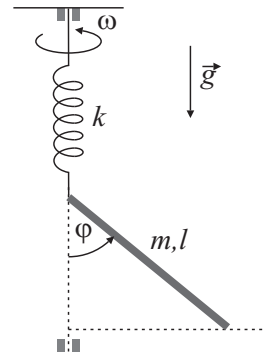


**Pismeni ispit iz TEORIJSKE MEHANIKE**  
21. septembar 2009.

1. Krajevi homogenog štapa mase  $m$  i dužine  $l$  kreću se bez trenja po stranicama pravog ugla. Jedna stranica se poklapa sa vertikalom i na njoj se nalazi opruga koja je jednim krajem zakačena za štاپ, a drugim krajem za plafon. Prav ugao rotira konstantnom ugaonom brzinom oko vertikalne stranice. Kada je ugao koji štاپ zakalapa sa vertikalom  $\varphi = \varphi_0$  opruga je nedeformisana.



- a) Napisati lagranžijan i Lagranževu jednačinu. (15 b)
- b) Ako je  $\omega = 0$  (nema rotacije), odrediti ravnotežni položaj sistema i frekvencu oscilovanja oko ravnotežnog položaja. (15 b)

2. Čestica mase  $m$  kreće se slobodno po unutrašnjoj površi glatkog konusa sa vertikalnom osom i vrhom okrenutim nadole. Poluugao konusa je  $\theta = \alpha$ . Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ .

- a) Napisati Hamiltonove jednačine. (5 b)
- b) Naći očuvane veličine. (5 b)
- c) Pokazati da se kretanje može videti kao efektivno jednodimanzionalno i naći efektivni potencijal  $U_{\text{eff}}(r)$ . (4 b)
- d) Ako se čestica kreće po krugu  $r = r_0$  odrediti njenu frekvencija  $\omega$ ? (6 b)
- e) Na česticu koja se kreće po krugu  $r = r_0$  deluje mala perturbacija. Naći frekvenciju malih oscilacija oko kružne orbite  $\Omega$ . Pod kojim uslovom je  $\omega = \Omega$ ? (10 b)

————— Kolokvijum —————

3. Beskonačno dugačak čvrsti cilindar poluprečnika  $R$  rotira konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko sopstvene ose u Stoksovom fluidu gustine  $\rho$  i koeficijenta viskoznosti  $\eta$ . Usled rotacije cilindra u fluidu se uspostavlja stacionarno, laminarno, osno-simetrično polje brzine  $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi$  ( $z$ -osa se nalazi na osi cilindra). Jako daleko od cilindra, brzina fluida jednaka je nuli. Naći  $v(r)$ . (22 b)
4. Proton relativističke brzine  $v$  sudara se s drugim protonom koji je pre toga mirovao. Posle sudara oba protona imaju jednake intenzitete brzine. Koliki je ugao  $\theta$  između pravaca kretanja posle sudara? (18 b)

Korisne formule:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \text{grad} \left( \frac{1}{2}v^2 \right) - \vec{v} \times \text{rot}\vec{v}, \quad \Delta\vec{v} = \text{grad} \text{div}\vec{v} - \text{rot} \text{rot}\vec{v},$$

Cilindrične koordinate:

$$\text{div}\vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z,$$

$$\text{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix}, \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Napomene:

Nije dozvoljena upotreba literature. Rešenja bez obrazloženja i jasno definisanih oznaka neće biti pregledana. Ceo ispit traje 4 sata. Studenti koji su u toku nastave (na domaćim zadacima i kolokvijumima) sakupili dovoljan broj poena, mogu da rade samo treći i četvrti zadatak i za njih ispit traje 2 sata. Rezultati će biti objavljeni u sredu, 23. septembra, u 12 sati na PMF-u. Neslužbene rezultate ispita možete naći na sajtu kursa <http://www.phy.bg.ac.rs/~latas/tm/>