Prvi kolokvijum iz TEORIJSKE MEHANIKE
3. april 2008.

Materijalna tačka mase m kreće se po površini glatkog nepokretnog kružnog konusa čiji je vrh centar privlačne sile obrnuto proporcionalne kubu rastojanja r od njega:

$$\vec{F} = -\frac{k^2 m}{r^3}\vec{e}_r\,,$$

gde je k zadata realna konstanta, a $\vec{e}_r = \vec{r}/r$. Ugao između ose konusa i njegove izvodnice je α.

1. (40 poena) Uzimajući za generalisane koordinate sferne koordinate r i φ, u sistemu u kome se ugao θ definiše u odnosu na osu konusa, sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine.

2. (30 poena) Naći $r(t)$ za proizvoljne početne uslove.

3. (30 poena) Kakva treba da bude početna brzina čestice da bi se ona u svakom trenutku nalazila na rastojanju r_0 od vrha konusa? Kolika je sila reakcije konusa u tom slučaju?

Rešenja

1. Pošto je kinetička energija čestice jednaka:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\varphi})^2\,,$$

gde je iskorišćena veza $\theta = \alpha$, a potencijalna: $U = -\frac{k^2 m}{2r^2}$, lagranžijan je:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 + \frac{k^2}{r^2}\right)\,, \tag{1}$$

pa se Lagranževe jednačine svode na sledeći oblik:

$$\ddot{r} - r^2\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2 + \frac{k^2}{r^3} = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\sin^2\alpha\dot{\varphi}\right) = 0 \;\Rightarrow\quad r^2\dot{\varphi} = \text{const} = r_0^2\dot{\varphi}_0\,, \tag{3}$$

gde su indeksom "0" označene početne vrednosti odgovarajućih veličina.

2. Ako se $\dot{\varphi}$ izrazi iz druge Lagranževe jednačine i zameni u prvu, sledi diferencijalna jednačina:

$$\ddot{r} + \frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r^3} = 0\,, \tag{4}$$

iz koje se dalje dobija:

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right) = -\frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r^3} \Rightarrow \tag{5}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r^2} + \dot{r}_0^2 - \frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r_0^2} \Rightarrow \tag{6}$$

$$\frac{r r_0 \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2(\dot{r}_0^2 r_0^2 - A) + A r_0^2}} = \mathrm{d}t\,, \quad A = k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{\left(\dot{r}_0 r_0^2 + \frac{\dot{r}_0^2 r_0^2 - A}{r_0} t\right)^2 - A r_0^2}{\dot{r}_0^2 r_0^2 - A}} \tag{8}$$

3. Ako se u jednačinu (4) zameni uslov $r = r_0$ sledi

$$\dot{\varphi}_0 = \pm \frac{k}{r_0^2 \sin \alpha}\,,$$

što znači da početna brzina treba da bude oblika:

$$\vec{v}_0 = \dot{r}_0 \vec{e}_r + r_0 \sin\alpha \dot{\varphi}_0 \vec{e}_\varphi = \pm \frac{k}{r_0} \vec{e}_\varphi\,.$$

Sila reakcije $\vec{N}$ sigurno ima pravac orta $\vec{e}_\theta$ i može se naći iz II Njutnovog zakona:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{k^2 m}{r_0^3}\vec{e}_r + \vec{N} \Rightarrow \vec{N} = m\vec{a} + \frac{k^2 m}{r_0^3}\vec{e}_r\,.$$

Pošto je $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0$, množenjem poslednje jednačine skalarno ortom $\vec{e}_\theta$ dobijamo intenzitet sile reakcije kao:

$$|\vec{N}| = m|\vec{a} \cdot \vec{e}_\theta|\,.$$

Ubrzanje $\vec{a}$ nalazimo diferenciranjem brzine $\vec{v} = v_0\vec{e}_\varphi$ po vremenu, odnosno ovde može i odmah da se primeni poznati izraz za centripetalno ubrzanje, pošto se čestica kreće ravnomerno po krugu poluprečnika $r_0 \sin\alpha$, pa je:

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r_0 \sin\alpha}\vec{e}_\rho \,,$$

gde je $\vec{e}_\rho$ odgovarajući cilindrični ort. S druge strane je $\vec{r} = \vec{e}_z r_0 \cos\alpha + \vec{e}_\rho r_0 \sin\alpha$, pa je

$$\vec{a} = -\frac{k^2}{r_0^4 \sin^2\alpha}(\vec{r} - r_0 \cos\alpha \vec{e}_z) \,,$$

odakle se konačno dobija:

$$|\vec{N}| = \frac{mk^2}{r_0^3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \,,$$

gde je iskorišćena i relacija $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = -\sin\alpha$.