Prvi kolokvijum iz TEORIJSKE MEHANIKE
30. mart 2009.

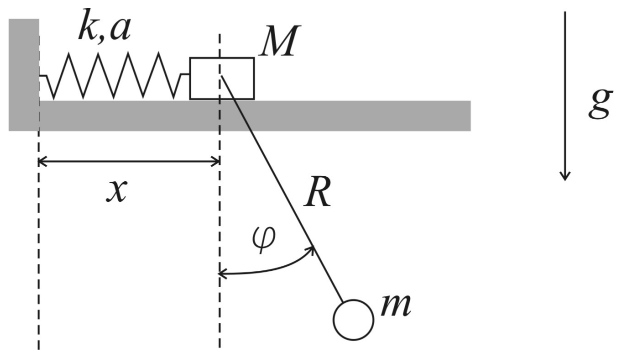
Materijalna tačka mase M kreće se po horizontalnoj pravoj, pri čemu je oprugom, koeficijenta elastičnosti k i nominalne dužine a, vezana za vertikalan zid. Na ovu tačku zakačeno je matematičko klatno, mase m i dužine R.

1. (40 poena) Uzimajući za generalisane koordinate rastojanje x tela M od vertikalnog zida i ugao φ otklona matematičkog klatna od vertikale, sastaviti lagranžijan i napisati Lagranževe jednačine.

2. (10 poena) Sastaviti diferencijalne jednačine kretanja ako pored gravitacione i elastične sile na tela deluje i sila otpora sredine, oblika $-\gamma\vec{v}$, gde je γ zadata konstanta (ista za obe materijalne tačke).

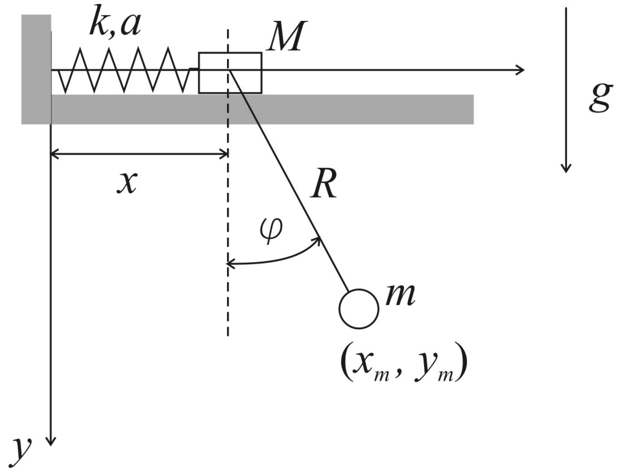
3. (25 poena) U slučaju kada je $M = m$ i $\gamma = 0$, naći normalne frekvence malih oscilacija oko stabilnog položaja ravnoteže.

4. (25 poena) U slučaju kada je $M = m$, $\gamma = 0$ i $k/m = g/R$ naći konačne jednačine kretanja za proizvoljne početne uslove pri kojima dolazi do malih oscilacija (tj. naći opšte rešenje problema malih oscilacija).



Napomene: Izrada zadatka traje 120 minuta. Nije dozvoljena upotreba nikakve literature. Rešenja bez obrazloženja i jasno definisanih oznaka NEĆE BITI PREGLEDANA.

Rešenje



1. Dekartove koordinate matematičkog klatna su

$$x_m = x + R\sin\varphi\,, \quad y_m = R\cos\varphi\,,$$

odakle je

$$\dot{x}_m = \dot{x} + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,, \quad \dot{y}_m = -R\dot{\varphi}\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad v_m^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\,,$$

pa je kinetička energija sistema jednaka

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi)\,.$$

Potencijalna energija sistema je

$$U = \frac{1}{2}k(x-a)^2 - mgR\cos\varphi\,,$$

pa je lagranžijan

$$\boxed{L = T - U = \tfrac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) - \tfrac{1}{2}k(x-a)^2 + mgR\cos\varphi\,.}$$

Odatle sledi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (M+m)\dot{x} + mR\dot{\varphi}\cos\varphi \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + mR\ddot{\varphi}\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,,\\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -k(x-a)\,,\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m(R^2\dot{\varphi} + R\dot{x}\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(R^2\ddot{\varphi} + R\ddot{x}\cos\varphi - R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi)\,,\\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mR\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi - mgR\sin\varphi
\end{aligned}$$

pa su Lagranževe jednačine

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{(M+m)\ddot{x}+mR\ddot{\varphi}\cos\varphi-mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi+k(x-a)=0}\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{R\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0}
\end{aligned}\tag{1}$$

2. Lagranževe jednačine u ovom slučaju imaju oblik

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x} &= {Q_x}^*,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= {Q_\varphi}^*,
\end{aligned}$$

gde su ${Q_x}^*$ i ${Q_\varphi}^*$ generalisane sile koje odgovaraju redom koordinatama x i φ, a potiču od sile otpora. Ove generalisane sile su po definiciji jednake

$$\begin{aligned}
{Q_x}^* &= \vec{F}_M\cdot\frac{\partial \vec{r}_M}{\partial x}+\vec{F}_m\cdot\frac{\partial \vec{r}_m}{\partial x}=-\gamma\vec{v}_M\cdot\frac{\partial \vec{r}_M}{\partial x}-\gamma\vec{r}_m\cdot\frac{\partial \vec{r}_m}{\partial x}\\
&= -\gamma(\vec{v}_M\cdot\vec{e}_x+\vec{v}_m\cdot\vec{e}_x)=-\gamma(2\dot{x}+R\dot{\varphi}\cos\varphi)\,,\\
{Q_\varphi}^* &= \vec{F}_M\cdot\frac{\partial \vec{r}_M}{\partial \varphi}+\vec{F}_m\cdot\frac{\partial \vec{r}_m}{\partial \varphi}=-\gamma\vec{v}_M\cdot\frac{\partial \vec{r}_M}{\partial \varphi}-\gamma\vec{r}_m\cdot\frac{\partial \vec{r}_m}{\partial \varphi}=-\gamma\vec{r}_m\cdot\frac{\partial \vec{r}_m}{\partial \varphi}\\
&= -\gamma\left(\dot{x}_m\frac{\partial x_m}{\partial \varphi}+\dot{y}_m\frac{\partial y_m}{\partial \varphi}\right)=-\gamma[(\dot{x}+R\dot{\varphi}\cos\varphi)R\cos\varphi+(-R\dot{\varphi}\sin\varphi)(-R\sin\varphi)]\\
&= -\gamma R(\dot{x}\cos\varphi+R\dot{\varphi})\,,
\end{aligned}$$

tako da sistem diferencijalnih jednačina kretanja, kada postoji sila otpora, ima oblik

$$\boxed{\begin{gathered}
(M+m)\ddot{x}+mR\ddot{\varphi}\cos\varphi-mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi+k(x-a)=-\gamma(2\dot{x}+R\dot{\varphi}\cos\varphi),\\
m(R\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi)=-\gamma(\dot{x}\cos\varphi+R\dot{\varphi}).
\end{gathered}}$$

3. Kada je $M=m$ i $\gamma=0$ Lagranževe jednačine (1) se svode na sistem

$$\begin{gathered}
2\ddot{x}+R\ddot{\varphi}\cos\varphi-R\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\tfrac{k}{m}(x-a)=0,\\
R\ddot{\varphi}+\ddot{x}\cos\varphi+g\sin\varphi=0.
\end{gathered}$$

Zamenom $x=\text{const}=x_0$ i $\varphi=\text{const}=\varphi_0$ u ovaj sistem dobijamo jednačine

$$\frac{k}{m}(x-a)=0\,,\quad g\sin\varphi=0\,,$$

iz kojih direktno sledi da ravnoteži odgovara položaj definisan vrednostima $x_0=a$ i $\varphi_0=0$. Pošto je

$$\frac{\partial U}{\partial x}=k(x-a)\,,\quad \frac{\partial U}{\partial \varphi}=mgR\sin\varphi\,,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=k\,,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial \varphi}=0\,,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=mgR\cos\varphi\,,$$

u ravnotežnom položaju su zadovoljeni uslovi

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(a,0)}=0\,,\quad \left.\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right|_{(a,0)}=0\,,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}>0\,,\quad \left.\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\varphi}\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\varphi} & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\end{vmatrix}\right|_{(a,0)}=kmgR>0\,,$$

pa potencijalna energija ima minimum u tom položaju, koji onda, po Ležen-Dirihleovoj teoremi, odgovara stabilnoj ravnoteži.

Linearizacijom Lagranževih jednačina u okolini nađenog položaja stabilne ravnoteže dobija se sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} 2\ddot{\eta} & + & \frac{k}{m}\eta & + & R\ddot{\varphi} & & = & 0\,, \\ \ddot{\eta} & + & & & R\ddot{\varphi} & +g\varphi & = & 0\,, \end{array} \tag{2}$$

gde je $\eta = x - a$, odakle standardnim postupkom sledi jednačina za određivanje normalnih frekvenci:

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2 + \frac{k}{m} & -R\omega^2 \\ -\omega^2 & -R\omega^2 + g \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{R}\right)^2 - 4\frac{kg}{Rm}}\right),$$

pa je konačno $\boxed{\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{R} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{4g^2}{R^2}}\right)}$.

4. Ako je $k/m = g/R$ za normalne frekvence se dobijaju vrednosti

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{g}{R}}\,, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{g}{R}}\,.$$

Za $\omega = \omega_1$ i $\eta = A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1)$, $\varphi = A_2^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ iz sistema diferencijalnih jednačina (2) onda sledi

$$A_1^{(1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}RA_2^{(1)}\,,$$

dok se za $\omega = \omega_2$ i $\eta = A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$, $\varphi = A_2^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$ dobija:

$$A_1^{(2)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}RA_2^{(2)}\,,$$

pa su konačne jednačine kretanja

$$\boxed{\begin{pmatrix} \eta(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = C_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2}R \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}R \\ 1 \end{pmatrix}},$$

gde su C_1, C_2, α_1 i α_2 konstante koje se određuju iz početnih uslova.