Drugi domaći zadatak iz Teorijske mehanike - 10. april 2007.

1. Dinamički simetrično kruto telo mase m slobodno se kreće. Ako se za pol izabere centar mase, glavni momenti inercije su $I_1 = I_2 \neq I_3$. Ukupna sila, kao i moment sila u odnosu na centar mase tela, jednaki su nuli.

(a) (10 poena) Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine uzimajući za generalisane koordinate Dekartove koordinate centra mase i Ojlerove uglove (za ose sopstvenog sistema krutog tela uzeti glavne ose inercije).

(b) (20 poena) Sastaviti hamiltonijan i Hamiltonove jednačine.

(c) (10 poena) Ako je $\vec{M}$ moment impulsa krutog tela u odnosu na centar mase, izračunati Poasonove zagrade: $[M_z, H]$, $[M_3, H]$ i $[M_1, M_3]$. Ovde su Dekartove ose laboratorijskog sistema označene sa x, y, z, a ose sopstvenog sistema (glavne ose inercije) sa x_1, x_2, x_3.

(d) (20 poena) Ako se z osa laboratorijskog sistema izabere u pravcu momenta impulsa krutog tela $\vec{M}$ i ako je u početnom trenutku: $\theta = \theta_0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, naći $\theta(t)$, $\varphi(t)$ i $\psi(t)$.

(e) (10 poena) Pokazati da vektori momenta impulsa $\vec{M}$, ugaone brzine krutog tela $\vec{\omega}$ i ort $\vec{e}_3$ leže u istoj ravni. Ako je α ugao između $\vec{M}$ i $\vec{e}_3$, a β ugao između $\vec{\omega}$ i $\vec{e}_3$, izraziti $\mathrm{tg}\alpha/\mathrm{tg}\beta$ u funkciji glavnih momenata inercije I_1 i I_3.

2. (30 poena) Pretpostaviti da Zemlju možemo smatrati homogenim krutim telom, koje ima oblik rotacionog elipsoida

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1\,,$$

gde je $(a - c)/a = \varepsilon \approx 1/300$. Ako se ukupni momenat spoljašnjih sila u odnosu na centar mase Zemlje može zanemariti, izračunati brzinu kojom ugaona brzina $\vec{\omega}$ Zemlje precesira oko njene x_3 ose. Uzeti da je $\omega_3 \approx 2\pi/24h$.

Rešenja

1. (a) Pošto je ukupna sila koja deluje na kruto telo jednaka nuli, lagranžijan se svodi na kinetičku energiju:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2+\dot{z}_C^2)+\frac{1}{2}\left(I_1(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi)^2+I_2((\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\psi)^2+I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2\right)\,,$$

a ako se još iskoristi i uslov $I_1 = I_2$ sledi:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2}\left(I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right)\,.$$

Lagranževe jednačine koje odgovaraju koordinatama pola trivijalno dobijaju oblik $\ddot{x}_C = 0$, $\ddot{y}_C = 0$ i $\ddot{z}_C = 0$. Pošto lagranžijan ne zavisi eksplicitno od Ojlerovih uglova ϕ i ψ, odgovarajuće Lagranževe jednačine odmah daju dva integrala kretanja:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta = C_1$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = C_2\,,$$

dok se za ugao θ dobija jednačina:

$$I_1\ddot\theta - I_1\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + I_3\dot\varphi\sin\theta(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = 0\,.$$

(b) Kako je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih koordinata, hamiltonijan je brojno jednak ukupnoj mehaničkoj energiji, u ovom slučaju samo kinetičkoj energiji, pa se nalaženje hamiltonijana svodi na izražavanje generalisanih brzina u funkciji kanonskih promenljivih u izrazu za lagranžijan. Pošto su generalisani impulsi koji odgovaraju Ojlerovim uglovima po definiciji jednaki:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\cos\theta\,,\quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\,,\quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = I_1\dot\theta\,,$$

sledi:

$$\dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\,, \dot\psi = \frac{p_\psi}{I_3} - \cos\theta\frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\,,\quad \dot\theta = \frac{p_\theta}{I_1}\,, \tag{1}$$

za hamiltonijan dobijamo izraz:

$$H = \frac{1}{2m}(p_{x_C}^2 + p_{y_C}^2 + p_{z_C}^2) + \frac{(p_\varphi - \cos\theta p_\psi)^2}{2I_1\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3}\,.$$

Hamiltonove jednačine $\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ onda imaju oblik

$$\dot p_\varphi = 0\,,\quad \dot p_\psi = 0\,,\quad \dot p_\theta = -(p_\varphi - \cos\theta p_\psi)\frac{p_\psi - \cos\theta p_\varphi}{I_1\sin^3\theta}\,,$$

$$\dot p_{x_C} = 0\,,\quad \dot p_{y_C} = 0\,,\quad \dot p_{z_C} = 0\,,$$

a jednačine $\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ se poklapaju sa jednačinama (1) i

$$\dot x_C = \frac{p_{x_C}}{m}\,,\quad \dot y_C = \frac{p_{y_C}}{m}\,,\quad \dot z_C = \frac{p_{z_C}}{m}\quad .$$

(c) Moment impulsa $\vec M$ u odnosu na centar mase jednak je $\vec M = \tilde{\mathcal{I}}\vec\omega$, pa projektovanjem ovog vektora na z odnosno x_3 osu, uzimajući u obzir izraze za komponente ugaone brzine $\vec\omega$ u sopstvenom sistemu krutog tela (videti beleške sa predavanja), dobijamo:

$$M_z = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\cos\theta = p_\varphi\,,\quad M_3 = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = p_\psi\,.$$

Pošto je u prethodnom delu zadatka pokazano da su p_φ i p_ψ integrali kretanja, sledi $[M_z, H] = 0$, $[M_3, H] = 0$. Projektovanjem izraza za moment impulsa na osu x_1 dobijamo:

$$M_1 = I_1\omega_1 = I_1(\dot\varphi\sin\psi\sin\theta + \dot\theta\cos\psi) = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}(p_\varphi - p_\psi\cos\theta) + p_\theta\cos\psi$$

pa je

$$[M_1, M_3] = \frac{\partial M_1}{\partial \psi}\frac{\partial M_3}{\partial p_\psi} = \frac{\cos\psi}{\sin\theta}(p_\varphi - p_\psi\cos\theta) - p_\theta\sin\psi\,.$$

(d) Ukupni moment spoljašnjih sila koje deluju na telo je nula, pa se ukupni moment impulsa $\vec{M}$ ne menja u toku vremena. S druge strane, komponenta M_3 impulsa je jednaka $M_3 = \vec{M}\cdot\vec{e}_3 = M\cos\theta$, pa, kako su i M i M_3 integrali kretanja, sledi da je i $\theta(t) = \mathrm{const} = \theta_0$. Dalje, iz prve jednačine u (1) zaključujemo da je

$$\dot\varphi = \frac{M - M_3\cos\theta_0}{I_1\sin^2\theta_0} = \dot\varphi_0 \;\Rightarrow\; \varphi(t) = \dot\varphi_0 t\,.$$

Slično, iz druge jednačine u (1) sledi $\dot\psi = \mathrm{const}$, odnosno $\psi(t) = \dot\psi_0 t$.

(e) Lako se eksplicitnim računom proverava da je $\vec{M}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{e}_3) = 0$, odakle direktno sledi da ova tri vektora leže u istoj ravni. Pošto je $\cos\alpha = \vec{M}\cdot\vec{e}_3/M = M_3/M$ i $\cos\beta = \omega_3/\omega$ dobija se

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\beta}}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{I_1}{I_3}\,.$$

2. Izračunajmo prvo glavne momente inercije rotacionog elipsoida. Iz simetrije je jasno da su glavne ose inercije upravo ose x_1, x_2 i x_3. Onda je

$$I_1 = \frac{m}{V}\int\int\int_V (x_2^2 + x_3^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \frac{m}{V}a^2c\int\int\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le 1}(a^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\,,$$

gde smo iskoristili smenu $x_1 = a\xi$, $x_2 = a\eta$ i $x_3 = c\zeta$. Dalje se, prelaskom na sferne koordinate u sistemu (ξ,η,ζ), dobija

$$I_1 = \frac{m}{V}a^2c\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\, r^2\sin\theta(a^2(r\sin\theta\sin\varphi)^2 + c^2(r\cos\theta)^2) = \cdots = \frac{m}{V}a^2c\frac{\pi}{5}\frac{4}{3}(a^2+c^2)$$

odnosno

$$I_1 = \frac{m}{5}(a^2+c^2) = I_2\,.$$

Na sličan način se izračunava $I_3 = \frac{2m}{5}a^2$.

Na kretanje Zemlje mogu se primeniti rezultati prethodnog zadatka, iz kog sledi da je $\omega_3 = \mathrm{const}$, a $\omega_1 = \dot\varphi_0\sin(\dot\psi_0 t)\sin\theta_0$ i $\omega_2 = \dot\varphi_0\cos(\dot\psi_0 t)\sin\theta_0$, što znači da ugaona brzina precesira oko ose x_3 brzinom $\dot\psi_0$. S druge strane, iz Ojlerovih jednačina sledi da je $\omega_3 = \frac{I_1}{I_1-I_3}\frac{1}{\omega_2}\dot\omega_1$, pa se direktnom zamenom izraza ω_1 i ω_2 u taj izraz dobija

$$\dot\psi_0 = \omega_3\frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx \omega_3\frac{a-c}{a} \approx \frac{2\pi}{300\,24h}\,,$$

a to odgovara periodu od 300 dana.