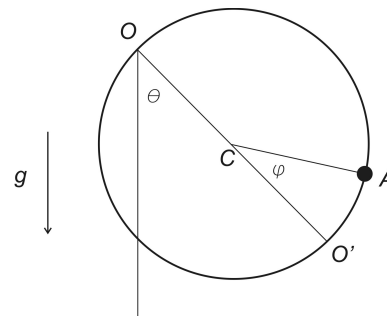


PISMENI ISPIT IZ TEORIJSKE MEHANIKE - 3. JUN 2009.

1. (35 poena) Tanak prsten, poluprečnika a i mase M može da rotira u vertikalnoj ravni u homogenom gravitacionom polju oko jedne svoje tačke O , koja je učvršćena. Po prstenu klizi materijalna tačka A , mase m . Uzimajući za generalisane koordinate ugao θ koji poluprečnik prstena OC zaklapa sa vertikalom (C je centar prstena) i ugao φ , koji poluprečnik prstena CA zaklapa sa poluprečnikom CO' , gde je O' tačka naspram tačke O na istom prečniku prstena, naći:



(a) lagranžijan i diferencijalne jednačine kretanja; (b) normalne frekvence malih oscilacija oko položaja $\theta = \varphi = 0$; (c) konačne jednačine kretanja, ako je $M = 8m$, a sistem je počeo da se kreće iz položaja $\theta = 0$, $\varphi = \varphi_0$ (φ_0 mali ugao), u kome je mirovao.

2. (25 poena) Homogeni štap mase m i dužine $2a$ slobodno se kreće u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Formirati hamiltonijan i Hamiltonove jednačine.

3. (25 poena) Kroz jako dugačku cilindričnu cev, čiji poprečni presek ima oblik elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

pod delovanjem konstantnog gradijenta pritiska $\text{grad}p = K\vec{e}_z$ u pravcu ose cilindra, stacionarno i laminarno struji Stoksov fluid, koeficijenta viskoznosti η . Pretpostavljajući da zapreminske sile mogu da se zanemare, kao i da polje brzine ima oblik

$$\vec{v} = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \vec{e}_z$$

(a) odrediti konstantu C ; (b) u slučaju kada je $a = b = R$ naći matricu koja odgovara tenzoru brzine deformacije i izračunati viskoznu silu koja deluje na deo cevi jedinične dužine.

4. (15 poena) Čestica mase M_A , koja miruje u laboratorijskom sistemu, raspada se na dve čestice, masa (mirovanja) M_B i M_C . Odrediti energije ovih čestica, E_B i E_C , kao i njihove 4-vektore brzine u laboratorijskom sistemu.

Rešenje

3. (a) Pošto je

$$\Delta\vec{v} = \vec{e}_z\Delta v = \vec{e}_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -2C \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \vec{e}_z, \quad (1)$$

i $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = 0$, zamenom u Stoksovu jednačinom, iz njene projekcije na z -osu, direktno sledi vrednost konstante C :

$$C = -\frac{K}{2\eta} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

Polje brzine onda ima oblik

$$\vec{v} = -\frac{K}{2\eta} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \vec{e}_z,$$

gde znak minus ukazuje na to da se delići kreću iz oblasti većeg pritiska prema oblasti u kojoj je pritisak manji (tj. kreću se u smeru suprotnom smeru gradijenta pritiska).

(b) Viskozna sila, kojom fluid deluje na elementarnu površinu $d\vec{S} = -dS\vec{e}_r = -Rd\varphi dz\vec{e}_r$ zida cevi (r , φ i z su cilindrične koordinate definisane u odnosu na osu z koja se poklapa sa osom cevi), izračunava se pomoću tenzora viskoznosti $\mathcal{P}' = 2\eta\mathcal{S}$, gde je \mathcal{S} tenzor brzine deformacije. U Dekartovim koordinatama ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) njegovi elementi su po definiciji jednaki

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Pošto je brzina za $a = b = R$ jednaka

$$\vec{v} = -\frac{K}{4\eta} [R^2 - (x_1^2 + x_2^2)] \vec{e}_3,$$

lako se nalazi da je

$$\mathcal{S} = \frac{K}{4\eta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

S druge strane je

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2,$$

pa je viskozna sila koja deluje na element površine $d\vec{S}$ jednaka

$$\mathcal{P}' d\vec{S} = 2\eta\mathcal{S}(-Rd\varphi dz\vec{e}_r) = -2\eta R d\varphi dz \mathcal{S} \vec{e}_r = -\frac{1}{2} K R d\varphi dz (x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi) \vec{e}_3 = -\frac{1}{2} K R^2 d\varphi dz \vec{e}_3,$$

gde je iskorišćeno $x_1 = R \cos \varphi$ i $x_2 = R \sin \varphi$. Odatle je viskozna sila koja deluje na deo zida cevi jedinične dužine jednaka

$$\vec{F}^{\text{visk}} = -\frac{1}{2} K R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \vec{e}_z = -K\pi R^2 \vec{e}_z.$$

4. Iz zakona održanja relativističkog impulsa i energije sledi da su impulsi čestica B i C istog inetenziteta ($p_A = p_B = p$) i pravca, ali suprotnog smera, kao i da je $E_A = M_A c^2 = E_B + E_C$. Korišćenjem formule $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ dalje se dobija

$$\begin{aligned} E_B^2 &= M_B^2 c^4 + p_B^2 c^2, & E_C^2 &= M_C^2 c^4 + p_C^2 c^2 & \Rightarrow & E_B^2 - E_C^2 = (E_B - E_C) M_A c^2 \\ \Rightarrow E_B - E_C &= \frac{M_B^2 - M_C^2}{M_A} c^2 & \Rightarrow E_B &= \frac{M_A^2 + M_B^2 - M_C^2}{2M_A} c^2, & E_C &= \frac{M_A^2 - M_B^2 + M_C^2}{2M_A} c^2. \end{aligned}$$

Za nalaženje 4-vektora brzine, najjednostavnije je iskoristiti vezu između 4-vektora impulsa i brzine: $V^\mu = P^\mu/m = (E/mc, \vec{p}/m)$, tako da se pomoću nađenih izraza za energije, uzimajući da je $\vec{p}_B = p\vec{n}$, $p_C = -p\vec{n}$ dobija

$$\begin{aligned} V_B^\mu &= \frac{c}{2M_A M_B} \left(M_A^2 + M_B^2 - M_C^2, \sqrt{[(M_A - M_B)^2 - M_C^2][(M_A + M_B)^2 - M_C^2]} \vec{n} \right), \\ V_C^\mu &= \frac{c}{2M_A M_C} \left(M_A^2 - M_B^2 + M_C^2, -\sqrt{[(M_A - M_C)^2 - M_B^2][(M_A + M_C)^2 - M_B^2]} \vec{n} \right). \end{aligned}$$