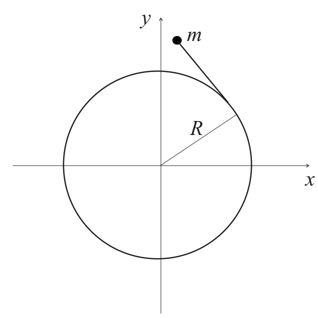
Prvi domaći zadatak iz Teorijske mehanike - 12. mart 2007.

1. Čestica mase m, na koju ne deluju spoljašnje sile, laganim neistegljivim koncem zakačena je za nepokretan cilindar radijusa R. U početku je konac bio potpuno namotan na cilindar, tako da ga je čestica dodirivala. U trenutku $t = 0$ čestici je saopštena brzina intenziteta v_0 u radijalnom pravcu, pa konac počinje da se odmotava.

   (a) (10 poena) Sastaviti lagranžijan i Lagranževu jednačinu, birajući generalisanu koordinatu na najpogodniji način.

   (b) (10 poena) Ako se kretanje čestice odvija u ravni Oxy, gde O leži na osi cilindra, a orijentacija osa je izabrana tako da se u početnom trenutku čestica nalazila na y osi, tj. u tački $(x = 0, y = R)$, naći $x(t)$ i $y(t)$.

   (c) (5 poena) Ako je ukupna dužina konca jednaka L, nakon kog vremena će se konac potpuno razmotati?

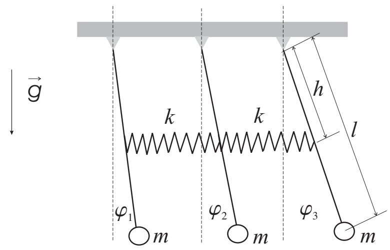
   (d) (5 poena) Izračunati intenzitet N sile zatezanja konca u proizvoljnom trenutku.

   (e) (5 poena) Izračunati moment impulsa čestice u proizvoljnom trenutku.

2. Tri ista matematička klatna, masa m i dužine l, povezana su jednakim oprugama koeficijenata elastičnosti k, kao što je pokazano na slici.

   (a) (20 poena) Rešiti problem malih oscilacija oko vertikalnog položaja ravnoteže.

   (b) (15 poena) Eksplicitnim računom izraziti lagranžijan u funkciji normalnih koordinata. Napisati Lagranževe jednačine za tako dobijeni lagranžijan.

3. Čestica mase m se pod delovanjem privlačne centralne sile kreće po kružnici, poluprečnika R, koja prolazi kroz centar sile. Intenzitet momenta impulsa čestice jednak je L.

   (a) (10 poena) Pokazati da je intenzitet sile obrnuto proporcionalan petom stepenu rastojanja čestice od centra sile.

   (b) (8 poena) Izračunati ukupnu energiju čestice.

   (c) (6 poena) Naći period kretanja čestice.

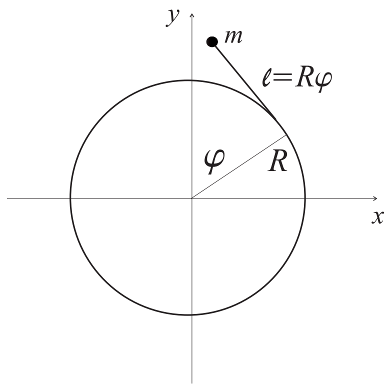
   (d) (6 poena) Ako je koordinatni sistem u ravni kretanja čestice postavljen tako da mu je početak u centru sile i da je jedan prečnik trajektorije čestice na pozitivnom delu y-ose, izraziti $\dot{x}$ i $\dot{y}$ u funkciji polarnog ugla φ.

Rešenja

1. (a) Sa slike se vidi da se koordinate čestice mogu izraziti u funkciji ugla φ kao

$$x = R(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\,, \quad y = R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)\,, \tag{1}$$

odakle je kvadrat brzine čestice jednak



$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\varphi^2\dot{\varphi}^2\,. \tag{2}$$

Pošto na česticu osim sile zatezanja konca (sila reakcije) ne deluje nikakva sila, lagranžijan je jednak kinetičkoj energiji:

$$L = \frac{1}{2}mR^2\varphi^2\dot{\varphi}^2\,, \tag{3}$$

pa Lagranževa jednačina ima oblik:

$$mR^2(\varphi^2\ddot{\varphi} + \varphi\dot{\varphi}^2) = 0\,. \tag{4}$$

(b) Iz Lagranževe jednačine trivijalno sledi jednačina $\varphi\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 = 0$, koja se smenom $\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2)$ transformiše u jednačinu

$$\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2)}{\dot{\varphi}^2} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi}\,, \tag{5}$$

iz koje se integraljenjem dobija $\dot{\varphi}\varphi = v_0/R$, gde smo iskoristili početne uslove. Poslednja jednačina još jednom može da se prointegrali, nakon čega se dobija $\varphi^2 = 2v_0t/R$, pa iz (1) sledi

$$x(t) = R\left(\sin\sqrt{2\frac{v_0}{R}t} - \sqrt{2\frac{v_0}{R}t}\cos\sqrt{2\frac{v_0}{R}t}\right)\,, \quad y(t) = R\left(\cos\sqrt{2\frac{v_0}{R}t} + \sqrt{2\frac{v_0}{R}t}\sin\sqrt{2\frac{v_0}{R}t}\right)\,. \tag{6}$$

(c) Pošto je dužina razmotanog konca l jednaka $l = R\varphi$, iz uslova $l(t) = L$, lako se nalazi da je $t = L^2/(2v_0R)$.

(d) Kako se čestica kreće pod delovanjem samo sile zatezanja konca, direktno nalazimo $N = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = m\sqrt{v_0^3/(2tR)}$.

(e) Moment impulsa čestice jednak je

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{e}_z(x\dot{y} - y\dot{x}) = -mv_0R\varphi\vec{e}_z = -mv_0R\sqrt{\frac{2v_0t}{R}}\vec{e}_z\,. \tag{7}$$

2. (a) Kinetička energija sistema jednaka je

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2)\,, \tag{8}$$

a potencijalna energija u okolini položaja $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = \varphi_3^0 = 0$ ima aproksimativni oblik

$$U = \frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \frac{1}{2}kh^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}kh^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2\,. \tag{9}$$

Za tako dobijeni lagranžijan $L = T - U$, jednačina za nalaženje normalnih frekvenci ω dobija oblik

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 ml^2 + mgl + kh^2 & -kh^2 & 0 \\ -kh^2 & -\omega^2 ml^2 + mgl + 2kh^2 & -kh^2 \\ 0 & -kh^2 & -\omega^2 ml^2 + mgl + kh^2 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{10}$$

odakle su normalne frekvence jednake

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}}\,, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2}}\,. \tag{11}$$

Za $\omega = \omega_1$ sistem za nalaženje amplituda $A_i^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$, ($\varphi_i^{(1)} = A_i^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha^{(1)})$) ima oblik

$$\begin{aligned} kh^2 A_1^{(1)} - kh^2 A_2^{(1)} &= 0\,, \\ -kh^2 A_1^{(1)} + 2kh^2 A_2^{(1)} - kh^2 A_3^{(1)} &= 0\,, \\ -kh^2 A_2^{(1)} + kh^2 A_3^{(1)} &= 0\,, \end{aligned}$$

odakle se dobija $A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = A_3^{(1)}$. Slično, rešavanjem odgovarajućeg sistema za $\omega = \omega_2$, dobijamo $A_1^{(2)} = -A_3^{(2)}$ i $A_2^{(2)} = 0$, dok za $\omega = \omega_3$ važi $A_1^{(3)} = A_3^{(3)}$ i $A_2^{(3)} = -2A_1^{(3)}$. Opšte rešenje za male oscilacije dobijamo kao linearnu kombinaciju partikularnih rešenja za $\omega = \omega_i$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}} t + \alpha_2\right) \\ &+ C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3kh^2}{ml^2}} t + \alpha_3\right)\,. \end{aligned}$$

(b) Iz definicije normalnih koordinata Q_i (videti predavanja), u ovom slučaju slede jednačine

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= Q_1 + Q_2 + Q_3\,, \\ \varphi_2 &= Q_1 - 2Q_3\,, \\ \varphi_3 &= Q_1 - Q_2 + Q_3\,, \end{aligned}$$

pa eksplicitnom zamenom φ_i i $\dot{\varphi}_i$ u lagranžijan dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \frac{3}{2} ml^2 (\dot{Q}_1^2 - \frac{g}{l} Q_1^2) + ml^2 \left(\dot{Q}_2^2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{kh^2}{ml^2}\right) Q_2^2\right) + 3ml^2 \left(\dot{Q}_3^2 - \left(\frac{g}{l} + 3\frac{kh^2}{ml^2}\right) Q_3^2\right) \\ &= \frac{3}{2} ml^2 (\dot{Q}_1^2 - \omega_1^2 Q_1^2) + ml^2 \left(\dot{Q}_2^2 - \omega_2^2 Q_2^2\right) + 3ml^2 \left(\dot{Q}_3^2 - \omega_3^2 Q_3^2\right)\,. \end{aligned}$$

Lagranževe jednačine:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 &= 0 \\ \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 &= 0 \\ \ddot{Q}_3 + \omega_3^2 Q_3 &= 0 \end{aligned}$$

3. (a) Ako je koordinatni sistem definisan kao u delu (d), onda iz jednačine trajektorije $(y-R)^2 + x^2 = R^2$ i $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ sledi da u polarnim koordinatama jednačina trajektorije ima oblik $r = 2R\sin\varphi$. Nalaženjem drugog izvoda po φ funkcije $1/r$ i zamenom u Bineov obrazac dobijamo $F(r) = -8L^2R^2/(mr^5)$. **(b)** Potencijalna energija za ovakvu silu jednaka je $U = -2L^2R^2/(mr^4)$, pa je $U_{eff} = (1-4R^2/r^2)L^2/(2mr^2)$, a ukupna energija:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{L}{mr^2}\right)^2 + U_{eff}(r) = \frac{L}{2mr^2}\left(1 - \frac{4R^2\sin^2\varphi}{r^2}\right) = 0\,.$$

(c) Pošto je sektorska brzina konstantna: $S = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = L/(2m)$, period τ je jednak: $\tau = R^2\pi/S = 2\pi R^2 m/L$.

(d) $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2R\sin\varphi\cos\varphi) = (L/2Rm)(1-2\sin^2\varphi)/\sin^2\varphi$, $\dot{y} = (4L/mR)(\cos\varphi/\sin\varphi)$