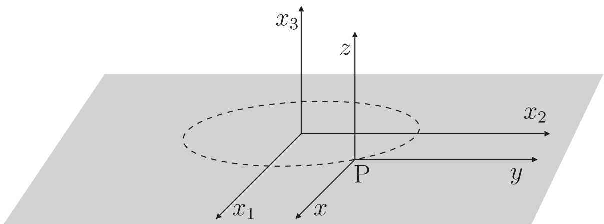
Treći domaći zadatak iz Teorijske mehanike - 21. maj

1. Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti μ ispunjava poluprostor $x_3 > 0$. Granična ravan $x_3 = 0$ rotira konstantnom ugaonom brzinom ω, tako da je položaj tačke P, koja predstavlja koordinatni početak granične ravni (sa stanovišta nepokretnog koordinatnog sistema) u proizvoljnom trenutku dat sa

$$\vec{r}(t) = R(\cos\omega t\vec{e}_1 + \sin\omega t\vec{e}_2),$$

gde je R konstanta. Koordinatne ose pokretnog i nepokretnog sistemu su u svakom trenutku paralelne.



(a) (30 poena) Zanemarujući zapreminske sile i gradijent pritiska, naći polje brzine u fluidu.

(b) (15 poena) Odrediti silu koja deluje na jedinicu površine granične ravni.

2. Električno i magnetno polje definišu se pomoću skalarnog $\varphi(t, x, y, z)$ i vektorskog potencijala $\vec{A}(t, x, y, z)$ sledećim jednačinama

$$\vec{E}(t, x, y, z) = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B}(t, x, y, z) = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Skalarni i vektorski potencijal elektromagnetnog polja formiraju kvadrivektor potencijala koji je definisan sa $A^\mu = (\varphi, c\vec{A})$.

(a) (5 poena) Napisati kako se transformišu komponenete kvadrivektora potencijala pri prelasku iz inercijalnog koordinatnog sistema S u sistem S', koji se u odnosu na S kreće konstantnom brzinom $\vec{u} = u\vec{e}_x$.

(b) (15 poena) Odrediti zakon transformacije komponenti električnog $\vec{E}$ i magnetnog $\vec{B}$ polja pri prelasku iz sistema S u S'.

(c) (10 poena) Ako u sistemu S miruje čestica naelektrisanja q, naći električno i magnetno polje koje potiče od te čestice u sistemima S i S'.

Tenzor jačine elektromagnetnog polja definisan je sa

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},$$

gde je $x^\mu = (ct, \vec{r})$ kvadrivektor položaja čestice. Lagranžijan elektromagnentnog polja je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

(d) (10 poena) Napisati komponente tenzora $F^{\mu\nu}$ preko komponenti vektora električnog i magnetnog polja.

(e) (15 poena) Predstaviti lagranžijan elektromagnetnog polja $\mathcal{L}$ preko $\vec{E}$ i $\vec{B}$ i naći kako se lagranžijan transformiše pri prelasku iz sistema S u sistem S'.

Krajnji rok za predavanje ovog domaćeg zadatka je četvrtak, 7. jun 2007. u 14:00. Prilikom izrade domaćih zadataka dozvoljeno je koristiti literaturu i tražiti pomoć. Međutim, konačna rešenja koja predajete treba da budu napisana samostalno i **svojeručno**. Identična (kopirana) rešenja neće biti bodovana.

Preporuke za rešavanje zadataka

Ukratko, ali jasno i punim rečenicama, navedite osnovne principe i jednačine na koje se pozivate pri rešavanju zadataka. Jasno definišite sve oznake koje koristite, naročito one koje nisu uobičajene. Gde god slika ili dijagram mogu da pomognu u rešavanju nacrtajte ih. Pišite čitko, a glavne rezultate uokvirite.

Rešenje trećeg domaćeg zadatka iz Teorijske mehanike

1. (a) Na osnovu simetrije, zaključujemo da polje brzine ima oblik $\vec{v} = v_1(x_3,t)\vec{e}_1 + v_2(x_3,t)\vec{e}_2$, tako da se Stoksova jednačina, uz pretpostavke zadatka, svodi na

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial t}\vec{e}_2\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\vec{e}_1 + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\vec{e}_2\right).$$

Projektovanjem ove jednačine pomoću ortova $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ dobijaju se dve jednačine istog oblika:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}, \qquad (i = 1, 2). \tag{1}$$

Ovaj tip jednačine može da se reši prelaskom na kompleksnu jednačinu

$$\rho\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x_3^2}. \tag{2}$$

Rešenje kompleksne parcijalne diferencijalne jednačine (2) se može potražiti u obliku $\hat{v} = \hat{F}(x_3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Ovde je $\hat{F}(x_3)$ nepoznata kompleksna funkcija koja zavisi samo od koordinate x_3, a pretpostavljena funkcija $\hat{v}$ zadovoljava granični uslov u $x_3 = 0$. Kompleksna funkcija $\hat{F}$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{F}}{\mathrm{d}x_3^2} - \frac{\mathrm{i}\omega\rho}{\mu}\hat{F} = 0,$$

pa je odgovarajuće rešenje

$$\hat{F}(x_3) = A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}(1+\mathrm{i})x_3\right) + B\exp\left(\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}(1+\mathrm{i})x_3\right),$$

gde su A i B kompleksne konstante. Funkcija $\hat{F}$ zadovoljava granične uslove koji su određeni graničnim uslovima za $\hat{v}$. Pošto v ne sme da divergira kada $x_3 \to \infty$, onda i $\hat{F}$ treba da bude konačno u $x_3 \to \infty$, to znači da konstanta B treba da bude 0. Prema tome, ukupno rešenje je oblika

$$\hat{v} = A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}(1+\mathrm{i})x_3\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = (A_1 + \mathrm{i}A_2)\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3\right)}, \tag{3}$$

gde su $A_1 = \mathrm{Re}A$ i $A_2 = \mathrm{Im}A$ realne konstante. Kako je jednačina (1) realni deo jednačine (2), onda je rešenje od (1) realni deo rešenja (3), iz čega se dobija

$$v_i = \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3}\left[A_{i1}\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3\right) - A_{i2}\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3\right)\right]. \tag{4}$$

Kao što se vidi, svako rešenje za svaku komponentu brzine sadrži dve konstante, koje se određuju na osnovu graničnih uslova. A ti uslovi su različiti za jednačinu (1) kada je $i = 1$ odnosno $i = 2$. Koristeći se uslovima na granici $x_3 = 0$, dobijamo da je $A_{11} = 0$, $A_{12} = -R\omega$, $A_{21} = -R\omega$ i $A_{22} = 0$, tako da je konačno

$$\vec{v} = \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3}\omega R\left[-\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3\right)\vec{e}_1 + \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu}}x_3\right)\vec{e}_2\right]. \tag{5}$$

(b) Na osnovu polja brzine (5) dobija se da je tenzor napona na graničnoj ravni

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(x_3 = 0) &= (-p\mathcal{E} + 2\mu\mathcal{V})|_{x_3=0} \\
&= \begin{pmatrix} -p & 0 & \omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t + \cos\omega t) \\ 0 & -p & \omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t - \cos\omega t) \\ \omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t + \cos\omega t) & \omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t - \cos\omega t) & -p \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vektor napona na graničnu ravan $x_3 = 0$, čiji je ort normale $\vec{n} = -\vec{e}_3$ je

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \mathcal{P}(-\vec{e}_3) = -\omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t + \cos\omega t)\vec{e}_1 - \omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t - \cos\omega t)\vec{e}_2 + p\vec{e}_3,$$

pa je tražena sila jednaka

$$\vec{F} = \int_{x_1}^{x_1+1}\int_{x_2}^{x_2+1}\vec{P}_{\vec{n}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = -\omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t + \cos\omega t)\vec{e}_1 - \omega R\sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}(\sin\omega t - \cos\omega t)\vec{e}_2 + p\vec{e}_3.$$

2. (a) Kvarivektor A^μ se transformiše kao kontravarijantan kvadrivektor $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ tako da je

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ cA'_x \\ cA'_y \\ cA'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ cA_x \\ cA_y \\ cA_z \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Ovde se koriste standardne oznake $\beta = u/c$ i $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

(b) Zakon transformacije komponenti električnog i magnetnog polja dobijamo iz Lorencovih transformacija kooridinata

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{7}$$

i komponenti kvadrivektora potencijala (6). Tako je

$$E'_x = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} - \frac{\partial\varphi'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{\partial A'_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} = \ldots = E_x, \tag{8}$$

$$E'_y = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial t'} = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} = \ldots = \frac{E_y - uB_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{9}$$

$$E'_z = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial t'} = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} = \ldots = \frac{E_z + uB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{10}$$

$$B'_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x, \tag{11}$$

$$B'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} = \frac{\partial A'_x}{\partial z} - \frac{\partial A'_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} - \frac{\partial A'_z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} = \ldots = \frac{B_y + \frac{u}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{12}$$

$$B'_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} = \frac{\partial A'_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial A'_z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y} - = \ldots = \frac{B_z - \frac{u}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{13}$$

što može da se napiše i u vektorskoj formi

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\frac{(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{u}}{u^2}, \qquad \vec{B}' = \frac{\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{u}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\frac{(\vec{u}\cdot\vec{B})\vec{u}}{u^2}.$$

(c) U sistemu S čestica naelektrisanja q miruje, tako da su električno i magnetno polje koje potiču od čestice

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r, \qquad \vec{B} = \vec{0}. \tag{14}$$

Pomoću formula (8) do (13) lako se dobija da su komponente električnog i magnetnog polja u sistemu S':

$$E'_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}x, \qquad E'_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\frac{y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad E'_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\frac{z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{15}$$

$$B'_x = 0, \qquad B'_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\frac{u}{c^2}\frac{z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad B'_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\frac{u}{c^2}\frac{y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{16}$$

(d) Komponente jačine elektromagnetnog polja $F_{\mu\nu}$ povezane su sa komponentama električnog i magnetnog polja. Pre svega, vidimo da je $F_{\mu\nu}$ antisimetričan tenzor, tako da ima samo 6 nezavisnih komponenti. Sve komponente sa jednakim indeksima su 0, a nezavisne komponente su:

$$F_{01} = -F_{10} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{c}E_x. \tag{17}$$

Slično se pokazuje da su ostale komponente $F_{02} = E_y/c$ i $F_{03} = E_z/c$. Dalje je

$$F_{12} = -F_{21} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -B_z, \tag{18}$$

odnosno $F_{23} = -B_x$ i $F_{31} = -B_y$. Koristeći antisimetričnošt tenzora F i pravilo podizanja indeksa, može se naći bilo koja vrednost tenzora F za proizvoljnu kombinaciju indeksa.

(e) Polazeći od definicije lagražijana elektomagnetnog polja i prethodnog dela zadatka, lako se dobija da je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2c^2}(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2). \tag{19}$$

Uz pomoć jednačina (8) – (13) dobija se:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2c^2}(\vec{E}'^2 - c^2\vec{B}'^2) = \ldots = \frac{1}{2c^2}(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2) = \mathcal{L},$$

iz čega sledi da je lagranžijan elektromagnetnog polja invarijanta, skalar koji se ne zavisi od izbora koordinatnog sistema.