Prvi domaći zadatak iz Teorijske mehanike - 10. mart 2009.

1. (10 poena) Materijalna tačka mase m pada vertikalno nadole u homogenom gravitacionom polju g, bez početne brzine, pri čemu na nju deluje i sila otpora sredine $\vec{F} = -\alpha\vec{v} - \beta\vec{v}^2\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, gde su α i β pozitivne konstante. Naći zavisnost brzine od vremena, kao i njenu graničnu vrednost kada $t \to \infty$.

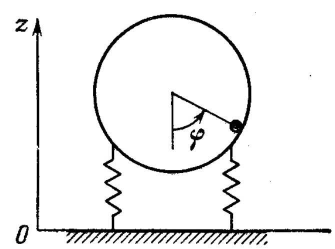
2. (15 poena) Pauk se kreće po balonu sfernog oblika, čiji se poluprečnik R menja sa vremenom po zakonu $R = R(t)$. Uzimajući za generalisane koordinate pauka sferne uglove θ i φ u sistemu čiji se koordinatni početak poklapa sa centrom balona, napisati izraze za položaj $\vec{r}$ pauka, kao i njegovo moguće i virtuelno pomeranje u funkciji θ, φ i t. Eksplicitnim računom se uveriti da su zadovoljene relacije $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_i}$ i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, $q_i = \theta, \varphi$.

3. (15 poena) Materijalna tačka mase m kreće se u ravni $z = 0$. Uočiti koordinatni sistem $Ox'y'z$ koji rotira oko ose Oz konstantnom ugaonom brzinom ω i za generalisane koordinate čestice izabrati x' i y'. Izvesti izraz za kinetičku energiju T čestice (u odnosu na nepokretni sistem). Koristeći opšti izraz za kinetičku energiju u nezavisnim generalisanim koordinatama, objasniti kako to da iako je jedina veza $z = 0$ koja postoji u ovom slučaju stacionarna, kinetička energija ipak nije homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina $\dot{x}'$ i $\dot{y}'$.

4. (20 poena) Materijalna tačka mase m kreće se pod dejstvom aktivne sile $\vec{F}$, koja u sfernim koordinatama (r, θ, φ) ima oblik $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$. Uzimajući sferne koordinate za generalisane koordinate sastaviti diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke pomoću Lagranževih jednačina.

5. (20 poena) Potencijalna energija U čestice mase m, koja se kreće duž x ose, ima oblik $U(x) = cx/(x^2 + a^2)$, gde su c i a pozitivne konstante. Skicirati grafik funkcije $U(x)$. Naći položaj stabilne ravnoteže, kao i period malih oscilacija oko njega. Ako je poznato da čestica kreće iz tog položaja ravnoteže, sa početnom brzinom v, naći vrednosti v za koje će čestica (a) oscilovati, (b) otići u $-\infty$, (c) otići u $+\infty$.

6. (20 poena) Gladak prsten u obliku kružnice poluprečnika r i zanemarljive mase, koji je postavljen na horizontalnu podlogu preko dve jednake opruge (istih koeficijenata elastičnosti k), kao na slici, može translatorno da se kreće u vertikalnoj ravni. Po unutrašnjoj strani prstena može da se kreće materijalna tačka mase m. Rešiti problem malih oscilacija ovog sistema oko stabilnog položaja ravnoteže.



Krajnji rok za predavanje ovog domaćeg zadatka je utorak, 24. mart. Prilikom izrade domaćih zadataka dozvoljeno je koristiti literaturu i tražiti pomoć. Međutim, konačna rešenja koja predajete treba da budu napisana samostalno i **svojeručno**. Identična (kopirana) rešenja neće biti bodovana.

Preporuke za rešavanje zadataka: Ukratko, ali jasno i punim rečenicama, navedite osnovne principe i jednačine na koje se pozivate pri rešavanju zadataka. Jasno definišite sve oznake koje koristite, naročito one koje nisu uobičajene. Gde god slika ili dijagram mogu da pomognu u rešavanju nacrtajte ih. Pišite čitko, a glavne rezultate uokvirite.

Rešenja

1. Ako z osu orijentišemo vertikalno naniže, sa nulom u početnom položaju čestice, iz osnovnog dinamičkog zakona dobijamo diferencijalnu jednačinu kretanja u obliku

$$m\ddot{z} = mg - \alpha\dot{z} - \beta\dot{z}^2 \,.$$

Pošto z ne figuriše eksplicitno u ovoj jednačini, uz smenu $v = \dot{z}$, iz nje dobijamo diferencijalnu jednačinu prvog reda po v

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{m}v^2 + \frac{\alpha}{m}v = g \,,$$

koja dozvoljava razdvajanje promenljivih na sledeći način:

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{\beta}{m}v^2 - \frac{\alpha}{m}v} = \mathrm{d}t \,,$$

tako da je

$$t = -\frac{m}{\beta}\int\limits_0^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v^2 + \frac{\alpha}{\beta}v - \frac{mg}{\beta}} \,,$$

odnosno

$$t = -\frac{m}{\sqrt{\alpha^2 + 4mg\beta}} \ln \frac{2\beta v(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4mg\beta}) - 4mg\beta}{2\beta v(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4mg\beta}) - 4mg\beta} \,.$$

Eksplicitnim izražavanjem v iz poslednje jednačine dobija se

$$v(t) = \frac{2mg}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta mg}\coth[\frac{t}{2m}\sqrt{\alpha^2 + 4\beta mg}]} \,,$$

odakle je granična vrednost brzine

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{2mg}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta mg}} \,.$$

2. U sfernim koordinatama radijus-vektor $\vec{r}$ se izražava kao $\vec{r} = r\vec{e}_r$, a pošto je po uslovu zadatka $r = R(t)$ položaj pauka u proizvoljnom trenutku ima oblik:

$$\vec{r} = R(t)\vec{e}_r = R(t)(\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) = \vec{r}(\theta, \varphi, t) \,, \tag{1}$$

gde smo ort $\vec{e}_r$ izrazili u funkciji sfernih uglova θ, φ i Dekartovih ortova $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ i $\vec{e}_z$. Odatle je moguće pomeranje $\mathrm{d}\vec{r}$ pauka jednako

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r} &= \dot{R}(t)\,\mathrm{d}t(\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) + R(t)\mathrm{d}(\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) \\
&= \dot{R}(t)\,\mathrm{d}t(\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) \\
&+ R(t)\left[(-\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi + \cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta)\vec{e}_x + (\cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi + \sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta)\vec{e}_y - \sin\theta\mathrm{d}\theta\vec{e}_z\right] \\
&= \mathrm{d}t\left[\dot{R}(t)\left(\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z\right)\right] \\
&+ \mathrm{d}\varphi\left[R(t)(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y)\right] \\
&+ \mathrm{d}\theta\left[R(t)(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z)\right] \,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Za formiranje virtuelnog pomeranja $\delta\vec{r} = \mathrm{d}'\vec{r} - \mathrm{d}\vec{r}$ potrebno nam je još jedno moguće pomeranje $\mathrm{d}'\vec{r}$ iz iste konfiguracije, određene dakle istim vrednostima θ i φ, u istom trenutku t, i kome odgovara isto $\mathrm{d}t$. Jedino po čemu se izraz za $\mathrm{d}'\vec{r}$ razlikuje od krajnjeg izraza za $\mathrm{d}\vec{r}$ u (2) je što umesto $\mathrm{d}\varphi$ i $\mathrm{d}\theta$ treba uzeti druge vrednosti $\mathrm{d}'\varphi$ i $\mathrm{d}'\theta$, pa je

$$\delta\vec{r} = \delta\varphi\ [R(t)(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y)] + \delta\theta\ [R(t)(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z)]\ , \tag{3}$$

gde je $\delta\varphi = \mathrm{d}'\varphi - \mathrm{d}\varphi$ i $\delta\theta = \mathrm{d}'\theta - \mathrm{d}\theta$.

Parcijalni izvodi položaja pauka $\vec{r}(\theta, \varphi, t)$ (1) po koordinatama θ i φ redom su jednaki

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = R(t)(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z)\,, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = R(t)(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y)\,. \tag{4}$$

S druge strane, iz (2) sledi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= \dot{R}(t)\,(\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) + \dot{\varphi}\ [R(t)(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y)] \\ &+ \dot{\theta}\ [R(t)(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z)]\ ,\end{aligned} \tag{5}$$

pa je

$$\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{\theta}} = R(t)(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z)\,, \quad \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{\varphi}} = R(t)(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y)\,, \tag{6}$$

tj. zaista su zadovoljene relacije

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{\theta}}\,, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{\varphi}}\,.$$

Takođe, iz (4) sledi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right) &= \dot{R}(t)(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z) \\ &+ R(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z) \\ &= \dot{R}(t)(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z) \\ &+ \dot{\varphi}\,R(t)\,(-\sin\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_y) \\ &+ \dot{\theta}R(t)\,(-\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x - \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y - \cos\theta\vec{e}_z)\ , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right) &= \dot{R}(t)(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y) + R(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y) \\ &= \dot{R}(t)(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y) + \dot{\varphi}R(t)(-\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x - \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y) \\ &+ \dot{\theta}R(t)\cos\theta(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,,\end{aligned}$$

a iz (5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) &= \dot{R}(t)\,(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z) + \dot{\varphi}\,R(t)(-\sin\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_y) \\ &+ \dot{\theta}\,R(t)(-\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x - \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y - \cos\theta\vec{e}_z)\,, \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) &= \dot{R}(t)\,(-\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_y) + \dot{\varphi}\,R(t)(-\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x - \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y) \\ &+ \dot{\theta}\,R(t)(-\sin\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_y)\,,\end{aligned}$$

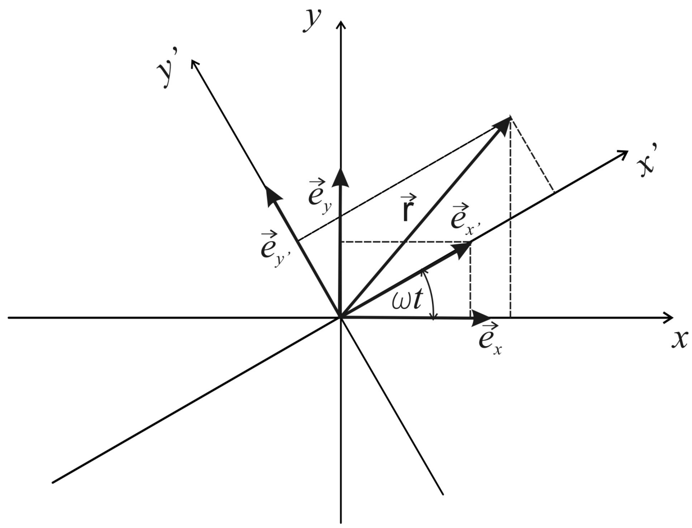
odakle se jasno vidi da su i relacije

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

zadovoljene.

3. Radijus vektor $\vec{r}$ čestice koja se kreće u ravni $z=0$, u novim koordinatama x', y' može da se izrazi na sledeći način (videti sliku):

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x'\vec{e}_x^{\,\prime}+y'\vec{e}_y^{\,\prime}=x'(\cos\omega t\vec{e}_x+\sin\omega t\vec{e}_y)+y'(-\sin\omega t\vec{e}_x+\cos\omega t\vec{e}_y)\\ &= (x'\cos\omega t-y'\sin\omega t)\vec{e}_x+(x'\sin\omega t+y'\cos\omega t)\vec{e}_y\,. \end{aligned} \tag{7}$$



Odatle je brzina jednaka

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=(\dot{x}'\cos\omega t-\dot{y}'\sin\omega t-\omega x'\sin\omega t-\omega y'\cos\omega t)\vec{e}_x+(\dot{x}'\sin\omega t+\dot{y}'\cos\omega t+\omega x'\cos\omega t-\omega y'\sin\omega t)\vec{e}_y\,,$$

pa se za kinetičku energiju dobija izraz:

$$T=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+2\omega(x'\dot{y}'-\dot{x}'y')+\omega^2(x'^2+y'^2)\right]\,,$$

koji nema oblik homogene kvadratne funkcije generalisanih brzina $\dot{x}'$ i $\dot{y}'$, tj. u njemu postoji kako član linearan po generalisanim brzinama, tako i slobodni član, koji uopšte ne zavisi od njih. Razlog za to je što se u izrazu za $\vec{r}$ (7) pri prelasku sa koordinata x i y na koordinate x' i y' eksplicitno pojavilo vreme t, pa je $\vec{r}=\vec{r}(x',y',t)$ i

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(x',y',t)=\omega\left[(-x'\sin\omega t-y'\cos\omega t)\vec{e}_x+(x'\cos\omega t-y'\sin\omega t)\vec{e}_y\right]\neq 0\,.$$

4. Pošto je sila data u uopštenom obliku iz kog se ne vidi da li je potencijalna, treba iskoristiti Lagranževe jednačine I vrste, tj. oblik u kome figurišu kinetička energija i ukupne generalisane sile:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial T}{\partial r} &= Q_r\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta} &= Q_\theta\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi} &= Q_\varphi\,.\end{aligned}$$

Kinetička energija u sfernim koordinatama ima oblik

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\,,$$

a generalisane sile je ovde najlakše odrediti iz izraza za rad na virtuelnom pomeranju, koji se, pošto nema veza, ovde poklapa sa radom na mogućem pomeranju:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = (F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi)\cdot(\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi) \\ &= F_r\mathrm{d}r + rF_\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta F_\varphi\mathrm{d}\varphi = Q_r\mathrm{d}r + Q_\theta\mathrm{d}\theta + Q_\varphi\mathrm{d}\varphi \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad Q_r &= F_r\,, \quad Q_\theta = rF_\theta\,, \quad Q_\varphi = r\sin\theta F_\varphi\,. \end{aligned} \tag{8}$$

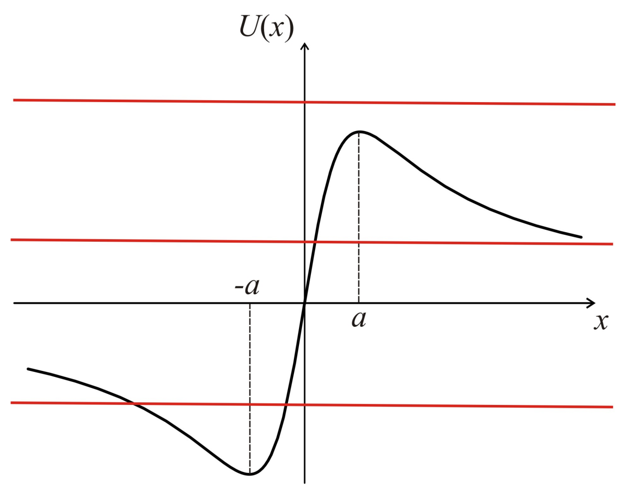
Zamenom kinetičke energije u Lagranževe jednačine, konačno se dobija sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) &= F_r \\ mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2) &= rF_\theta \\ mr(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin^2\theta) &= r\sin\theta F_\varphi \end{aligned}$$

5. Prvi i drugi izvodi potencijalne energije jednaki su

$$\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = c\frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2} = cx\frac{2\,(x^2 - 3a^2)}{(a^2 + x^2)^3}$$

odakle se vidi da je funkcija $U(x)$ rastuća u intervalu $-a < x < a$, van tog intervala opadajuća, u tački $x = -a$ ima minimum, a u tački $x = a$ maksimum. Funkcija je neparna, za $x \to \pm\infty$ teži nuli i izgleda kao na sledećoj slici.



Položaju $x = -a$ odgovara stabilna ravnoteža. Pošto diferencijalna jednačina kretanja ima oblik

$$m\ddot{x} + c\frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} = 0\,,$$

a u blizini tačke $x = -a$ važi razvoj

$$c\frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-a} + \left.\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=-a}(x+a) + \cdots = \frac{c}{2a^3}(x+a) + \cdots\,,$$

linearizacijom u okolini te tačke dobija se aproksimativna jednačina

$$m\ddot{\eta} + \frac{c}{2a^3}\eta = 0\,,$$

gde je $\eta = x + a$. Odatle se vidi da je frekvencija malih oscilacija $\omega = \sqrt{\frac{c}{2ma^3}}$, pa je traženi period $\tau = 2\pi(2ma^3/c)^{1/2}$.

Ako se čestica u početnom trenutku nalazila u tački $x = -a$ i imala brzinu v, onda je njena ukupna energija jednaka

$$E = \frac{1}{2}\left(mv^2 - \frac{c}{a}\right)\,.$$

(a) Sa grafika potencijalne energije se vidi da će čestica oscilovati (tj. kretati se u ograničenom delu prostora - u potencijalnoj jami) ako je $U_{min} < E < 0$, odakle se lako dobija uslov $|v| < \sqrt{c/(ma)}$.

(b) Ako je početna brzina čestice negativna, onda će ona sigurno otići u $-\infty$ pod uslovom da je $E \geq 0$, odakle sledi uslov $v \leq -(c/ma)^{1/2}$. Ako je početna brzina pozitivna, čestica može da ode u $-\infty$ jedino ako je $0 \leq E < U_{max} = c/2a$, odakle sledi $(c/ma)^{1/2} \leq v < (2c/ma)^{1/2}$.

(c) Čestica će otići u $+\infty$ jedino u slučaju kada je početna brzina pozitivna i $E > U_{max}$, što je zadovoljeno ako je $v > (2c/ma)^{1/2}$.

6. Ako za generalisane koordinate izaberemo visinu z centra prstena i ugao φ otklona materijalne tačke od vertikale, potencijalna energija sistema može da se izrazi kao

$$U(z,\varphi) = mg(z - r\cos\varphi) + k(z-a)^2\,,$$

gde je a zbir nominalne dužine opruge i vertikalnog rastojanja od centra prstena do tačke u kojoj je opruga pričvršćena za njega. Pošto je

$$\frac{\partial U}{\partial z} = mg + 2k(z-a)\,,\quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgr\sin\varphi\,,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2k\,,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgr\cos\varphi\,,$$

lako se proverava da potencijalna energija ima minimum u tački $(z = -mg/2k + a, \varphi = 0)$, što je, po Ležen-Dirihleovoj teoremi istovremeno i položaj stabilne ravnoteže. U okolini ovog položaja aproksimativni izraz za U je

$$U \approx \frac{1}{2}mgr\varphi^2 + k\xi^2\,,$$

gde je $\xi = z - a + mg/2k$, a kinetička energija je

$$T = \frac{1}{2}m[(\dot{z} + r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi) \approx \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2)\,,$$

pa Lagranževe jednačine imaju oblik

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\varphi = 0\,,\quad \ddot{\xi} + \frac{2k}{m}\xi = 0\,.$$

Ove dve jednačine su međusobno nezavisne, a opšta rešenja su im:

$$\varphi(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t + \alpha\right)\,,\quad \xi(t) = B\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \beta\right)\,,$$

gde se A, B, α i β određuju iz početnih uslova.