikvark parova. Ova pretpostavka je bila poznata kao **Gross-Liewellyn-Smith pravilo sumiranja**. Eksperimentalno dobijena vrednost iznosila je

$$I = 2.8 \pm 0.5 \ ,$$

što je bilo prilično dobro slaganje.

2.2.9 Gluoni kao konstituenti hadrona

Oěkivalo se da se sumiranjem relativnog udela impulsa partona u nukleonu po svim partonima kao krajnji rezultat dobije 1. Međutim, rani eksperimenti sa rasejanjima elektrona i neutrina

1972. dali su neočekivan rezultat

$$\frac{18}{5}\int F_2^{eN}(x)dx = \int F_2^{\nu N}(x)dx = 0.5\ .$$

To je značilo da kvarkovi nose samo polovinu mase nukleona. Zato je postulirano postojanje novih konstituenata hadrona, **gluona**. Kao što će se kasnije pokazati gluoni su prenosioci jake interakcije, interaguju samo sa kvarkovima i bezmaseni su bozoni spina 1.

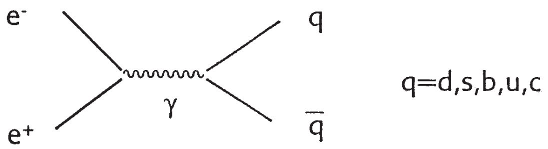
2.2.10 Rezime

Rezultati dubokih neelastičnih rasejanja doveli su do sledećih zaključaka:

- Nukleon sadrži tačkaste konstituente što se vidi iz invarijantnosti skale strukturnih funkcija;
- Konstituenti nukleona (kvarkovi) imaju spin 1/2 što sledi iz Callan-Gross relacije;
- Kvarkovi imaju razlomljeno naelektrisanje;
- Kvarkovi nose samo 50% mase nukleona. Ostatk je pripisan gluonima.

2.3 Elektron-pozitron anihilacija u hadrone

Eksperimenti sa elektron-pozitron anihilacijom (Slika 8.) takođe su dali niz važnih informacija o strukturi hadrona.



Slika 8: Elektron-pozitron anihilacija u kvark-antikvark par.

Upoređivanjem odnosa efikasnih preseka

$$R \;=\; \frac{\sigma\,(e^+e^- \;\rightarrow\; hadroni)}{\sigma\,(e^+e^- \;\rightarrow\; \mu^+\mu^-)}\;,$$

za anihilaciju elektron-pozitron para u kvark-antikvark par koji hadronizuje u dva mlaza hadrona i anihilaciju elektron-pozitron para u mione primećeno je da je ovaj odnos konstantan. To je značilo da je proces $e^+e^- \;\rightarrow\; hadroni$ takođe tačkast, pa se došlo se do zaključaka da postoje konstituenati hadrona.

Takođe, odnos efikasnih preseka za e^+e^- anihilaciju u hadrone i mione proprcionalan je broju boja i sumi kvadrata naelektrisanja kvarkova onih aromata koji mogu da se dobiju u finalnom stanju na datoj energiji:

$$R \;=\; \frac{\sigma\,(e^+e^- \;\rightarrow\; hadroni)}{\sigma\,(e^+e^- \;\rightarrow\; \mu^+\mu^-)} \;=\; N_c \sum q^2\;.$$

Na energijama iznad praga za produkciju b-kvarka ($\sqrt{s}\,>\,10$ GeV), a ispod mase Z-bozona, ovaj odnos iznosi

$$R \;=\; N_C\,[\;3\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{4}{9}\;] \;=\; N_C\cdot\frac{11}{9}\;.$$

Uz pretpostavku da je broj mogućih boja kvarkova $N_c = 3$ dobija se

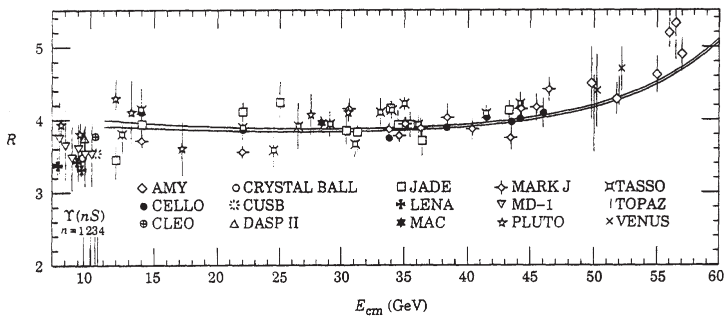
$$R \;=\; \frac{11}{3},$$

što se slaže sa eksperimentalno dobijenom vrednošću (Slika 9.).

Pored ovoga snimana je i ugaona raspodela kvark-antikvark para dobijenog elektron-pozitron anihilacijom. Pošto je ugaona raspodela zadovoljavala izraz

$$\frac{dN}{d\Omega} \propto (1+\cos^2\theta),$$

gde je θ ugao između kvarka i antikvarka, zaključeno je da je spin partona 1/2.



Slika 9: Meren odnos efikasnih preseka R za $e^+ \ e^-$ anihilaciju u hadrone i mione na energiji ispod praga za produkciju top kvarka iznosi $\frac{11}{3}$.

Tako da je iz eksperimenata sa elektron-pozitron anihilacijom u hadrone zaključeno sledeće:

- Konstantnost R je dokaz za postojanje tačkastih konstituenata protona, partona;
- Vrednost R je jednaka očekivanoj ako se kvarkovi pojavljuju u tri boje;
- Iz ugaone raspodele sledi da je spin partona 1/2.

2.4 Dalji razvoj događaja

Pored navedenih događaja usledio je čitav niz drugih eksperimenata koji su govorili u prilog postojanja kvarkova i gluona:

- Otkriće šarmonijuma (vezano stanje $c\bar{c}$) 1974. na SLAC-u bilo je potvrda postojanja c kvarka;
- 1977. otkriven je botonium, vezano stanje b-kvarka i b-antikvarka;
- 1979. u e^+e^- sudarima otkriveni su događaji sa tri džeta koji su posvedočili o postojanju gluona;
- Od 1990. do danas rade se brojni precizni testovi QCD-a na LEP-u, HERI, Tevatronu...
- 1995. je na Tevatronu otkriven top kvark.

Danas se smatra da postoji ukupno šest aromata kvarkova čiji su kvantni brojevi prikazani na Slici 10. Pored kostituentnih (valentnih) kvarkova u hadronima postoji oblak virtuelnih čestica, a to su kvark-antikvark parovi (morski kvarkovi) i gluoni.

Aromat	B	I_3	S	C	b	t	Q
u	1/3	+1/2	0	0	0	0	+2/3
d	1/3	−1/2	0	0	0	0	−1/3
s	1/3	0	−1	0	0	0	−1/3
c	1/3	0	0	+1	0	0	+2/3
b	1/3	0	0	0	−1	0	−1/3
t	1/3	0	0	0	0	+1	+2/3

Slika 10: Kvarkovi i njihivi kvantni brojevi.

QCD je formulisan kao teorija 1972.

3 Boja kao kvantni broj

Posmatranjem Δ^{++} rezonanci došlo se do zaključka da je potrebno uvesti nov kvantni broj kvarkova, boju. Naime Δ^{++} rezonanca ima nelektrisanje $+2$, spin $3/2$ i sastavljna je od tri u-kvarka paralelnih spinova $u\uparrow u\uparrow u\uparrow$. Njena talasna funkcija glasi

$$\Psi \;=\; \Psi_{flavor} \times \Psi_{spin} \times \Psi_{space}.$$

Pošto su sve tri komponente talasne funkcije potpuno simetrične, i ukupna talasna funkcija je simetrična, a po Paulijevom principu isključenja trebalo bi da je antisimetrična. Izlaz iz toga bio je uvođenje boje jer su barioni potpuno antisimetrični u prostoru boja. Obojeno naelektrisanje kvarkova ima tri moguće vrednosti: plavu, crvenu ili zelenu. Antikvarkovi nose antiboju. Hadroni su u celini bezbojni. Mezoni, barioni i antibarioni se mogu predstaviti na sledeći način:

$$\text{mezoni}: \;\; \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{3}\bar{q}_i q_i \;,$$

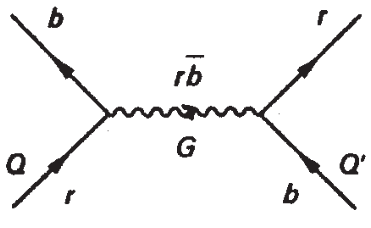
$$\text{barioni}: \;\; \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk} q_i q_j q_k \;,$$

$$\text{antibarioni}: \;\; \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk} \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k \;,$$

gde su $i,\ j,\ k$ indeksi boje, a sa q je obeležen kvark bilo kog aromata. Bozoni prenosioci jake interakcije zovu se gluoni i oni nose boju i antiboju i pripadaju oktetnoj reprezentaciji. Mogu se obeležiti na sledeći način

$$r\bar{b},\ r\bar{g},\ b\bar{g},\ b\bar{r},\ g\bar{r},\ g\bar{b},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g}).$$

Od tri kvarka i tri antikvarka očekuje se $3^2 = 9$ kombinacija, ali pošto je jedna singlet $\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})$ bez boje ona se isključuje. Na Slici 11. je kao primer navedena obojena interakcija između crvenog i plavog kvarka preko izmene crveno-antiplavog gluona.



Slika 11: QQ interakcija preko izmene gluona.

Obojeno naelektrisanje kvarkova je analogno električnom naelektrisanju u elektromagnetnim interakcijama. Prenosioci obe interakcije su bezmasene vektorske čestice (foton i gluon). Dok u elektromagnetizmu postoje dve vrste naelektrisanja i nenaelektrisani intermedijarni bozon, u

QCD-u postoji šest vrsta naelektrisanja (boja i antiboja) i naelektrisani (obojeni) intermedijarni bozon. Ispostaviće se da je ova razlika od krucijalnog značaja za razumevanje interakcija kvarkova na malim rastojanjima i za uspeh parton modela u opisivanju dubokih neelastičnih rasejanja u terminima kvazi-slobodnih neintereagujućih konstituenata.

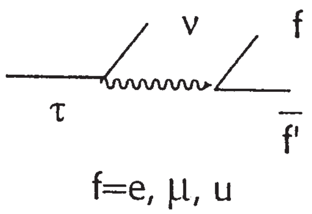
3.1 Eksperimentalni dokazi da je broj boja $N_c = 3$

Sledeći eksperimenti potvrdili su pretpostavku da se kvarkovi pojavljuju u tri boje.

- Kao što je već pokazano teorijski dobijena vrednost odnosa efikasnih preseka za e^+e^- anihilaciju u hadrone i mione slagala se sa eksperimentalno dobijenom vrednošću samo ako je broj boja $N_c = 3$.
- Faktor grananja za raspad $\tau \to e\nu\nu$ obrnuto je srazmeran zbiru 2 i ukupnog broja boja

$$BR\,(\tau \to e\,\nu\,\nu) \sim \frac{1}{2 + N_c}\,,$$

jer se pri raspadu τ-leptona u finalnom stanju kao što se vidi na Slici 12. mogu dobiti elektron, mion ili u-kvark u više boja.



Slika 12: Raspad τ-leptona na τ-neutrino i fermione.

Ako je broj mogućih boja $N_c = 3$ onda je

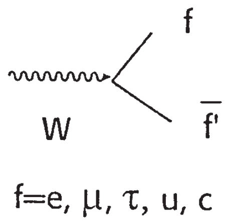
$$B \sim 20\%\,,$$

a eksperimentalno dobijana vrednost iznosi

$$B_{exp} \sim 18\%\,.$$

- Faktor grananja za raspad $W \to e\nu$ obrnuto je srazmeran $3 + 2N_c$ jer se pri raspadu W-bozona može dobiti elektron, mion, τ-lepton ili u- i c-kvark u određenom broju boja (Slika 13.).

$$BR\,(W \to e\,\nu) \sim \frac{1}{3\,+\,2N_c}\,,$$



Slika 13: Raspad W-bozona na fermion i antifermion.

tako da se za $N_c = 3$ dobija

$$B \sim 11\% ,$$

a iz eksperimenta se dobija

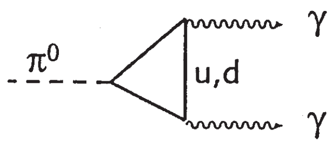
$$B_{exp} \sim 10.7\% .$$

- Širina raspada $\pi^0 \to \gamma\gamma$ (Slika 14.) približno iznosi

$$\Gamma\left(\pi^0 \to \gamma\gamma\right) \sim (7.73 \pm 0.04) \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \ eV,$$

a eksperiment daje

$$\Gamma = (7.7 \pm 0.5) \ eV.$$



Slika 14: Raspad π^0-mezona na dva fotona.

4 QCD potencijal

Potencijal između kvarkova je na malim rastojanjima Kulonovog tipa po analogiji sa elektromagnetizmom, dok na velikim rastojanjima potencijal raste u beskonačnost da bi vezivao kvarkove unutar hadrona

$$\boxed{V \ = \ C_F \left[\tfrac{\alpha_s}{r} \ + ... + \ kr \right] .}$$

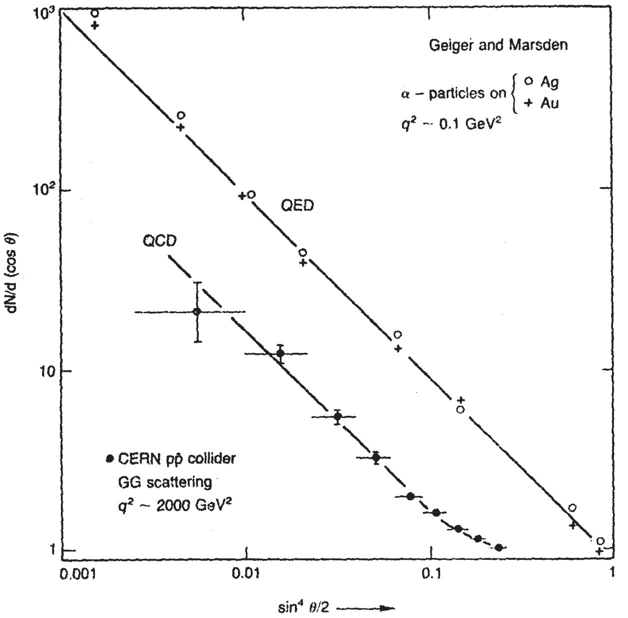
Ovaj oblik potencijala dobro opisuje energetske nivoe šarmonijum i botonijum vezanih stanja. Dalje slede direktni eksperimentalni dokazi o ovakvom obliku potencijala.

4.1 QCD potencijal na malim rastojanjima

Dokazi o potencijalu tipa

$$V = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s}{r} \ ,$$

na malim rastojanjima dobijeni su na $p\bar{p}$ kolajderu u CERN-u 1984. u sudarima protona i antiprotona energije 315 GeV.

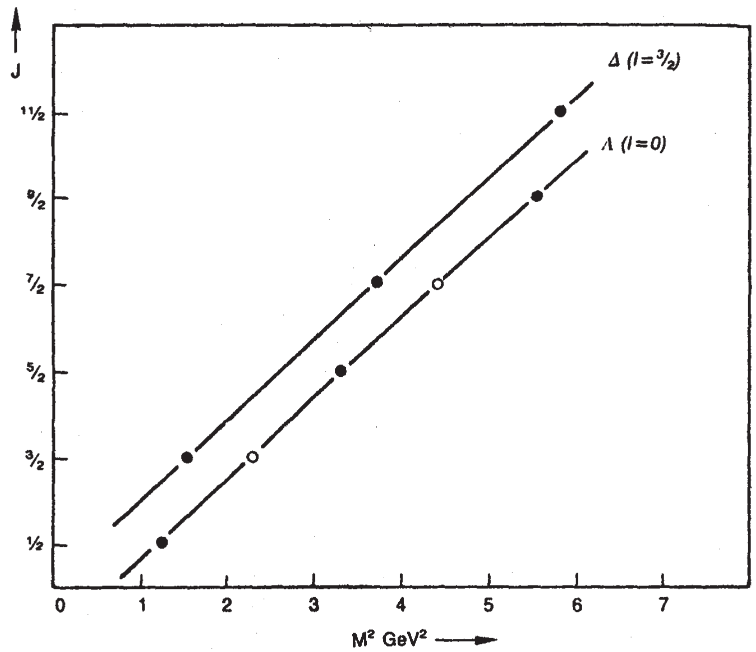


Slika 15: Primeri tačkastih rasejanja na potencijalu tipa $1/r$. Gornji grafik je rasejanje α-čestica na jezgrima zlata i srebra. Donji grafik je ugaona raspodela dva džeta iz proton-antiproton sudara .

Javljali su se dogadjaji sa dva džeta pod nekim uglom u odnosu na osu sudara. Oni su interpretirani kao elastično rasejanje partona (kvarkova i gluona) iz protona na partonu iz antiprotona. Rasejani partoni formirali su džetove. Snimljena ugaona raspodela dva džeta iz $p\bar{p}$ sudara prikazana je na Slici 15. Ako se ova distribucija parametrizuje sa $[sin(\theta/2)]^{-n}$ dobija se $n = 4.16 \pm 0.02$. Odstupanja od prave linije očekuju se u blizini $\theta = \pi/2$. Korisno je uporediti ove rezultate (dominantno gluon-gluon rasejanje sa $q^2 \simeq 2000$ GeV^2) sa rezultatima Geigera i Marsdena (1911.) koji su radili rasejanja α-čestica na gvozdenim i zlatnim jezgrima $q^2 \simeq 0.1$ GeV^2. **Linearnost grafika u oba slučaja je dokaz da je u pitanju potencijal $1/r$ jer su oba grafika zadovoljavala Raderfordovu formulu[4] $dN/d\Omega \propto \sin^{-4}(\theta/2)$.**

4.2 QCD potencijal na velikim rastojanjima: string model

Jedan značajan rezultat dobijen pri izučavanju barionskih i mezonskih rezonanci odnosi se na stanja date parnosti naelektrisanja C, izospina I, stranosti S, a različitog ugaonog momenta J i mase M. Naime u tom slučaju javlja se **linearna zavisnost J od M^2** (Slika 16.).

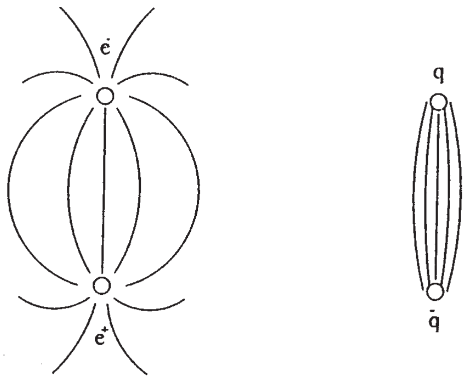


Slika 16: Zavisnost ukupnog ugaonog momenta J od kvadrata mase M^2 kod rezonanci Δ i Λ familije.

Gluoni, prenosioci jake interakcije, samointereaguju pošto su oni takođe nosioci obojenog naelektrisanja. Po analogiji sa linijama sile između dva naelektrisanja kvarkovi se mogu smatrati

[4] U slučaju rasejanja nerelativističkih α čestica bez spina Raderfordova formula važi za sve uglove. Za parton-parton rasejanja Raderfordova formula je dobra aproksimacija relativističke formule (koja uključuje efekte spina) za male uglove.

povezani linijama sile koje gluon-gluon interakcija primorava da formiraju tubu (Slika 17.).



Slika 17: Linije sile između e^+e^- i $q\bar{q}$ para.

Objašnjenje linearne zavisnosti ugaonog momenta od kvadrata mase dato je pomoću **string modela**. Ako se predpostavi da je k gustina energije po jedinici dužine tube koja povezuje dva bezmasena kvarka, onda je orbitalni angularni moment para kvarkova jednak orbitalnom momentu gluonske tube. Ako krajevi tube rotiraju brzinom c, onda je brzina tube na rastojanju r:

$$\frac{v}{c} = \frac{r}{r_0},$$

gde je r_0 poludužina tube. Ukupna masa je onda

$$E = Mc^2 = 2\int_0^{r_0} \frac{kdr}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kr_0\pi,$$

a ukupni orbitalni moment je

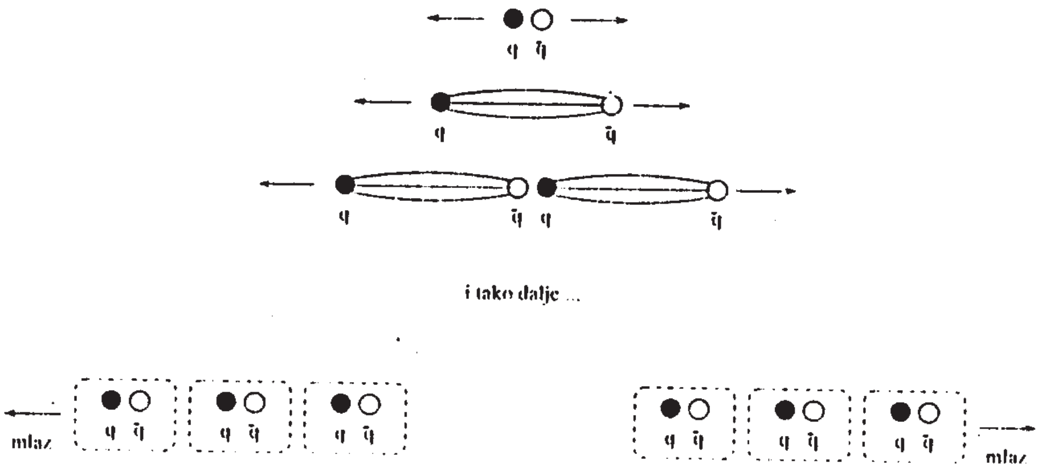
$$I = \frac{2}{(h/2\pi)c^2}\int_0^{r_0} \frac{kvdr}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{kr_0^2\pi}{2c(h/2\pi)}.$$

Odavde se dobija

$$J = \alpha^{'} E^2 + \text{konstanta}.$$

Ovaj rezultat važi za k =konstanta tj. za potencijal oblika $V = kr$. Za potencijal oblika $V = kr^n$ važi $J \propto E^{1+1/n}$, pa je snimljena zavisnost J od M^2 dokaz za linearni potencijal.

Ovakav oblik potencijala odgovoran je za **zarobljenost kvarkova** ("confinement") jer je za razdvajanje $q\bar{q}$ para ($r \to \infty$) potrebna beskonačna energija. Pomoću zarobljenosti kvarkova može da se objasni proces hadronizacije. Naime, posle rasejanja dva kvarka počinju da se udaljavaju jedan od drugog, potencijalna energija polja raste i u trenutku kad premaši vrednost od $2m_q$, dolazi do kreacije $q\bar{q}$ para. Stvaranje kvark-antikvark parova se nastavlja dok se ne potroši energija dobijena u procesu rasejanja (Slika 18.). Time se umesto početnog kvark-antikvark para registruju dva malza hadrona i taj proces se naziva **hadronizacija** (fragmentacija). Ovo je samo fenomenološki model, a QCD još uvek nema rešenje za proces hadronizacije.

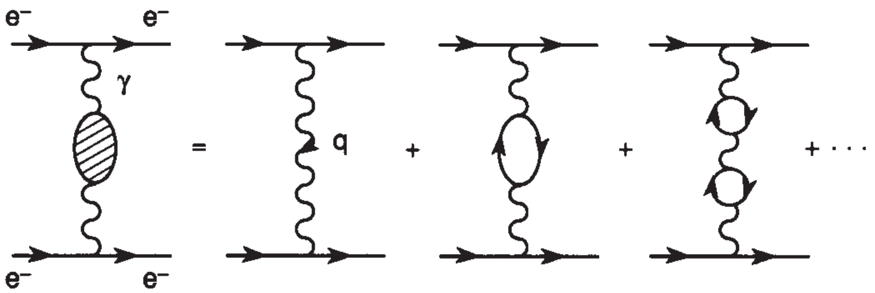


Slika 18: Proces hadronizacije.

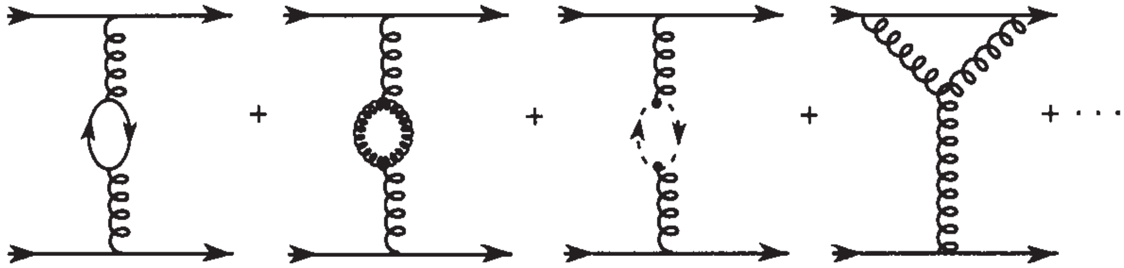
5 Perturbativni pristup

Perturbativni račun je oruđe koje se koristi i u kvantnoj elektrodinamici (QED) i u kvantnoj hromodinamoci.

QED je Abelova teorija (foton nije naelektrisan) koja opisuje dinamiku elektromagnetnih procesa. U njoj perturbativni račun daje odlične rezultate jer je konstanta interakcije mala. Na Slici 19. je prikazano elektron-elektron rasejanje kao suma dijagrama nultog, prvog, drugog i viših redova. Duž propagatora fotona su jedna, dve i više virtuelnih fermion-antifermion petlji koje predstavljaju kvantne korekcije prvog, drugog i višeg reda.



Slika 19: Elektron-elektron rasejanje je prikazano kao suma dijagrama koji sadrže kvantne korekcije prvog, drugog, i viših redova.



Slika 20: Dijagrami sa rasejanjem kvarkova na kojima su prikazane moguće kvantne korekcije (perturbacije) prvog reda.

QCD je ne-Abelova gejdž teorija koja opisuje dinamiku jakih interakcija. Perturbativni metod daje dobre rezultate samo za procese sa velikim transferima impulsa. Naime, koristeći metod renormalizacione grupe pokazuje se da je na skalama sa velikim transferima impulsa konstanta interakcije mala, pa je korišćenje perturbativnog metoda u ovom sektoru energija opravdano. Ovde je spektar mogućnosti mnogo širi jer su gluoni nosioci obojenog naelektrisanja i oni daju dodatne doprinose kvantnim korekcijama. Primer je prikazan na Slici 20., gde su navedene mogući dijagrami prvog reda za za kvark-kvark rasejanje. Duž propagatora fotona se nalazi kvakr-antikvark petlja, zatim gluonska petlja, iza je petlja polja duhova i na kraju je tro-gluonska interakcija.

Procedura za primenu perturbativnog računa je sledeća

1. Polazeći od klasičnog lagranžijana izvrši se kvantizacija i dobija se kvantni lagranžijan;
2. Iz ovog lagranžijana se izvode Fejnmanova pravila;
3. Pomoću Fejnmanovih pravila se izračunaju amplitude procesa;
4. Pomoću amplituda procesa se izračunaju se preseci.

Dalje je u tekstu pokazano kako se kvantizacijom klasičnog dobija kvantni lagranžijan i kako se zatim iz njega dobijaju Fejnmanova pravila. Računaje amplituda prelaza i preseka ovde zbog složenosti nije rađeno.

5.1 Lagranžijan QCD-a

Kvantna hromodinamika je gejdž teorija sa nenarušenom $\boldsymbol{SU(3)_{color}}$ simetrijom. Neka se posmatra kvark jednog aromata i uvede kvarkovsko polje ψ

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x)^{\text{crveno}} \\ \psi(x)^{\text{plavo}} \\ \psi(x)^{\text{zeleno}} \end{pmatrix} .$$

Polje kvarkova se pod dejstvom elementa grupe SU(3) (globalne transformacije) transformiše na sledeći način

$$\psi_i(x) \ \rightarrow \ \psi_i^{'}(x) = [\ exp\ \{i \sum_{a=1}^{8}\ t_a\ \theta_a\}\ ]\ \psi_j(x),$$

gde je θ_a ugao rotacije u prostoru boja, a t_a je 8 generatora fundamentalne reprezentacije koji zadovoljavaju sledeću relaciju

$$t^A = \frac{\lambda^A}{2}.$$

λ^A su Gell-Mann-ove matrice[5]. Generatori t^A formiraju Lijevu algebru

$$[t^A,\ t^B]\ =\ i\ f^{ABC}\ t^C,$$

sa realnim totalno antisimetričnim strukturnim konstantama f^{ABC}.

Lagranžijan za jedan **slobodan kvark** glasi

$$\boxed{L_{SK}\ =\ \bar{\psi}\ (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\ \psi,}$$

gde su γ^μ, 4×4 matrice koje zadovoljavaju komutacione relacije

$$\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}\ =\ 2g^{\mu\nu}.$$

One u Dirkovoj reprezentaciji glase:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ , \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\ .$$

[5]

$$\lambda^1\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2\ =\ \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3\ =\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

,

$$\lambda^5\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8\ =\ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lagranžijan slobodnog kvarka je invarijantan na globalne SU(3) transformacije kvarkovskog polja. Medjutim po gejdž principu on mora da bude invarijantan na lokalne transformacije $\theta_a = \theta_a(x)$ u obojenom prostoru, takozvane SU(3) gejdž transformacije:

$$\psi_i(x) \ \rightarrow \ \psi_i^{'}(x) = [\ exp\ \{i \sum_{a=1}^{8} \ t_a \ \theta_a(x)\}\ ]\ \psi_j(x).$$

Da bi lagranžijan bio invarijantan na ove transformacije izvod u lagranžijanu se zamenjuje sa kovarijantnim izvodom

$$\partial_\mu \ \rightarrow \ D_\mu,$$

gde je kovarijantni izvod definisan kao

$$D_\mu \ = \ \partial_\mu \ - \ ig_s A_\mu.$$

U ovom izrazu g_s su SU(3) gejdž kuplovanja

$$\alpha_s \ = \ \frac{g_s^2}{4\pi},$$

A_μ je 3×3 matrica

$$A_\mu = t_a A_\mu^a,$$

a A_μ^a su 8 novouvedenih gluonskih polja.

Da bi se nova gluonska polja učinila dinamičkim, lagranžijanu se pored člana koji se odnosi na slobodne kvarkove dodaje još jedan gejdž invarijantan kinetički član. Tako klasičan lagranžijan konačno glasi:

$$\boxed{L_{KL} \ = \ \sum_{j=1}^{n_f} \ \bar{\psi}_j \ (i\gamma_\mu D^\mu - m_j) \ \psi_j \ - \ \tfrac{1}{4} \ \sum_{A=1}^{8} \ F^{\mu\nu A} \ F_{\mu\nu}^A.}$$

$F_{\mu\nu}^A$ je tenzor jačine polja

$$F_{\mu\nu}^A \ = \ \partial_\mu \ A_\nu^A \ - \partial_\nu \ A_\mu^A \ - g_s \ f_{ABC} \ A_\mu^B \ A_\nu^C.$$

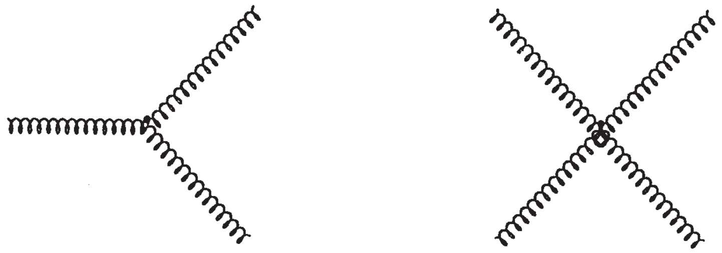
Parametri lagranžijana su sledeći

- kuplovanje g_s,
- mase kvarkova m_j, j=u,d,c,s,t,b.

Kada se kinetički član raspiše dobija se

$$-\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{8} \ F^{\mu\nu A} \ F_{\mu\nu}^A = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu a} - \frac{1}{4} g^2 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c f_{ade} A^{\mu d} A^{\nu e}.$$

Treći i četvrti član ovog izraza predstavljaju samointerakciju tri i četri gluona (Slika 21.). Postojanje samointerakcije među gluonima je nova osobina koja nije bila prisutna u QED-u. Upravo



Slika 21: Tro-gluonski i četvoro-gluonski verteks.

ova osobina je odgovorna za postojanje asimptotske slobode i zarobljenosti kvarkova.

Maseni član $m^2 A_\mu^a A_a^\mu$ se u lagranžijanu ne pojavljuje jer bi uništio gejdž invarijantnost.

Klasičan lagranžijan je napisan preko gluonskih polja $A^a_{\mu=0,1,2,3}$ sa četri nezavisna Lorencova stepena slobode. Međutim bezmaseni vektorski bozoni imajudva fizička stepena slobode (stanja transverzalne polarizacije). Zato se mora izvršiti **kvantizacija klasičnog lagranžijana**. Da bi se to sprovelo u izraz za lagranžijan se moraju dodati još dva člana:

1. **gejdž fiksirajući član**
$$L_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)(\partial^\nu A_\nu^a),$$
gde je ξ gejdž parametar;

2. **Fadejev-Popov član**
$$L_{FP} = -\partial^\mu \bar{\Phi}_a D^\mu \Phi^a,$$
gde je
$$D^\mu \Phi^a = \partial^\mu \Phi^a \ - \ g_s f^{abc} \Phi^b A_c^\mu.$$
$\bar{\Phi}^a$, Φ^a $(a = 1,...,N_c^2 - 1)$ su antikomutirajuća, bezmasena, hermitska, skalarna polja. Ova polja nisu fizička i često se nazivaju "duhovi".

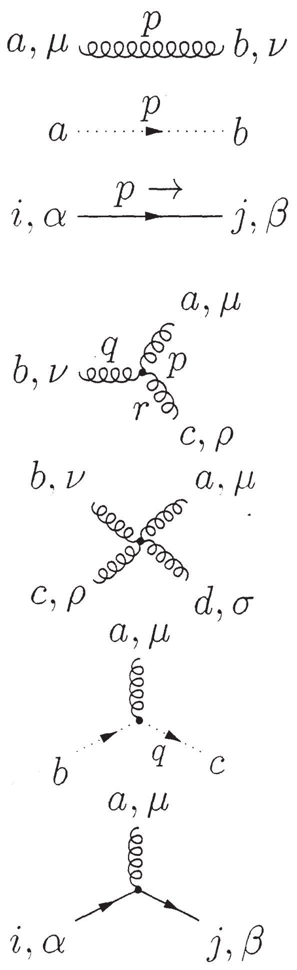
Tako da efektivan lagranžijan posle kvantizacije glasi

$$\boxed{L \ = \ L_{KL} \ + \ L_{GF} \ + \ L_{FP}.}$$

5.2 Fejnmanova pravila

Iz kvantnog lagranžijana se mogu izvesti Fejnmanova pravila. Svaki lagranžijan se sastoji iz dva člana: slobodnog i interakcionog. Iz slobodnog člana se izvode propagatori, a iz interakcionog člana se izvode verteksi.

Na Slici 22. su prikazana Fejnmanova pravila. Prvi dijagram predstavlja gluonski propagator, drugi dijagram je propagator polja "duhova", a treći dijagram je fermionski propagator (a, b su kolorni indeksi gluona, μ, ν su Lorencovi indeksi, α, β su kolorni indeksi kvarkova). Na četvrtom i petom dijagramu su tro-gluonski i četvoro-gluonski verteks (a, b, c, d su kolorni indeksi gluona, μ, ν, ρ, σ su Lorencovi indeksi). Na šestom dijagramu je duh-gluon verteks, a na sedmom dijagramu je fermion-gluon verteks.



$$\frac{-i\,\delta_{ab}\,g_{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}$$ [gluon]

$$\frac{i\,\delta_{ab}}{p^2+i\epsilon}$$ [ghost]

$$\frac{i\,\delta_{ij}}{(\not p - m + i\epsilon)_{\beta\alpha}}$$ [quark]

$$-gf^{abc}\big[(p-q)^\rho g^{\mu\nu} + (q-r)^\mu g$$
$$+(r-p)^\nu g^{\mu\rho}\big]$$
(all momenta incoming)

$$-ig^2 f^{xac} f^{xbd}\,[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}]$$
$$-ig^2 f^{xad} f^{xbc}\,[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]$$
$$-ig^2 f^{xab} f^{xcd}\,[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}]$$

$$g\, f^{abc}\, q^\mu$$

$$-ig\, T^a_{ji}\,(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}$$

Slika 22: Fejnmanova pravila.

Pomoću Fejnmanovih pravila se mogu izračunati amplitude procesa, pomoću kojih se zatim računaju preseci za procese.

6 "Trčeća" konstanta interakcije

6.1 QED

Konstanta jake interakcije u QED-u zavisi od energije (transfera impulsa)

$$\alpha = \alpha(Q^2),$$

i zato se naziva "trčeća" konstanta interakcije. Svima poznata konstanta fine strukture ima datu vrednost na niskim energijama

$$Q^2 = -m_e^2, \qquad \alpha = \frac{1}{137}.$$

Na LEP-u je pak dobijeno

$$Q^2 = -M_Z^2, \qquad \alpha = \frac{1}{129}.$$

Zavisnost konstante interakcije od skale regulisana je pomoću β funkcija:

$$\mu\frac{d\alpha}{d\mu} \equiv \alpha\beta(\alpha), \qquad \beta(\alpha) = \beta_1\frac{\alpha}{\pi} + \beta_2(\frac{\alpha}{\pi})^2 + ...$$

gde je μ proizvoljna energetska skala.
U prvom redu teorije perturbacije β se redukuje na prvi koeficijent, koji iznosi $\beta_1^{QED} = \frac{2}{3}$. Dif. jednačina za β funkciju se onda lako rešava i dobija se da je za prvi red kvantnih korekcija:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\beta_1\alpha(Q_0^2)}{2\pi}\ln(\frac{Q^2}{Q_0^2})}.$$

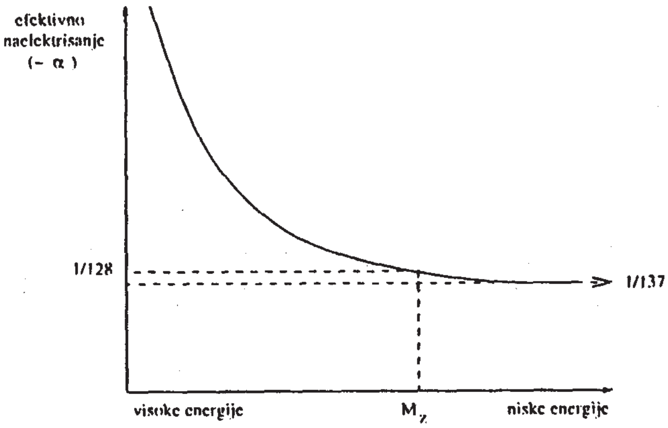
Pošto je $\beta_1 > 0$, **QED konstanta interakcije raste sa energijom**:

$$\boxed{\alpha(Q^2) > \alpha(Q_0^2) \quad \text{za} \quad Q^2 > Q_0^2,}$$

odnosno **elektromagnetno naelektrisanje opada na velikim rastojanjima** (Slika 23.).
Ovo se dešava zbog zaklanjanja naelektrisanja virtuelnim elektron-pozitron parovima generisanim zbog kvantnih korekcija. Na manjim rastojanjima efekat zaklanjanja je manji pa je efektivno naelektrisanje veće i samim tim je i konstanta interakcije veća.

Uzimajući u obzir sve korekcije višeg reda izraz za konstantu interakcije glasi

$$\alpha(Q^2) = \alpha(\mu^2)\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{\beta_1\alpha(\mu^2)}{2\pi}\ln(\frac{Q^2}{\mu^2})]^n.$$



Slika 23: Zavisnost konstante EM interakcije od energije.

6.2 QCD

U QCD se oko kvarka pored virtuelnih kvark antikvark parova javljaju i virtuelni gluoni. Prvi koeficijent β funkcije glasi

$$\beta_1 = \frac{2N_f - 11N_c}{6}.$$

Prvi član u ovom izrazu daje pozitivan doprinos i on potiče od $q\bar{q}$ parova i proporcionalan je broju aromata N_f. Samointerakcija gluona daje drugi član proporcionalan broju boja N_c. Ovaj član daje negativan doprinos i odgovoran je za potpuno drugačije ponašanje QCD-a:

$$\beta_1 \; < \; 0 \quad \text{za} \quad N_f \; < \; 16.$$

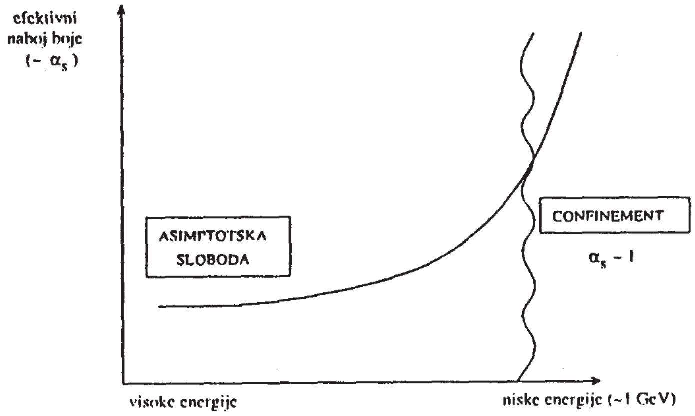
QCD konstanta interakcije opada na malim rastojanjima (Slika 24.)

$$\boxed{\alpha_s(Q^2) \; \to \; 0 \quad za \quad Q^2 \; \to \; \infty.}$$

Stoga za $N_f < 16$, QCD ima svojstvo asimptotske slobode. Samointerakcija gluona ima efekat suprotan od zaklanjajućeg i širi obojeno naelektrisanje. Ovo se nije moglo desiti u QED-u jer foton nije naelektrisan. Samo ne-Abelove gejdž teorije u kojima su gejdž bozoni samointereagujuće čestice imaju ovu osobinu širenja naelektrisanja. Tako je zapravo na **većim rastojanjima efektivno obojeno naelektrisanje veće** pa je i konstanta interakcije veća. Na manjim rastojanjima (većim energijama) konstanta interakcije je manja pa kvarkovi izgledaju slobodni (asimptotska sloboda).

Rešavanjem diferencijalne jednačine za β funkciju u prvom redu teorije perturbacija dobija se:

$$\ln \mu \; + \; \frac{\pi}{\beta_1 \alpha_s(\mu^2)} = \ln \Lambda,$$



Slika 24: Zavisnost konstante jake interakcije od energije.

gde je Λ integraciona konstanta. Odatle se dobija:

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{2\pi}{-\beta_1 \ln{(\mu^2/\Lambda^2)}} .$$

Ako je $\mu \gg \Lambda$, onda $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow 0$ (asimptotska sloboda). Na nižim energijama konstanta interakcije postaje veća. Za $\mu \rightarrow \Lambda$ dobija se $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \infty$ i imamo efekat zarobljenosti kvarkova.

Popravke višeg reda su od mnogo većeg značaja za QCD nego za QED jer je na uobičajenim energijama veća konstanta interakcije kod QCD-a. β funkcija se zna do na prva četri koeficijenta. Konstanta interakcije zadovoljava sledeću zavisnost:

$$\alpha_s(\mu^2) = \alpha_s(\mu_0^2) \ \{1 \ - \ \frac{\beta_1}{2}\frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{\pi} \ \ln{(\ \frac{\mu^2}{\mu_0^2})} \ - \ \frac{\beta_2}{2} \ (\ \ln(\frac{\mu^2}{\mu_0^2})\ )^2 \ + \ ...\}^{-1}.$$

Srednja vrednost svih merenja konstante jake interakcije iznosi

$$\alpha_s(M_Z^2) \ = \ 0.119 \pm 0.002 \ .$$

7 QCD na rešetki

7.1 Motivacija za uvođenje

Pošto je QCD jaka interakcija **perturbativni razvoj** daje rezultate samo na malim rastojanjima gde je konstanta interakcije mala, a na velikim rastojanjima ova tehnika nije adekvatna. Međutim postoje **neperturbativne aproksimacije** zasnovane na diskretizaciji 4-dimenzionalnog prostor-vremena na čvorove rešetke. To je QCD na rešetki koji se može simulirati na računarima. On daje dobre rezultate za velika rastojanja.

Najvećim delom se QCD-a na rešetki bavi

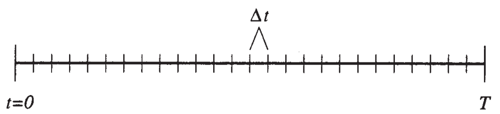
- Izračunavanjem masa (i drugih karakteristika) hadrona dobijenih u eksperimentima;
- Dobijanjem Cabbibo-Kobayashi-Maskawa matričnih elemenata iz eksperimenta;
- Takođe su računata svojstva QCD-a na konačnim (nenultim) temperaturama i (ili) gustinama. Ovo modelira uslove u kojima je materija bila u ranim stadijumima univerzuma posle big-benga;
- Služi kao prototip za izučavanje jakih interakcija u modelima izvan Standardnog modela.

7.2 Kvantno-mehanički "path" integrali

Ako se u kvantnoj mehanici posmatra čestica u jednoj dimenziji opisana hamiltonijanom $H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = H_0 + V$, onda amplituda prelaza između dva položaja glasi

$$\langle x^{'} t^{'} | x, t\rangle = \langle x^{'} | e^{-iH(t^{'}-t)} | x\rangle.$$

Da bi se prešlo na "path" integrale vreme mora da se diskretizuje tako što se vremenski interval T izdeli na n jednakih delova $T = n\Delta t$ (Slika 25.).



Slika 25: Diskretizacija vremenskog intervala.

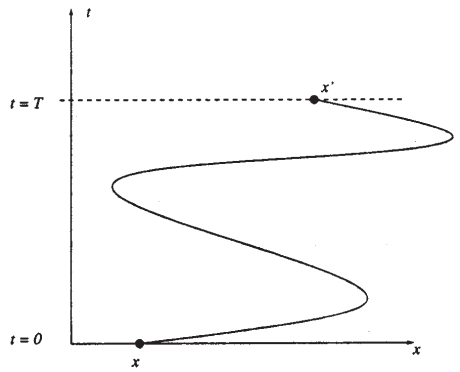
Uvodi se notacija

$$\prod_t dx(t) \equiv Dx.$$

"Path" integral reprezentacija kvantno-mehaničke amplitude prelaza glasi:

$$\boxed{\langle x'|e^{-iHT}|x\rangle = \int Dx \ \exp{(iS)},}$$

gde je $S = \int_0^T dt \ L(x, \dot{x})$ klasično dejstvo na putu $x(t)$ od x do x' (Slika 26.).



Slika 26: Trajektorija čestice.

Za česticu u tri dimenzije uvodi se uopštenje:

$$Dx = \prod_i \prod_t dx_i(t) \ .$$

Kvantno-mehanička amplituda prelaza može biti shvaćena kao integral po doprinosima duž svih mogućih puteva od početnog do krajnjeg položaja otežinjenih eksponentom klasičnog dejstva na tom putu.

7.3 Kvantna teorija polja sa funkcionalnim integralima

Cilj je prevesti "path" integral reprezentaciju kvantne mehanike na jezik teorije polja. U teoriji polja dinamičke varijable su polja $\Phi(x)$, a broj stepeni slobode je kontinualan. Neka se posmatra skalarno polje $\Phi(x)$, gde je $x = (\vec{x}, t)$ prostorno-vremenska koordinata. Objekti od interesa su vakumski očekivane vrednosti vremenski uređenog proizvoda operatora polja (Grinove funkcije) koji sadrže sve fizički relevantne informacije:

$$\langle 0| \ \Phi(x_1)...\Phi(x_n))|0\rangle, \quad t_1 > ... > t_n \ .$$

Pravila za prevođenje kvantne mehanike u kvantnu teoriju polja su sledeća:

$$x_i(t) \leftrightarrow \Phi(x, t) \ ,$$

$$i \leftrightarrow \vec{x} \ ,$$

$$\prod_{t,i} dx_i(t) \leftrightarrow \prod_{t,\vec{x}} d\Phi(\vec{x}, t) \equiv D\Phi \ ,$$

$$S = \int dt\ L \leftrightarrow S = \int dt d^3x\ L\ .$$

Reprezentacija Grinovih funkcija preko funkcionalnih integrala glasi

$$\boxed{\langle 0|\ \Phi(x_1)...\Phi(x_n))|0\rangle\ =\ \frac{1}{Z}\int D\Phi\ \Phi(x_1)...\Phi(x_n)\ \exp{(iS)},}$$

gde je

$$Z = \int D\Phi\ \exp{(iS)}.$$

7.4 Diskretizacija na rešetki

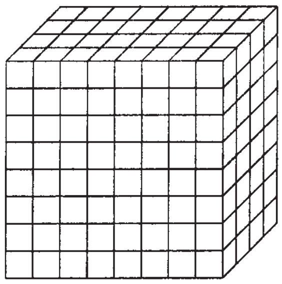
Ostaje pitanje da li beskonačno dimenziona integracija po svim konfiguracijama polja

$$D\Phi = \prod_x\ d\Phi(x)\ ,$$

ima smisla.

"Path" integral reprezentacija kvantne mehanike dobijena je diskretizacijom vremena.

Kod teorije polja 4-dimenzionalni prostorno vremenski kontinuum zamenjuje se 4-dimenzionalnom hiperkubičnom periodičnom rešetkom čija je veličina $N = N_a \times N_a \times N_a \times N_t$. N_a je prostorna, a N_t vremenska dimenzija rešetke. Rastojanje između dva susedna čvora je a. Na Slici 27. je predstavljena 3-dimenziona rešetka.



Slika 27: 3-dimenziona rešetka.

Slalarno polje

$$\Phi(x)\ ,\quad x \in \text{rešetke}\ ,$$

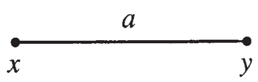
definiše se samo na čvorovima rešetke.
U funkcionalnim integralima proizvod

$$D\Phi = \prod_x d\Phi(x)\ ,$$

takođe uključuje samo čvorove rešetke x. Tako da sada imamo **diskretan skup varijabli da integralimo**, a ako je **rešetka konačna onda su integrali konačno dimenzionalni**.

7.5 Gluoni na rešetki

Nazovimo rastojanje između dva susedna čvora rešetke x i y spojnicom $b = \langle x, y \rangle$ (Slika 28.).



Slika 28: Spojnica $b = \langle x, y \rangle$ između čvorova x i y.

Svakoj spojnici

$$b = \langle x + a\hat{\mu}, x \rangle \ ,$$

u smeru $\hat{\mu}$, pridružuje se varijabla

$$U(b) \equiv U(x + a\hat{\mu}, x) \equiv U_{x\mu} \in SU(3).$$

Ove varijable zamenjuju gluonska polja $A^a_\mu(x)$, odnosno one reprezentuju gluone. To su kompleksne 3×3 matrice koje opisuju kako se menja boja kvarkova kada se oni pomeraju od jednog ka drugom čvoru.
Integral po svim konfiguracijama gluonskih polja je integral po svim varijablama spojnica $U(b)$ na rešetki. Očekivana vrednost opservable A glasi

$$\boxed{\langle A \rangle = \tfrac{1}{Z} \int \textstyle\prod_b dU(b) A \exp\left(-S_G\right).}$$

S_G je dejstvo za gluone

$$S_G = \sum_p (1 - \frac{\beta}{3} Re(Tr(U(P)))),$$

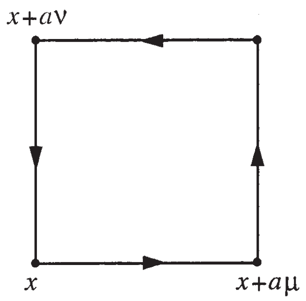
p je elemntarna ćelija rešetke (Slika 29.), a proizvod varijabli spojnica elementarne ćelije

$$U(p) = U_{x\mu\nu} = U_{(x+a\nu)(-\nu)} U_{(x++a\mu+a\nu)(-\mu)} U_{(x++a\mu)\nu} U_{x\mu}$$

je varijabla ćelije p.

Kao skraćenica koristi se

$$DU \equiv \prod_b dU(b).$$



Slika 29: Elementarna ćelija p rešetke u pravcima μ i ν.

7.6 Fermioni na rešetki

U radu sa jakim interakcijama neophodno je ubaciti polja kvarkova. Da bi napisali fermionske "path" integrale kao **integrale po fermionskim i anti-fermionskim konfiguracijama polja** koristimo izraz

$$D\Psi D\bar{\Psi} = \prod_x \prod_\alpha d\Psi_\alpha(x) d\bar{\Psi}_\alpha(x) \ .$$

Onda fermionska Grinova funkcija ima oblik

$$\boxed{\langle 0|A|0\rangle = \tfrac{1}{Z} \int D\Psi D\bar{\Psi} \ A \ \exp\left(-S_F\right) \ ,}$$

gde je

$$S_F = \int d^4x \bar{\Psi}(x)(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\Psi(x) \ ,$$

dejstvo za fermione.

Može se pokazati da fermioska determinanta glasi

$$\boxed{\int D\Psi D\bar{\Psi} \exp\left(- \int d^4x \bar{\Psi}(x)(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\Psi(x)\right) = det(\gamma_\mu \partial^\mu + m) = det(D + m) \ .}$$

Glavni problem je izračunati determinantu često ogromne matrice (D+m).

7.7 QCD na rešetki

U QCD-u na rešetki predpostavljeno je da kvarkovi žive na čvorovima rešetke, a gluoni na spojevima čvorova rešetke. Kao što je pokazano dejstvo za gluone glasi

$$S_G = \beta \sum_p (1 \ - \ \frac{1}{3} ReTrU(P)),$$

a dejstvo za kvarkove glasi

$$S_F = \int d^4x \bar{\Psi}(x)(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\Psi(x).$$

Ukupno dejstvo je zbir kvarkovskog i gluonskog dejstva

$$S = S_F + S_G.$$

Particiona funkcija za celu rešetku glasi

$$Z = \int D\psi \; D\bar{\psi} \; DU \;\; \exp(-(S_G + S_F)) \; .$$

Nažalost pošto su kvarkovske varijable ψ nekomutirajući grasmanovi brojevi, nepostoji jednostavna reprezentacija na kompijuteru, pa se oni moraju prointegraliti

$$\int D\Psi D\bar{\Psi} \exp\left(- \int d^4x \bar{\Psi}(x)(D + m)\Psi(x)\right) = det(D + m) \; ,$$

posle čega dobijamo determinantu matrice (D+m). Particiona funkcija konačno glasi

$$Z = \int \; DU \; det(D + m) \exp(-S_G).$$

Ovo je osnovni integral koji se računa numerički pomoću **Monte-Karlo metoda**. Najveća smetnja za QCD simulacije sa kvarkovima je determinanta $det(D + m)$ u particionoj funkciji. Često se koristi **"quinched" aproksimacija** u kojoj se smatra da je Q konstanta.

8 Zaključak

QCD je ogromna oblast sa puno poddisciplina. Zadatk teorije jakih interakcija je povezivanje ovih slika i dinamike koja je u pozadini svega jer trenutno nepostoji univerzalan prilaz svim aspektima teorije.
U perturbativnom QCD-u i QCD-u na rešetki jedan od ciljeva je povećanje preciznosti (kvantne korekcije višeg reda i sve moćniji računari za simulacije) ne bi li se ucrtavanjem novih ruta došlo do zajedničkog rešenja fenomena hadronizacije.
Eksperimenti na LHC-u će takođe biti dragocen izvor novih informacija koje će značajno uticati na dalji razvoj QCD-a.

9 Literatura

- Griffiths D. , *Introduction to Elementary Particles*, Harper and Row, Publishers, New York, 1987.
- Perkins D. E., *Introduction to High Energy Physics*, Addison- Wesley Publishing Company, 1987.
- Peskin M. E., Schroeder D. V. , *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1997.
- *Summary: Working group on QCD and Strong Interactions*, hep-ph/0201146
- Münster G. , Walzl M. , *Lattice Gauge Theory A Short Primer*, hep-lat/0012005
- Pich A., *Aspects of Quantum Chromodynamics*, Lectures given at the ICTP Summer School in Particle Physics, Trieste 1999.
- Brandenburg A., *Quantum Chromodynamics*, Lectures given at the Adriatic School on Particle Physics and Physics Informatics, Split, 2001.
- Altarelli G., *A QCD Primer*, Lectures given at the 2001 European School of High Energy Physics, Beatenberg, 2001.
- Friedman J. I. , *Deep Inelastic Scattering: Comparsion with the Quark Model*, Nobel Lecture, December 8, 1990.
- Kendall H. W. , *Deep Inelastic Scattering: Experiments on the proton and the observation of Scaling*, Nobel Lecture, December 8, 1990.
- Taylor R. E. , *Deep Inelastic Scattering: The Early Days*, Nobel Lecture, December 8, 1990.
- Škoro G. P. , *Čestice i interakcije*, Skripta
- *Quantum Chromodynamics*, Review of Particle Physics, The European Physical Journal C, Volume 15, 2000.