Treći domaći zadatak iz Teorijske mehanike - 22. maj 2008.

1. Stacionarno strujanje Stoksovog fluida kroz cev. (40 poena) Kroz jako dugačku nepokretnu cilindričnu cev, čiji poprečni presek ima oblik elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,,$$

pod delovanjem konstantnog gradijenta pritiska $\mathrm{grad}p = K\vec{e}_z$ u pravcu ose cilindra, stacionarno i laminarno teče Stoksov fluid, koeficijenta viskoznosti η i gustine ρ. Pretpostavljajući da zapreminske sile mogu da se zanemare, kao i da polje brzine ima oblik

$$\vec{v} = C\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\vec{e}_z \,,$$

(a) odrediti konstantu C; **(b)** izračunati protok kroz poprečni presek cevi (uputstvo: uvesti smenu promenljivih $x = ar\cos\theta$ i $y = br\sin\theta$); **(c)** izračunati silu viskoznog trenja kojom fluid deluje na jediničnu dužinu cevi.

2. Relativističko loptanje. (20 poena) Svemirski brod, sopstvene dužine L, kreće se brzinom $c/2$ u odnosu na Zemlju. Sa njegovog zadnjeg kraja bačena je lopta brzinom $c/3$ u smeru kretanja broda. Koliko rastojanje pređe lopta pre nego što udari u prednji kraj broda i koliko traje njen let u sistemu vezanom za: **(a)** brod, **(b)** Zemlju, **(c)** loptu?

3. Relativistički oscilator. (20 poena) Čestica sopstvene mase m kreće se duž x-ose pod delovanjem sile $f = -m\omega^2 x$, gde je ω zadata konstanta. Ako se u trenutku $t = 0$ čestica nalazila u tački $x = b$ i imala brzinu $v = 0$, naći zavisnost intenziteta brzine od koordinate x u proizvoljnom trenutku. Uveriti se da se u slučaju $\omega b \ll c$ dobija izraz koji odgovara nerelativističkom linearnom harmonijskom oscilatoru.

4. Kvadrivektori. (20 poena) Dve čestice istih sopstvenih masa M kreću se brzinom istog intenziteta V u odnosu na Zemlju, duž iste prave, ali u suprotnim smerovima. Kolika je ukupna energija ovakvog sistema u odnosu na Zemlju? Kolika je energija svake od čestica u i inercijalnom sistemu koji se u odnosu na Zemlju kreće brzinom u u pravcu i smeru jedne od čestica? Da li je ukupna energija sistema veća u ovom sistemu ili u sistemu vezanom za Zemlju?

Rešenja **1. (a)** Pošto je

$$\Delta\vec{v} = \vec{e}_z\Delta v = \vec{e}_z\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = -2C\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\vec{e}_z \,, \tag{1}$$

i $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = 0$, zamenom u Stoksovu jednačinom, iz njene projekcije na z–osu, direktno sledi vrednost konstante C:

$$C = -\frac{K}{2\eta}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \,. \tag{2}$$

(b) Protok kroz poprečni presek cevi jednak je

$$Q = \rho\int_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \rho\int_S v\mathrm{d}S$$

gde je S površina elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Sa predloženom smenom promenljivih dalje se dobija

$$Q=\rho C\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,(1-r^2)abr=\frac{1}{2}\pi\rho abC\,.$$

(c) Iz oblika polja brzine jasno je da su svi parcijalni izvodi $v_1=v_x$ i $v_2=v_x$ komponente brzine jednaki nuli, kao i da $\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$, tako da je tenzor brzine deformacije reprezentovan matricom:

$$\mathcal{V}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial x}\\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0\end{pmatrix}=\frac{K}{2\eta(a^2+b^2)}\begin{pmatrix}0 & 0 & b^2x\\ 0 & 0 & a^2y\\ b^2x & a^2y & 0\end{pmatrix}\,. \tag{3}$$

Vektor napona koji deluje na elementarnu površinu, čiji je ort normale $\vec{n}$, jednak je $\vec{P}_{\vec{n}}=(-p\mathcal{I}+2\eta\mathcal{V})\vec{n}$. Ort normale na površinu cevi najlakše se određuje pomoću gradijenta funkcije $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$, pošto jednačina $F(x,y,z)=0$ predstavlja jednačinu površine cevi. Na taj način je

$$\vec{n}=\frac{\mathrm{grad}F(x,y,z)}{|\mathrm{grad}F(x,y,z)|}\,,$$

pa je

$$\vec{n}=-\frac{\frac{x}{a^2}\vec{e}_x+\frac{y}{b^2}\vec{e}_y}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}}\,,$$

gde je znak minus uzet pošto tečnost "iznutra" deluje na zid cevi. Sila viskoznosti po jedinici površine jednaka je tangencijalnoj komponenti napona, pa je sila viskoznosti koja deluje na jediničnu dužinu cevi

$$\vec{F}_{visk}=\int_S(2\eta\mathcal{V})\vec{n}\,\mathrm{d}S\,,$$

gde je $\mathrm{d}S$ elementarna površina na cevi, a S je površina odsečka cevi jedinične dužine. Jano je da je $\mathrm{d}S=\mathrm{d}z\mathrm{d}l$, gde je $\mathrm{d}l$ dužina elementarnog luka elipse, tj.

$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}\,.$$

Ako ponovo iskoristimo predloženu smenu promenljivih elementarna površina postaje

$$\mathrm{d}S=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,,$$

a tražena sila viskoznosti

$$\vec{F}_{visk}=-\vec{e}_z\,\frac{Kab}{a^2+b^2}\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)=-\pi Kab\vec{e}_z\,.$$

2. (a) U sistemu vezanom za brod lopta pređe rastojanje L krećući se brzinom $c/3$, pa joj je za to potrebno vreme $t=3L/c$.
(b) U sistemu vezanom za Zemlju, u skladu sa formulom za kontrakciju dužine, brod ima dužinu $L_z=L\sqrt{1-u^2/c^2}=L\sqrt{3}/2$, pošto je brzina broda u odnosu na Zemlju jednaka $u=c/2$. S druge

strane, relativna brzina lopte u odnosu na Zemlju je, prema relativističkom zakonu slaganja brzina, jednaka

$$v = \frac{\frac{c}{3} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{\frac{c}{2}\frac{c}{3}}{c^2}} = \frac{5}{7}c\,.$$

Pošto je, gledano sa Zemlje, rastojanje koje lopta pređe jednako

$$d = L_z + \frac{c}{2}t = vt\,,$$

gde je t vreme leta lopte, takođe u sistemu vezanom za Zemlju, zamenom izraza za L_z i v dobija se

$$t = \frac{L}{c}\frac{7\sqrt{3}}{3} \qquad \text{i} \qquad d = L\frac{5\sqrt{3}}{3}\,.$$

(c) U sopstvenom sistemu lopta miruje, tj. ne prelazi nikakvo rastojanje, ali joj se zadnji kraj broda približava brzinom $c/3$ i pređe ukupno rastojanje

$$L_L = L\sqrt{1 - \left(\frac{c/3}{c}\right)^2} = L\frac{2\sqrt{2}}{3}\,,$$

pre nego što stigne do nje. Odatle je odgovarajuće vreme u sistemu vezanom za loptu jednako:

$$t = \frac{L_L}{\frac{c}{3}} = 2\sqrt{2}\frac{L}{c}\,.$$

3. Zadatak se najlakše rešava pomoću jednačine koja opisuje promenu relativističke energije:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\cdot\vec{v}\,,$$

koja se u ovom slučaju svodi na jednačinu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}\right) = -m\omega^2 x\dot{x}\,.$$

Pošto je $x\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}x^2)$ iz prethodne jednačine direktno sledi

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \mathrm{const} = mc^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 b^2\,,$$

gde je integraciona konstanta određena iz početnih uslova. Odatle se elementarnim računom dobija intenzitet brzine u funkciji koordinate:

$$|\dot{x}| = \omega\sqrt{b^2 - x^2}\frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4c^2}(b^2 - x^2)}}{1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)}\,.$$

U slučaju $\omega b \ll c$ aproksimativno se dobija

$$\frac{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4c^2}(b^2-x^2)}}{1+\frac{\omega^2}{2c^2}(b^2-x^2)} = \frac{(1+\frac{\omega^2 b^2}{4c^2}(1-\frac{x^2}{b^2}))^{1/2}}{1+\frac{\omega^2 b^2}{2c^2}(1-\frac{x^2}{b^2})} \approx 1\,,$$

pa je $|\dot{x}| \approx \omega\sqrt{b^2-x^2}$. S druge strane, za nerelativistički linearni harmonijski oscilator iz zakona održanja energije takođe sledi:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \;\Rightarrow\quad |\dot{x}| = \omega\sqrt{b^2-x^2}\,.$$

4. U sistemu vezanom za Zemlju čestice imaju istu energiju $E_1 = E_2 = Mc^2/\sqrt{1-V^2/c^2}$, pa je ukupna energija jednaka

$$E = E_1 + E_2 = \frac{2Mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

4-vektori impulsa šectica u sistemu vezanom za Zemlju imaju oblik

$$P_1 = \begin{pmatrix} E_1/c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} E_1/c \\ -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gde je x osa orijentisana u smeru kretanja čestice 1, a $p = MV/\sqrt{1-V^2/c^2}$. U sistemu koji se u odnosu na Zemlju kreće brzinom u u pravcu i smeru kretanja prve čestice, 4-vektori impulsa čestica se dobijaju primenom Lorencove transformacije

$$P_1' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1/c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1/c \\ -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gde je $\beta = \frac{u}{c}$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Pošto su vremenske komponente 4-vektora impulsa uvek jednake E/c, odatle direktno slede izrazi za energije čestica u sistemu koji se kreće u odnosu na Zemlju:

$$E_1' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{1-\frac{uV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad E_2' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{1+\frac{uV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

pa je ukupna energija u ovom sistemu jednaka

$$E' = E_1' + E_2' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{2Mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \gamma E \;\Rightarrow\quad E' > E\,.$$