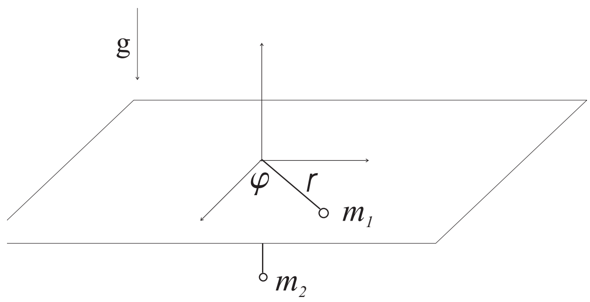
PRVI KOLOKVIJUM IZ TEORIJSKE MEHANIKE - 2. APRIL 2007.

Dve čestice, masa m_1 i m_2, povezane laganim neistegljivim koncem, kreću se u homogenom gravitacionom polju, pri čemu se tačka mase m_1 stalno nalazi na glatkom horizontalnom stolu, a tačka mase m_2 visi na drugom kraju konca, koji je provučen kroz mali otvor na stolu (vidi sliku). Smatrajući da se tačka m_2 kreće samo po vertikali, ovaj sistem može da se razmatra kao sistem sa dva stepena slobode.



1. (25 poena) Uzimajući za generalisane koordinate polarne koordinate r i φ u ravni stola (koordinatni početak se poklapa sa otvorom na stolu), formirati lagranžijan i Lagranževe jednačine.
2. (12 poena) Polazeći od Lagranževih jednačina, pokazati da $r(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu oblika $\ddot{r} = f(r)$. Kakav oblik ima funkcija $f(r)$?
3. (25 poena) Pokazati da se iz jednačine dobijene u prethodnom delu zadatka može dobiti integral kretanja koji je ekvivalentan zakonu održanja ukupne mehaničke energije sistema.
4. (13 poena) Pokazati da je moguće takvo kretanje sistema pri kome je $r = r_0 = \text{const}$. Čemu je jednaka ukupna energija sistema u tom slučaju? Uzeti da je ukupna dužina konca l.
5. (25 poena) Uvođenjem nove koordinate $\eta = r - r_0$, $|\eta| \ll r_0$, linearizovati jednačinu $\ddot{r} = f(r)$ i pokazati da je kružna trajektorija $r = r_0$ stabilna. Kolika je frekvenca odgovarajućih malih oscilacija?

REŠENJE

1. Kinetička energije čestice koja se kreće u ravni je $T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$, a potencijalna jednaka nuli, dok je za česticu koja se kreće po vertikali kinetička energija jednaka $T_2 = \frac{m_2}{2}\dot{r}^2$, a potencijalna: $U_2 = -m_2 g(l - r)$. Onda je lagranžijan $L = T_1 + T_2 - U_2$ jednak

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 g r + m_2 g l \,. \tag{1}$$

Vidi se da je φ ciklična koordinata, tako da se odgovarajuća Lagranževa jednačina svodi na integral kretanja

$$m_1 r^2 \dot{\varphi} = M = \text{const}\,, \tag{2}$$

koji je je ekvivalentan zakonu održanja momenta impulsa sistema. Koordinati r odgovara jednačina:

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 r \dot{\varphi}^2 + m_2 g = 0\,. \tag{3}$$

2. Zamenom $\dot{\varphi} = M/(m_1 r^2)$ iz jednačine (1) u jednačinu (3) direktno se dobija jednačina oblika $\ddot{r} = f(r)$, gde je

$$f(r) = \frac{M^2}{m_1(m_1+m_2)}\frac{1}{r^3} - \frac{m_2 g}{m_1+m_2}\,. \tag{4}$$

3. Pošto je $\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right)$ iz jednačine dobijene u prethodnom delu zadatka sledi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right) = f(r) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \int f(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\frac{M^2}{m_1(m_1+m_2)}\frac{1}{r^2} - \frac{m_2 g r}{m_1+m_2} + C\,, \tag{5}$$

odakle je integraciona konstanta C jednaka

$$C = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m_1(m_1+m_2)}\frac{1}{r^2} + \frac{m_2 g r}{m_1+m_2}\,. \tag{6}$$

S druge strane, ukupna mehanička energija jednaka je

$$E = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\varphi}^2 + m_2 g r - m_2 g l = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r - m_2 g l\,, \tag{7}$$

pa je $E = C(m_1+m_2) - m_2 g l$, tj. dobijeni integral kretanja zaista je ekvivalentan zakonu održanja ukupne energije.

4. Stavljajući $r = r_0$ u jednačinu $\ddot{r} = f(r)$ dobijamo algebarsku jednačinu

$$\frac{M^2}{m_1(m_1+m_2)}\frac{1}{r^3} = \frac{m_2}{m_1+m_2}g\,, \tag{8}$$

koja ima pozitivno rešenje

$$r_0 = \left(\frac{M^2}{m_1 m_2 g}\right)^{1/3}\,,$$

što znači da je ovakvo kretanje moguće.

5. Zamenom $r^{-3} \approx r_0^{-3}(1 - 3\eta/r_0)$ i vrednosti r_0, dobijene u prethodnom delu zadatka, u jednačinu $\ddot{r} = f(r)$ dobija se jednačina

$$\ddot{\eta} + \frac{3}{r_0}\frac{m_2}{m_1+m_2}g\eta = 0\,,$$

čije opšte rešenje ima oblik $\eta(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$, gde je

$$\omega = \sqrt{\frac{3m_2 g}{(m_1+m_2)r_0}}\,,$$

što znači da kružna putanja jeste stabilna, tj. ako dođe do male perturbacije nova trajektorija će oscilovati oko nje sa frekvencom ω.