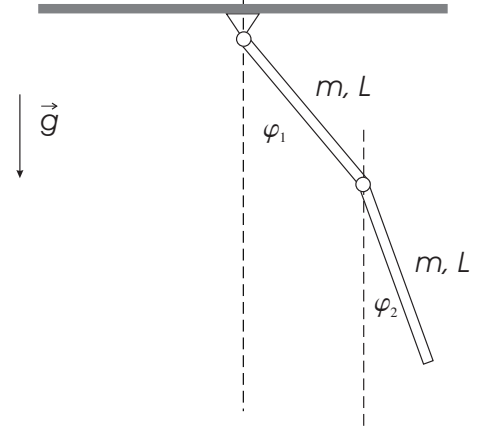


DRUGI KOLOKVIJUM IZ TEORIJSKE MEHANIKE - 8. MAJ 2007.

Dva jednaka štapa, mase m i dužine L svaki, okačeni jedan o drugog, kao što je prikazano na slici, mogu da osciluju u vertikalnoj ravni pod delovanjem gravitacione sile ($\vec{g} = g\vec{e}_x$). Uzimajući za generalisane koordinate uglove odklona φ_1 i φ_2 štapova od vertikale



1. (30 poena) sastaviti lagranžijan;
2. (20 poena) sastaviti hamiltonijan;
3. (15 poena) izraziti ukupni moment impulsa \vec{M} sistema (u odnosu na tačku o koju je okačen gornji štap) u funkciji kanonskih promenljivih $\varphi_1, \varphi_2, p_1$ i p_2 ;
4. (35 poena) za slučaj malih oscilacija oko vertikalnog položaja ravnoteže ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) sastaviti aproksimativne izraze za lagranžijan, hamiltonijan, Hamiltonove jednačine i Poasonovu zgradu $[M, H]$.

REŠENJE

1. Kinetička energija gornjeg štapa jednaka je $T_1 = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2$, gde je $I_1 = \frac{1}{3}mL^2$. Kinetička energija donjeg štapa je $T_2 = \frac{1}{2}m v_c^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_2^2$, gde je v_c brzina centra mase drugog štapa, a $I = \frac{1}{12}mL^2$. Pošto je $y_c = L \sin \varphi_1 + \frac{L}{2} \sin \varphi_2$ i $x_c = L \cos \varphi_1 + \frac{L}{2} \cos \varphi_2$, dobija se $T_2 = \frac{mL^2}{6}(3\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1))$. Potencijalne energije gornjeg i donjeg štapa su redom jednake $U_1 = -\frac{1}{2}mgL \cos \varphi_1$ i $U_2 = -mgLx_c$, pa je lagranžijan sistema jednak

$$\mathcal{L} = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \frac{mL^2}{6}(4\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) + \frac{1}{2}mgL(3 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2). \quad (1)$$

2. Generalisani impulsi su po definiciji jednaki

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{mL^2}{6}(8\dot{\varphi}_1 + 3\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{mL^2}{6}(2\dot{\varphi}_2 + 3\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad (2)$$

odakle sledi sistem jednačina po $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$

$$8\dot{\varphi}_1 + 3\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{6p_1}{mL^2} \quad (3)$$

$$3\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2\dot{\varphi}_2 = \frac{6p_2}{mL^2} \quad (4)$$

čijim rešavanjem dobijamo

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{6}{mL^2} \frac{2p_1 - 3p_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{16 - 9 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{6}{mL^2} \frac{8p_2 - 3p_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{16 - 9 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5)$$

Pošto je hamiltonijan u ovom slučaju jednak zbiru kinetičke i potencijalne energije, sledi

$$H = T + U = \frac{6}{mL^2} \frac{p_1^2 + 4p_2^2 - 3p_1p_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{16 - 9 \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)} - \frac{1}{2}mgL(3 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2). \quad (6)$$

3. Moment impulsa gornjeg štapa jednak je $\vec{M}_1 = I_1 \dot{\varphi}_1 \vec{e}_z$. Moment impulsa donjeg štapa \vec{M}_2 jednak je

$$\vec{M}_2 = m\vec{r}_c \times \vec{v}_c + \tilde{\mathcal{I}}^{(c)} \vec{\omega}_2, \quad (7)$$

gde je $\vec{r}_c = x_c \vec{e}_x + y_c \vec{e}_y$, $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$, $\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}_2 \vec{e}_z$, a $\tilde{\mathcal{I}}^{(c)}$ tenzor inercije štapa u odnosu na njegov centar mase:

$$\mathcal{I}^{(c)} = \frac{1}{12} mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

gde je x_1 osa izabrana u pravcu samog štapa, x_2 normalno na nju u ravni kretanja štapa, a x_3 osa je u pravcu z ose. Zamenom izraza za x_c i y_c nađenih u prvom zadatku dobija se

$$\vec{M}_2 = \vec{e}_z mL^2 \left[\dot{\varphi}_1 \left(1 + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + \dot{\varphi}_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right]. \quad (9)$$

Ukupni moment impulsa je onda jednak

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{e}_z mL^2 \left[\dot{\varphi}_1 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) + \dot{\varphi}_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right] = (p_1 + p_2) \vec{e}_z, \quad (10)$$

gde smo iskoristili izraze (5).

4. U slučaju malih oscilacija lagranžijan dobija oblik

$$\mathcal{L} = \frac{mL^2}{6} (4\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) - \frac{1}{4} mgL (3\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad (11)$$

a hamiltonijan:

$$H = \frac{6}{7mL^2} (p_1^2 + 4p_2^2 - 3p_1p_2) + \frac{1}{4} mgL (3\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \quad (12)$$

Hamiltonove jednačine onda imaju oblik:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{6}{7mL^2} (2p_1 - 3p_2), \quad \dot{p}_1 = -\frac{3}{2} mgL \varphi_1, \quad (13)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{6}{7mL^2} (-3p_1 + 8p_2), \quad \dot{p}_2 = -\frac{1}{2} mgL \varphi_2, \quad (14)$$

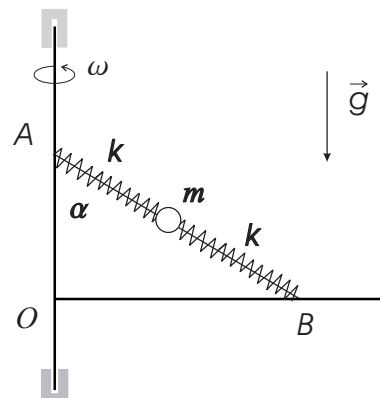
a tražena Poasonova zagrada jednaka je

$$[M, H] = -\frac{\partial M}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial M}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = -\frac{mgL}{2} (3\varphi_1 + \varphi_2). \quad (15)$$

DRUGI KOLOKVIJUM IZ TEORIJSKE MEHANIKE - DODATNI ZADATAK
8. MAJ 2007.

Kuglica mase m može da klizi duž glatke šipke, učvršćene svojim krajevima u tačkama A i B na kracima pravog ugla AOB , koji rotira oko svog vertikalnog kraka OA konstantnom ugaonom brzinom ω . Kuglica je za tačke A i B zakačena jednakim oprugama, konstantna elastičnosti k i nominalne dužine l . Poznato je da je $\angle OAB = \alpha$, kao i da je $AB = 2l$.

1. (60 poena) Sastaviti lagranžijan i Lagranževu jednačinu.
2. (40 poena) Ako je $\omega^2 = k/(m \sin^2 \alpha)$, a u trenutku $t = 0$ se kuglica nalazila na jednakom rastojanju od tačaka A i B , pri čemu joj je kinetička energija bila jednaka $\frac{1}{2}ml^2\omega^2 \sin^2 \alpha$, naći konačne jednačine kretanja kuglice.



REŠENJE

1. Za generalisanu koordinatu izaberimo rastojanje x kuglice od tačke A . Kinetička energija kuglice, izražena u cilindričnim koordinatama, koje su izabrane tako da je osa z određena pravcem i smerom vektora ω , a koordinatni početak je u tački O je $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + \dot{z}^2)$. Pošto je $r = x \sin \alpha$ i $z = OA - x \cos \alpha$, za kinetičku energiju se dobija izraz $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^2\omega^2 \sin^2 \alpha)$. Potencijalna energija jednaka je $U = mg(OA - x \cos \alpha) + \frac{1}{2}k((x - l)^2 + (2L - x - l)^2) = -mgx \cos \alpha + k(x - l)^2 + const$, tako da za lagranžijan možemo da uzmemo izraz

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^2\omega^2 \sin^2 \alpha) + mgx \cos \alpha - k(x - l)^2, \quad (16)$$

a Lagranževa jednačina dobija oblik:

$$\ddot{x} + \left(\frac{2k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) x = g \cos \alpha + \frac{2kl}{m}. \quad (17)$$

2. U ovom slučaju Lagranževa jednačina se svodi na

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \cos \alpha + \frac{2kl}{m}, \quad (18)$$

čije je opšte rešenje

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{gm}{k} \cos \alpha + 2l. \quad (19)$$

Pošto je u početnom trenutku

$$x(0) = A + \frac{gm}{k} \cos \alpha + 2l = l, \quad (20)$$

sledi da je $A = \frac{gm}{k} \cos \alpha - l$. Slično,

$$\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}} B, \quad (21)$$

ali kako je

$$T(0) = \frac{m}{2} \left((\dot{x}(0))^2 + l^2 \omega^2 \sin^2 \alpha \right) = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \sin^2 \alpha, \quad (22)$$

jasno je da je $B = 0$, tako da je

$$x(t) = l + \left(\frac{gm}{k} \cos \alpha + l \right) \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \quad (23)$$