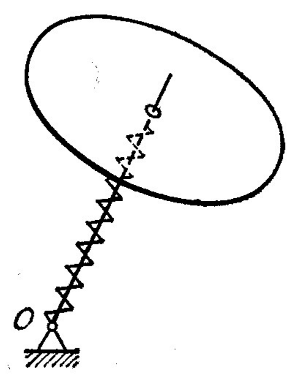
Drugi domaći zadatak iz Teorijske mehanike - 3. april 2008.

1. Problem dva tela u homogenom gravitacionom polju. (25 poena)
Dve čestice masa m_1 i m_2 povezane su oprugom zanemarljive mase, koeficijenta elastičnosti k i nominalne dužine l. Prvobitno, čestice miruju, pri čemu se čestica m_1 nalazi na visini l iznad čestice m_2. U trenutku $t = 0$, čestici m_1 saopštava se brzina intenziteta v_0, vertikalno naviše. Naći položaje čestica u proizvoljnom trenutku nakon toga.

2. Oscilacije cilindra. (30 poena)
Izračunati period malih oscilacija homogenog cilindra, poluprečnika osnove R i visine H, koji osciluje u homogenom polju Zemljine teže, oko horizontalne ose koja prolazi kroz centar osnove i polovinu izvodnice.

3. Disk na opruzi. (45 poena)
Homogeni disk radijusa R i mase m, postavljen je u svom centru normalno na lagani glatki štap, čiji je kraj fiksiran u tački O. Disk može da klizi po štapu (ostajući pod pravim uglom), pri čemu je centar diska zakačen za tačku O oprugom koeficijenta elastičnosti k i nominalne dužine l. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju, a štap može da rotira oko tačke O na proizvoljan način. Sastaviti lagranžijan, Lagranževe jednačine, hamiltonijan i Hamiltonove jednačine za ovaj sistem.



Rešenja.

1. (a) Za zadate početne uslove je jasno da će se obe čestice kretati duž vertikale na kojoj se nalaze u početnom trenutku, pa sistem u ovom slučaju može da se smatra dvodimenzionalnim. Ako se za generalisane koordinate izaberu visina centra mase, z_C, u odnosu na početni položaj čestice 2, i rastojanje između čestica, onda kinetička energija sistema ima oblik: $T = \frac{1}{2}m\dot{z}_C^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{z}^2$, gde je $m = m_1 + m_2$ ukupna masa sistema, a $\mu = m_1m_2/m$ njegova redukovana masa. Potencijalna energija sistema jednaka je $U = mgz_C + \frac{1}{2}k(z-l)^2$, pa je lagranžijan sistema

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}_C^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{z}^2 - mgz_C - \frac{1}{2}k(z-l)^2 \,. \tag{1}$$

Stavljanjem ovakvog lagranžijana u Lagranževe jednačine, dobijaju se dve raspregnute diferencijalne jednačine:

$$\ddot{z}_C = -g\,, \quad \ddot{z} + \frac{k}{\mu}z = \frac{k}{\mu}l\,, \tag{2}$$

čija su opšta rešenja:

$$z_C(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + A_1 t + A_2\,, \quad z(t) = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t + l\,, \tag{3}$$

gde je $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$. Integracione konstante A_i i B_i određuju se standardnim postupkom iz početnih uslova, tako da se konačno dobija

$$z_C(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{m_1}{m}(v_0 t + l)\,, \quad z(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + l\,. \tag{4}$$

Polazeći od izraza za visinu centra mase i relativno rastojanje između čestica u funkciji visina na kojima se čestice nalaze, z_1 i z_2:

$$z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}\,, \quad z = z_1 - z_2\,, \tag{5}$$

lako se dobijaju konačne jednačine kretanja čestica:

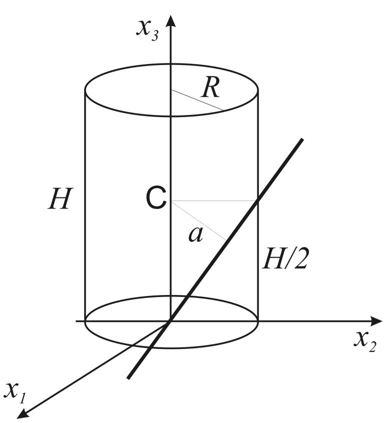
$$\begin{aligned} z_1 &= z_C + \frac{m_2}{m}z = l - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 t + v_0\frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}\sin\left(t\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}\right)\,, \\ z_2 &= z_C - \frac{m_1}{m}z = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - v_0\frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}\sin\left(t\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}\right)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

2. Ovakvo kretanje odgovara kretanju fizičkog klatna, za koje je sa predavanja poznato da je period malih oscilacija jednak

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mag}}\,, \tag{7}$$

gde je I moment inercije tela oko ose rotacije, a a najkraće rastojanje centra mase od ose. Moment inercije se najlakše nalazi pomoću formule

$$I = \vec{n}\cdot(\mathcal{I}\vec{n})\,, \tag{8}$$



gde je $\vec{n}$ ort ose rotacije, a $\mathcal{I}$ matrica tenzora rotacije računata u odnosu na koordinatni sistem, čiji je početak u centru osnove kroz koji prolazi osa rotacije, x_3 osa se poklapa sa osom cilindra, a osa x_2 leži u ravni određenoj osom cilindra i ortom $\vec{n}$ (videti sliku). Elementi matrice $\mathcal{I}$ su redom jednaki $I_{33} = \frac{1}{2}MR^2$, $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$, $I_{22} = I_{11}$, pri čemu je

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{M}{\pi R^2 H} \int\int\int_V (x_2^2 + x_3^2) \mathrm{d}V = \frac{M}{\pi R^2 H} \int_0^R r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^H \mathrm{d}z (r^2 \sin^2\varphi + z^2) \\ &= \frac{M}{\pi R^2 H} \int_0^{2\pi} \int_0^H \left(\frac{1}{4} r^4 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} r^2 z^2 \right) \Big|_{r=0}^{r=R} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \frac{M}{\pi R^2 H} \int_0^{2\pi} \int_0^H \left(\frac{1}{4} R^4 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} R^2 z^2 \right) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \\ &= \frac{M}{R^2 H} \int_0^H \left(\frac{1}{4} R^4 + R^2 z^2 \right) \mathrm{d}z = \frac{1}{12} M (3R^2 + 4H^2) \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Sa slike se vidi da je

$$\vec{n} = \frac{2R\vec{e}_2 + H\vec{e}_3}{\sqrt{4R^2 + H^2}} \,, \tag{10}$$

pa je

$$I = \frac{MR^2}{6} \frac{6R^2 + 11H^2}{4R^2 + H^2} \,. \tag{11}$$

Najkraće rastojanje a centra mase C od ose rotacije jednako je visini nad hipotenuzom pravouglog trougla čije su katete $H/2$ i R (kao što se vidi sa slike). Pošto je površina ovog pravouglog trougla jednaka $HR/4$, ali i $(a\sqrt{R^2 + H^2/4})/2$, izjednačavanjem ova dva izraza dobija se da je

$$a = \frac{HR}{\sqrt{4R^2 + H^2}} \,, \tag{12}$$

pa konačno sledi da je period malih oscilacija jednak

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{6gH} \frac{6R^2 + 11H^2}{\sqrt{4R^2 + H^2}}} \,. \tag{13}$$

3. Neka je koordinatni početak laboratorijskog sistema u tački O, sa z osom orijentisanom vertikalno naviše, a početak sopstvenog sistema diska u njegovom centru, pri čemu je x_3 osa normalna na ravan diska. Kinetička energija diska jednaka je

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} (I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2) \,, \tag{14}$$

gde je $\vec{v}_C$ brzina centra mase, tj. centra diska, $I_1 = \frac{1}{4}mR^2$ moment inercije diska oko njegovog prečnika, a $I_3 = \frac{1}{2}mR^2$ moment inercije diska oko ose x_3. Kada se komponente ugaone brzine na uobičajeni način izraze preko Ojlerovih uglova (videti beleške sa predavanja), rotacioni deo kinetičke energije dobija oblik

$$\frac{1}{4} mR^2 \left[\frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 \right] \,.$$

Ako je rastojanje centra diska od tačke O jednako x, onda je radijus-vektor centra mase diska $\vec{r}_c = x\vec{e}_3$. Sa predavanja je poznato da je

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\psi \mathcal{R}_\theta \mathcal{R}_\varphi \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \,, \tag{15}$$

gde su $\mathcal{R}_\psi$, $\mathcal{R}_\theta$ i $\mathcal{R}_\varphi$ matrice koje odgovaraju uzastopnim rotacijama kojima se sistem osa laboratorijskog sistema prevodi u sistem sopstvenih osa, tj.

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

pa je odatle

$$\vec{e}_3 = \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_x - \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z\,. \tag{17}$$

Brzina centra mase $\vec{v}_C$ je onda jednaka

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \dot{x}\vec{e}_3 + x\dot{\vec{e}}_3 = \vec{e}_x[x(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta) + \dot{x}\sin\theta\sin\varphi] \\ &+ \vec{e}_y[x(-\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi + \dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta) - \dot{x}\sin\theta\cos\varphi] + \vec{e}_z(\dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta)\,, \end{aligned} \tag{18}$$

pa je kvadrat brzine centra diska

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + x^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,,$$

tako da se za ukupnu kinetičku energiju dobija izraz

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + x^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)] + \frac{1}{4}mR^2\left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]. \tag{19}$$

Potencijalna energija je jednaka

$$U = mgx\cos\theta + \frac{1}{2}k(x-l)^2\,, \tag{20}$$

pa je lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + x^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)] + \frac{1}{4}mR^2\left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right] - mgx\cos\theta - \frac{1}{2}k(x-l)^2\,. \tag{21}$$

Dalje se standardnim postupkom dobijaju Lagranževe jednačine:

$$m\ddot{x} - mx(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mg\cos\theta + k(x-l) = 0\,, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mR^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\right) = 0\,, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta + m(x^2 + \frac{1}{4}R^2)\dot{\varphi}\sin^2\theta\right) = 0 \tag{24}$$

i

$$\ddot{\theta}(x^2 + \frac{1}{4}R^2) + 2x\dot{x}\dot{\theta} - x^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - gx\sin\theta + \frac{1}{4}R^2\sin\theta(\dot{\varphi}^2\cos\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}) = 0\,. \tag{25}$$

Kinetička energija je homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, pa je hamiltonijan brojno jednak ukupnoj mehaničkoj energiji. Lako se proverava da su generalisani impulsi dati izrazima:

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x}\,, \quad p_\psi = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\,, \\ p_\varphi &= m\left\{\dot{\varphi}\left[x^2\sin^2\theta + \frac{1}{4}R^2(1+\cos^2\theta)\right] + \frac{1}{2}\dot{\psi}R^2\cos\theta\right\}, \\ p_\theta &= m\left(x^2 + \frac{1}{4}R^2\right)\dot{\theta}\,, \end{aligned} \tag{26}$$

odakle se generalisane brzine u funkciji generalisanih impulsa izražavaju kao:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{p_x}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(x^2+R^2/4)}, \\
\dot{\varphi} &= \frac{4}{m}\frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{2(R^2+2x^2)\sin^2\theta - R^2}, \\
\dot{\psi} &= \frac{4}{m}\frac{-\cos\theta p_\varphi + \frac{2}{R^2}\left[x^2\sin^2\theta + \frac{R^2}{4}(1+\cos^2\theta)\right]p_\psi}{2(R^2+2x^2)\sin^2\theta - R^2}, \qquad (27)
\end{aligned}
$$

pa se za hamiltonijan dobija funkcija

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m(x^2+\frac{R^2}{4})} + \frac{p_\psi^2}{mR^2} + \frac{8}{m}\frac{(x^2+\frac{R^2}{4})\sin^2\theta}{[2\sin^2\theta(R^2+2x^2)-R^2]^2}(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2 \\
&+ mgx\cos\theta + \frac{1}{2}k(x-l)^2. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Prve četiri Hamiltonove jednačine ($\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$) se poklapaju sa jednačinama (27), a jednačine $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ se svode na: $\dot{p}_\varphi = \dot{p}_\psi = 0$ i

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_x &= \frac{xp_\theta^2}{m(x^2+\frac{R^2}{4})} - mg\cos\theta - k(x-l) + \frac{2x\left(R^2+4x^2\sin^2\theta\right)}{\left[-R^2+2\,(R^2+2\,x^2)\,\sin^2\theta\right]^3}, \\
\dot{p}_\theta &= mgx\sin\theta + \frac{8}{m}\sin\theta\left(x^2+\frac{R^2}{4}\right)\times \\
&\times(p_\psi\cos\theta - p_\varphi)\frac{-2p_\varphi\cos\theta[R^2+x^2+2\sin^2\theta(R^2+2x^2)] + 2p_\psi(R^2+4x^2\sin^2\theta)}{\left[-R^2+2\,(R^2+2\,x^2)\,\sin^2\theta\right]^3}
\end{aligned}
$$