

Prvi domaći zadatak iz Teorijske mehanike - 11. mart 2008.

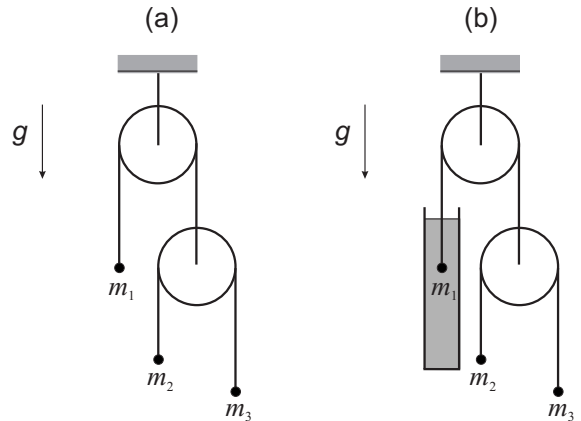
1. Modifikovana Atvudova mašina.

(a) (10 poena) Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine za sistem prikazan na slici (a). Čestice mase m_1 , m_2 i m_3 kreću se duž odgovarajućih vertikala, mase koturova preko kojih su prebačene niti za koje su zakačene čestice su zanemarljive, a niti su neistegljive i takođe zanemarljive mase.

(b) (5 poena) Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine za sistem prikazan na slici (b). Čestica mase m_1 potopljena je u posudu sa tečnošću, tako da na tu česticu od aktivnih sila osim sile gravitacije deluje i sila otpora sredine oblika $\vec{F}^* = -\gamma\vec{v}$, gde je γ zadata konstanta, a \vec{v} brzina čestice.

(c) (10 poena) Za sistem opisan u delu (b), naći konačne jednačine kretanja čestica, uzimajući da je $m_1 = 5m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = 2m$. U početnom trenutku čestice su mirovale, a položaje čestica odrediti u odnosu na njihove početne položaje.

(d) (5 poena) Pod uslovima definisanim u delu (c) odrediti sile zatezanja niti u proizvoljnom trenutku.

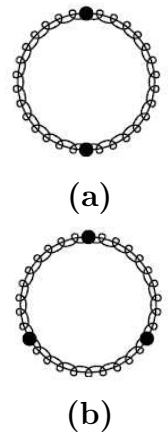


2. Opruge i čestice na prstenu.

(a) (10 poena) Dve čestice jednakih masa m mogu da se kreću po tankom prstenu poluprečnika R , koji leži nepokretno u horizontalnoj ravni. Čestice su međusobno povezane identičnim oprugama, koeficijenta elastičnosti k , kao što je pokazano na slici (a). Ako su se u početnom trenutku čestice nalazile nasuprot jedna drugoj duž istog prečnika i ako su imale iste brzine, intenziteta v_0 , naći konačne jednačine kretanja.

(b) (10 poena) Umesto dve čestice, kao u delu (a), na prstenu se nalaze tri iste čestice, međusobno povezane jednakim oprugama (slika (b)), ali je jedna od čestica fiksirana na prstenu. Rešiti problem malih oscilacija. Izraziti lagranžijan sistema u normalnim koordinatama.

(c) (20 poena) Naći konačne jednačine kretanja za sistem kao pod (b), ali kada sve tri čestice mogu da se kreću po prstenu.



3. Centralno kretanje.

(a) (15 poena) Čestica mase m kreće se u ravni Oxy po elipsi, čije su poluose a i b , tako da joj je sektorska brzina u odnosu na centar elipse konstantna i jednaka S . Naći silu koja deluje na česticu. (Uputstvo: uvesti promenljive $\xi = x/a$ i $\eta = y/b$, pa jednačinu trajektorije u ovim promenljivim prodiferencirati po vremenu itd.)

(b) (15 poena) Čestica mase m kreće se u polju konzervativne centralne sile, kojoj odgovara potencijalna energija $U(r) = -\alpha/r^\gamma$. Ako je ukupna mehanička energija čestice $E < 0$, a intenzitet momenta impulsa jednak L , naći poluprečnike kružnica koje ograničavaju površinu unutar koje leži trajektorija čestice u slučajevima $\gamma = 1, 2$ i 4 .

REŠENJA

1. (a) Ako x osu orijentišemo vertikalno naniže, sa početkom u centru gornjeg (nepokretnog) diska, a sa L_1 i L_2 označimo dužine niti (L_1 se odnosi na nit prebačenu preko gornjeg diska), odnosno poluprečnik diskova sa R , onda se sa slike vidi da x_3 koordinata čestice 3 može da se izrazi kao: $x_3 = 2L_1 + L_2 - 2\pi R - 2x_1 - x_2$. Kinetička energija sistema je onda jednaka:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2, \quad (1)$$

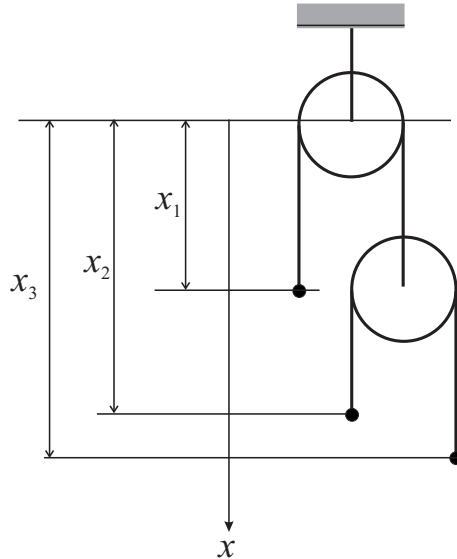
a potencijalna (koja ovde potiče samo od gravitacione sile) je:

$$U = g[(2m_3 - m_1)x_1 + (m_3 - m_2)x_2] + \text{const}. \quad (2)$$

Zamenom ovih izraza u lagranžijan $L = T - U$ i nalaženjem odgovarajućih parcijalnih izvoda, Lagranževe jednačine dobijaju sledeći oblik:

$$(m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 + g(2m_3 - m_1) = 0, \quad (3)$$

$$2m_3\ddot{x}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + g(m_3 - m_2) = 0. \quad (4)$$



(b) Ovaj slučaj razlikuje se od prethodnog samo po tome što osim gravitacione sile deluje još jedna aktivna sila: sila otpora sredine i to samo na česticu 1. Ova sila je nepotencijalna, pa se izraz za potencijalnu energiju ne menja (kao ni izraz za kinetičku energiju, pošto su veze ostale iste), a potrebno je naći odgovarajuće generalisane nepotencijalne sile Q_1^* i Q_2^* , koje se pridružuju generalisanim koordinatama x_1 i x_2 . Pošto su veze stacionarne, to može najjednostavnije da se uradi polazeći od izraza za elementarni rad koji izvrši sila otpora:

$$dA = \vec{F}^* \cdot d\vec{r}_1 = -\gamma\vec{v}_1 \cdot d\vec{r}_1 = -\gamma\dot{x}_1 dx_1,$$

odakle sledi da je $Q_1^* = -\gamma\dot{x}_1$, a $Q_2^* = 0$, pa u ovom slučaju Lagranževe jednačine imaju oblik:

$$(m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 + g(2m_3 - m_1) = -\gamma\dot{x}_1, \quad (5)$$

$$2m_3\ddot{x}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + g(m_3 - m_2) = 0. \quad (6)$$

(c) Za $m_1 = 5m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = 2m$ jednačine nađene u prethodnom delu zadatka svode se na:

$$13\ddot{x}_1 + \frac{\gamma}{m}\dot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = g, \quad (7)$$

$$2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 = g. \quad (8)$$

Ako se \ddot{x}_2 izrazi iz poslednje jednačine, pa zatim zameni u pretposlednju dobija se diferencijalna jednačina:

$$31\ddot{x}_1 + \frac{3\gamma}{m}\dot{x}_1 = -g, \quad (9)$$

iz koje direktno sledi:

$$31\dot{x}_1 + \frac{3\gamma}{m}x_1 = -gt + C_1. \quad (10)$$

Integracionu konstantu C_1 određujemo iz uslova da je u početnom trenutku čestica 1 mirovala u položaju $x_1(0)$, tako da se za nepoznatu funkciju $x_1(t)$ dobija diferencijalna jednačina prvog reda:

$$\dot{x}_1 + \frac{3\gamma}{31m}(x_1 - x_1(0)) = -\frac{g}{31}t. \quad (11)$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda, čije opšte rešenje ima oblik:

$$x_1(t) - x_1(0) = \exp\left[-\int \frac{3\gamma}{31m} dt\right] \left(\int \left(-\frac{g}{31}t\right) \exp\left[\int \frac{3\gamma}{31m} dt\right] dt + C_2\right) = C_2 e^{-kt} - \frac{g}{31k^2}(kt - 1),$$

gde je $k = \frac{3\gamma}{31m}$. Integraciona konstanta C_2 se određuje iz početnog uslova $x_1(0) = 0$, tako da je konačno

$$x_1(t) - x_1(0) = \frac{g}{31k^2} (1 - kt - e^{-kt}). \quad (12)$$

Iz nađenog izraza za $x_1(t)$, jednačine (8) i početnih uslova sledi:

$$x_2(t) - x_2(0) = \frac{1}{6}gt^2 - \frac{2}{3}(x_1(t) - x_1(0)). \quad (13)$$

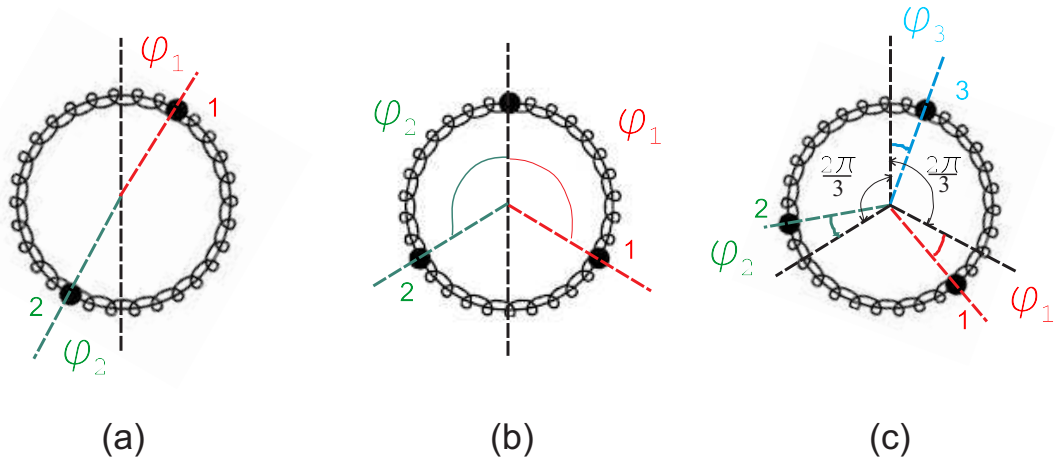
(d) Za silu zatezanja koja deluje na česticu 1 se iz II Njutnovog zakona dobija:

$$N_1 = m_1g - m_1\ddot{x}_1 - \gamma\dot{x}_1 = 5m(g - \ddot{x}_1) - \gamma\dot{x}_1 = \frac{16}{3}mg \left(1 - \frac{1}{31}e^{-kt}\right)$$

i slično za silu zatezanja konca koja deluje na česticu 2 sledi:

$$N_2 = m_2(g - \ddot{x}_2) = 4m(g - \ddot{x}_2) = \frac{8}{3}mg \left(1 - \frac{1}{31}e^{-kt}\right).$$

2. (a) Ako se za generalisane koordinate izaberu uglovi φ_1 i φ_2 , kao na slici, gde vertikalna isprekidana linija odgovara početnom položaju čestica, onda kinetička energija sistema ima oblik $T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$. Potencijalna energija sistema potiče od sile elastičnosti opruga i jednaka je: $U = \frac{1}{2}k(R\pi - R\varphi_1 + R\varphi_2 - l)^2 + \frac{1}{2}k(R\pi - R\varphi_2 + R\varphi_1 - l)^2$, gde je l dužina opruge u neistegnutom stanju.



Lagranžijan sistema je

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2}k(R\pi - R\varphi_1 + R\varphi_2 - l)^2 - \frac{1}{2}k(R\pi - R\varphi_2 + R\varphi_1 - l)^2,$$

a Lagranževe jednačine:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{2k}{m}\varphi_1 - \frac{2k}{m}\varphi_2 &= 0, \\ -\frac{2k}{m}\varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{2k}{m}\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih jednačina dobijamo jednačinu

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = C_1 = 0,$$

gde zaključak $C_1 = 0$ sledi iz zadatih početnih uslova za brzine čestica. Ako još jednom prointegralimo poslednju dobijenu jednačinu sledi:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = C_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = -\varphi_2$$

gde $C_2 = 0$ sledi iz početnih uslova za položaj čestica. Zamenom $\varphi_1 = -\varphi_2$ u prvu Lagranževu jednačinu dobijamo diferencijalnu jednačinu:

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{4k}{m}\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1(t) = K_1 \cos \sqrt{\frac{4k}{m}}t + K_2 \sin \sqrt{\frac{4k}{m}}t,$$

gde, pošto je $\varphi_1(0) = 0$, konstanta K_1 mora da bude jednaka nuli, odnosno

$$\varphi_1(t) = K_2 \sin \sqrt{\frac{4k}{m}}t.$$

Takođe, pošto je u početnom trenutku $v_0 = R\dot{\varphi}_1$ sledi da je $RK_2\sqrt{\frac{4k}{m}} = v_0$, pa se konačno dobija:

$$\varphi_1(t) = \frac{v_0}{R}\sqrt{\frac{m}{4k}}\sin\sqrt{\frac{4k}{m}}t = -\varphi_2(t).$$

(b) Uzimajući za generalisane koordinate uglove φ_1 i φ_2 pokretnih čestica, definisane kao na slici (b), kinetička energija sistema ima oblik $T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$, a potencijalna

$$U = \frac{1}{2}k(R\varphi_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(R\varphi_2 - l)^2 + \frac{1}{2}k(2\pi R - R(\varphi_1 + \varphi_2) - l)^2.$$

Kako je $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = R^2k(2\varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi)$ i $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = R^2k(2\varphi_2 + \varphi_1 - 2\pi)$, iz uslova ravnoteže $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = 0$ zaključujemo da položaju ravnoteže odgovaraju uglovi $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = 2\pi/3$. Lako se proverava da za ove vrednosti uglova potencijalna energija ima minimum, pa dalje problem malih oscilacija rešavamo uvođenjem novih koordinata $\eta_1 = \varphi_1 - \varphi_1^0$, $\eta_2 = \varphi_2 - \varphi_2^0$. Sa tako definisanim generalisanim koordinatama Lagranževe jednačine dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \frac{2k}{m}\eta_1 + \frac{k}{m}\eta_2 &= 0, \\ \frac{k}{m}\eta_1 + \ddot{\eta}_2 + \frac{3k}{m}\eta_2 &= 0, \end{aligned}$$

odakle se na standardan način za normalne frekvence dobijaju vrednosti $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ i $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, kao i opšte rešenje:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = K_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + K_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalne koordinate su $\xi_1 = K_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ i $\xi_2 = K_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$, odnosno važe relacije

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_2 = -\xi_1 + \xi_2 \Rightarrow \dot{\eta}_1 = \dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2, \quad \dot{\eta}_2 = -\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2.$$

Zamenom u prvobitni izraz za lagranžijan dobija se

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2}k\left((R\varphi_1 - l)^2 + (R\varphi_2 - l)^2 + \frac{1}{2}k(2\pi R - R(\varphi_1 + \varphi_2) - l)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}kR^2(\eta_1^2 + \eta_2^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2) = mR^2(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) - kR^2(\xi_1^2 + 3\xi_2^2) \\ &= mR^2(\dot{\xi}_1^2 - \omega_1^2\xi_1^2) + mR^2(\dot{\xi}_2^2 - \omega_2^2\xi_2^2) = L(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2). \end{aligned}$$

(c) Pošto u ovom slučaju sve tri čestice mogu da se kreću, sistem ima tri stepena slobode, pa za generalisane koordinate biramo uglove φ_1 , φ_2 i φ_3 definisane kao na slici (c). Kinetička energija sistema jednaka je $T = \frac{1}{2}m(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2)$, a potencijalna

$$U = \frac{1}{2}k\left[\left(\frac{2\pi}{3}R - R\varphi_3 + R\varphi_1 - l\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{3}R - R\varphi_1 + R\varphi_2 - l\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{3}R - R\varphi_2 + R\varphi_3 - l\right)^2\right],$$

pa Lagranževe jednačine imaju oblik:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{k}{m}(2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{k}{m}(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ \ddot{\varphi}_3 + \frac{k}{m}(-\varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_3) &= 0. \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih jednačina dobija se:

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 = C_1 \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = C_1 t + C_2, \quad (14)$$

a oduzimanjem prve dve:

$$\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 + \frac{3k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \alpha_1\right). \quad (15)$$

Slično, oduzimanjem druge i treće Lagranževe jednačine sledi:

$$\varphi_2 - \varphi_3 = C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \alpha_2\right), \quad (16)$$

tako da se konačno iz jednačina (14), (15) i (16) dobija opšte rešenje sistema Lagranževih jednačina u obliku:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = (K_1 t + K_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_3 \cos(\omega t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + K_4 \cos(\omega t + \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

gde je $K_i = C_i/3$, $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.

Komentar: Rešavajući sistem Lagranževih jednačina onako kako se to radi u slučaju standardnog problema malih oscilacija oko položaja u kome potencijalna energija ima minimum, za normalne frekvence bi se dobila vrednost $\omega = 0$ i dvostruko degenerisana vrednost $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$. Potencijalna energija, međutim, nema minimum u tački $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ i to je i razlog što se kao moguća vrednost za normalnu frekvencu dobija nula. S druge strane, pošto je ukupni moment sila koje deluju na čestice jednak nuli (zašto?), ukupni moment impulsa sistema $\vec{M} = mR^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)\vec{e}_z$ (\vec{e}_3 ort normale na ravan u kojoj leži prsten) se održava, odakle sledi $\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 = C_1$, uslov koji smo dobili i iz Lagranževih jednačina. Zakon održanja momenta impulsa je, dakle, u vezi sa postojanjem dela rešenja Lagranževih jednačina linearnog po t , koji se pojavio umesto trećeg oscilatornog rešenja, za koje bi se formalno dobila nulta frekvenca.

3. (a) Sila koja deluje na česticu jednaka je $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$. Izraz za ubrzanje uz sugerisanu smenu dobija oblik:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y = a\ddot{\xi}\vec{e}_x + b\ddot{\eta}\vec{e}_y, \quad (18)$$

a sektorska brzina

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}(xy - \dot{x}y)\vec{e}_z \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta). \quad (19)$$

S druge strane, diferenciranjem jednačine trajektorije $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u novim promenljivim dobija se:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \Rightarrow \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = 0 \Rightarrow \dot{\xi} = -\frac{\eta}{\xi}\dot{\eta} \quad (20)$$

odakle, zamenom u izraz za sektorsku brzinu, sledi:

$$S = \frac{ab}{2\xi}\dot{\eta} \Rightarrow \dot{\eta} = \frac{2S}{ab}\xi, \quad \dot{\xi} = -\frac{2S}{ab}\eta. \quad (21)$$

Diferenciranjem izraza dobijenih za $\dot{\xi}$ i $\dot{\eta}$ još jedanput po vremenu konačno se dobija izraz za ubrzanje:

$$\ddot{\vec{r}} = a\ddot{\xi}\vec{e}_x + b\ddot{\eta}\vec{e}_y = 2S \left(-\frac{\dot{\eta}}{b}\vec{e}_x + \frac{\dot{\xi}}{a}\vec{e}_y \right) = -\frac{4S^2}{(ab)^2}\vec{r}, \quad (22)$$

pa je sila koja deluje na česticu jednaka

$$\vec{F} = -\frac{4S^2m}{(ab)^2}\vec{r}. \quad (23)$$

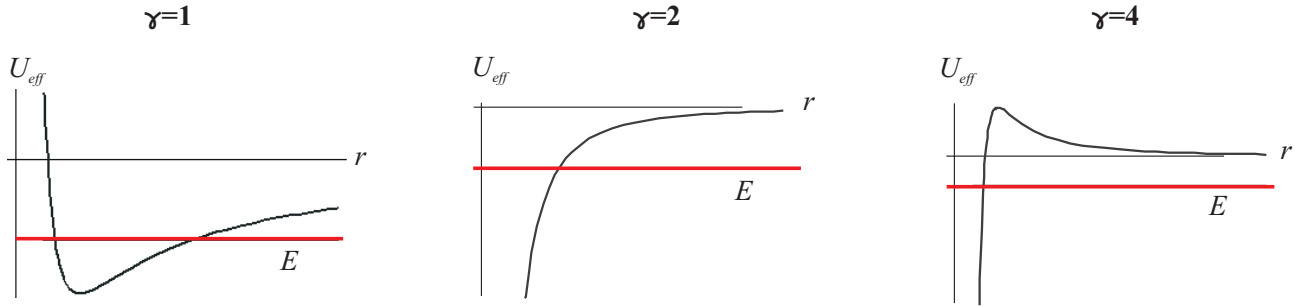
(b) Efektivna potencijalna energija U_{eff} čestice, čiji je moment impulsa L , za zadatu silu ima oblik

$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^\gamma}. \quad (24)$$

Pošto se energija $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}$ održava u toku kretanja, oblast u kojoj se odvija kretanje određena je nejednakošću $E \geq U_{\text{eff}}$, odnosno:

$$E \geq \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^\gamma}. \quad (25)$$

Grafici koji odgovaraju efektivnom potencijalu za vrednosti $\gamma = 1, 2$ i 4 skicirani su na sledećoj slici



sa koje se vidi da je za negativne vrednosti energije kretanje čestice finitno. Slika za $\gamma = 2$ nacrtana je pod pretpostavkom da je $\alpha > L^2/2m$, pošto u suprotnom nije moguće kretanje sa negativnom energijom.

U slučaju $\gamma = 1$ čestica se kreće u oblasti unutar kružnog prstena $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, gde su r_{\min} i r_{\max} manje i veće rešenje jednačine

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}, \quad (26)$$

odnosno

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{2|E|} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2L^2}{m\alpha^2}|E|} \right), \quad r_{\max} = \frac{\alpha}{2|E|} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2L^2}{m\alpha^2}|E|} \right). \quad (27)$$

Za $\gamma = 2$ i $\alpha > L^2/2m$ čestica se kreće u oblasti $r \leq \sqrt{(\alpha - L^2/2m)/|E|}$.

Za $\gamma = 4$ čestica se kreće unutar kružnice poluprečnika

$$r_0 = \sqrt{\frac{L^2}{4m|E|} \left(\sqrt{1 + \frac{16m^2\alpha}{L^2}|E|} - 1 \right)}.$$