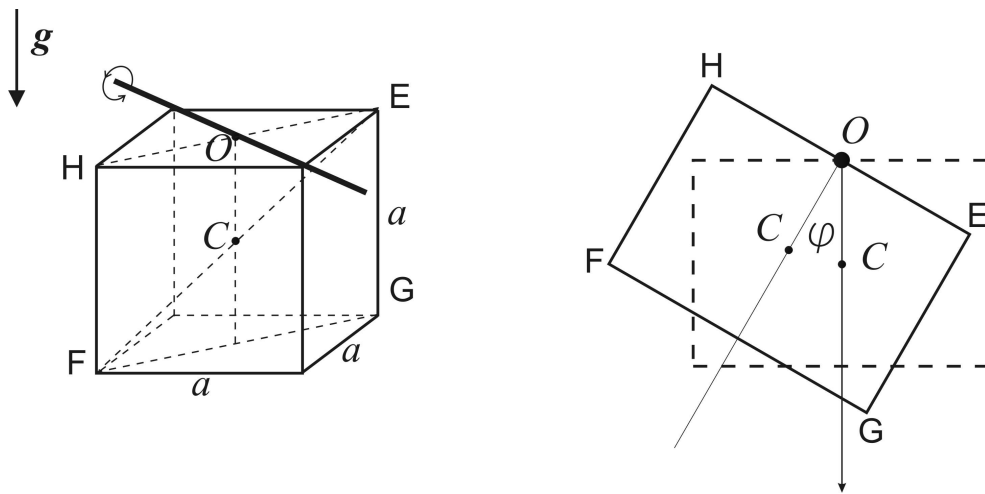


DRUGI KOLOKVIJUM IZ TEORIJSKE MEHANIKE
8. MAJ 2008.

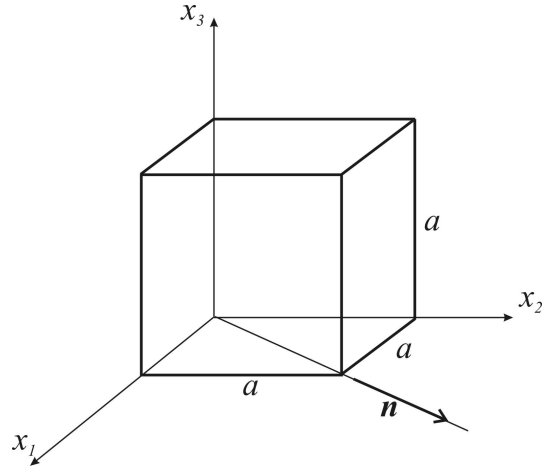
Homogena kocka ivice a i mase m u homogenom gravitacionom polju g može da rotira oko fiksirane horizontalne ose koja se poklapa sa dijagonalom jedne od strana kocke. Uzimajući za generalisanu koordinatu ugao φ otklona centra mase od vertikale:

1. (50 poena) sastaviti lagranžijan, Lagranževu jednačinu, hamiltonijan i Hamiltonove jednačine;
2. (20 poena) izračunati Poasonove zagrade: (a) komponente M momenta impulsa kocke duž ose rotacije i hamiltonijana: $[M, H]$, (b) kinetičke energije i hamiltonijana: $[T, H]$;
3. (30 poena) naći $\varphi(t)$ ako se u početnom trenutku, $t = 0$, centar mase kocke nalazio u najnižem mogućem položaju i imao brzinu intenziteta $\sqrt{\frac{6}{5}ga}$.



REŠENJE.

1. Pošto kocka rotira oko fiksirane ose, njena kinetička energija jednaka je $T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, gde je I moment inercije kocke oko ose rotacije. Moment inercije I može da se izračuna pomoću formule $I = \vec{n} \cdot (\mathcal{I}\vec{n})$, gde je \mathcal{I} matrica koja odgovara tenzoru inercije u sopstvenom koordinatnom sistemu kocke, izabranom kao na sledećoj slici, a \vec{n} ort ose rotacije.



Matrica \mathcal{I} ima oblik

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

gde međusobna jednakost dijagonalnih, odnosno vandijagonalnih elemenata sledi iz simetrije. Konkretno:

$$\begin{aligned} A &= I_{11} = \int dm (x_2^2 + x_3^2) = \frac{m}{a^3} \int_0^a \int_0^a \int_0^a dx_1 dx_2 dx_3 (x_2^2 + x_3^2) \\ &= \frac{m}{a^2} \int_0^a \int_0^a dx_2 dx_3 (x_2^2 + x_3^2) = 2 \frac{m}{a^2} \int_0^a \int_0^a dx_2 dx_3 x_2^2 \\ &= 2 \frac{m}{a} \int_0^a dx_2 x_2^2 = \frac{2m}{3a} x_2^3 \Big|_0^a = \frac{2}{3} ma^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} B &= I_{12} = - \int dm x_1 x_2 = - \frac{m}{a^3} \int_0^a \int_0^a \int_0^a dx_1 dx_2 dx_3 x_1 x_2 \\ &= - \frac{m}{a^2} \int_0^a \int_0^a dx_1 dx_2 x_1 x_2 = - \frac{m}{a^2} \left(\int_0^a dx_1 x_1 \right)^2 = - \frac{1}{4} ma^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Pošto je $\vec{n} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$ za moment inercije se dobija

$$I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A + B = \frac{5}{12} ma^2, \quad (4)$$

pa je kinetička energija kocke: $T = \frac{5}{24} ma^2 \dot{\varphi}^2$. Potencijalna energija, računata u odnosu na nivo u kome leži osa rotacije, jednaka je $U = -\frac{1}{2} mga \cos \varphi$, tako

da lagranžijan ima oblik

$$L = \frac{1}{2} \frac{5}{12} ma^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mga \cos \varphi, \quad (5)$$

a Lagranževa jednačina

$$\ddot{\varphi} + \frac{6g}{5a} \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Generalisani impuls p_φ je po definiciji jednak

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{5}{12} ma^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{12p_\varphi}{5ma^2}, \quad (7)$$

pa je hamiltonijan

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2I} + U = \frac{6}{5} \frac{p_\varphi^2}{ma^2} - \frac{1}{2} mga \cos \varphi, \quad (8)$$

a Hamiltonove jednačine

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{12p_\varphi}{5ma^2}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} mga \sin \varphi. \quad (9)$$

2. (a) Kako je $M = I\dot{\varphi} = p_\varphi$, Poasonova zagrada $[M, H]$, po definiciji je jednaka

$$[M, H] = [p_\varphi, H] = \frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_\varphi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} mga \sin \varphi. \quad (10)$$

(b) Kinetička energija u kanonskim promenljivim ima oblik: $T = \frac{6}{5} \frac{p_\varphi^2}{ma^2}$, pa je

$$[T, H] = [T, T + U] = \frac{6}{5ma^2} [p_\varphi^2, U] = -\frac{3g}{5a} [p_\varphi^2, \cos \varphi] = -\frac{6g}{5a} p_\varphi \sin \varphi. \quad (11)$$

3. Ukupna energija kocke se održava, tj.

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} mga \cos \varphi = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2(0) - \frac{1}{2} mga = \frac{1}{2} mga, \quad (12)$$

gde je ugaona brzina $\dot{\varphi}(0)$ izračunata iz početne brzine centra mase: $v_0 = \frac{a}{2} \dot{\varphi}(0)$. Iz zakona održanja energije dalje sledi

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{mga}{I} (1 + \cos \varphi) \Rightarrow \frac{d(\varphi/2)}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{6g}{5a}} dt \quad (13)$$

odakle je

$$t = \sqrt{\frac{5a}{6g}} \int_0^{\varphi(t)} \frac{d(\varphi/2)}{\cos \frac{\varphi}{2}} = 2\sqrt{\frac{5a}{6g}} \int_0^{\varphi(t)} \frac{d \operatorname{tg}(\varphi/4)}{1 - \operatorname{tg}^2(\varphi/4)} = \sqrt{\frac{5a}{6g}} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(\varphi/4)}{1 - \operatorname{tg}(\varphi/4)},$$

odnosno

$$\varphi(t) = 4 \operatorname{arctg} \frac{e^{t\sqrt{\frac{6g}{5a}}} - 1}{e^{t\sqrt{\frac{6g}{5a}}} + 1}. \quad (14)$$