

1 Osnovne postavke klasične nerelativističke mehanike

Osnovni model koji koristimo u mehanici je **materijalna tačka** (ili **čestica**). Jednostavno rečeno, materijalna tačka je geometrijska tačka kojoj pridružujemo masu. Da li se neko telo može tretirati kao materijalna tačka ili ne, zavisi od toga kakav fenomen posmatramo. Generalno, fizičko telo se može aproksimirati modelom materijalne tačke, tj. njegova unutrašnja struktura i dimenzije se mogu zanemariti, pri kretanjima u toku kojih se ono kreće u oblasti čija je zapremina mnogo veća od njegove sopstvene zapremine.

Kretanje čestice posmatra se u odnosu na neki **referentni sistem**. U referentnom sistemu definišemo **koordinatni sistem**. Najjednostavniji koordinatni sistem je *Dekartov pravougli sistem*, ali se osim njega često koriste i drugi, krivolinijski koordinatni sistemi: *cilindrični*, *sferni* itd.

Osnovna veličina koju pridružujemo čestici je njen vektor položaja $\vec{r}(t)$. Zavisnost vektora položaja čestice od vremena t , tj. izraz $\vec{r} = \vec{r}(t)$, zvaćemo **konačna jednačina kretanja**. Brzina čestice se definiše kao izvod njenog vektora položaja po vremenu, tj.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Impuls čestice mase m , koja se kreće brzinom \vec{v} definiše se kao

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Ako se impuls \vec{p} čestice menja u toku vremena kažemo da na česticu deluje sila \vec{F} , pri čemu važi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

što predstavlja **osnovni dinamički zakon** (*II Njutnov zakon*). Ako je masa m konstantna, prethodna jednačina se svodi na poznati izraz

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2)$$

Izraz $m\vec{a}$ ćemo zvati dinamička sila, a sila \vec{F} u inercijalnim sistemima potiče samo od interakcije među česticama (tzv. *prava sila*). U daljem toku izlaganja ćemo pretpostavljati da radimo u *inercijalnim sistemima* (osim ako se posebno ne naglasi suprotno), tj. pod \vec{F} ćemo uvek podrazumevati pravu silu, čije su osnovne osobine ustanovljene tzv. postulatima sile.

1.1 Postulati sile

Iskustvo pokazuje da sila u inercijalnim sistemima zadovoljava sledeće osobine:

1. *Zakon inercije*: u inercijalnim sistemima čestica (stalne mase) ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja ako ne interaguje ni sa kakvim drugim česticama, tj. ako na nju ne deluje nikakva sila (*I Njutnov zakon*).
2. Sila interakcije između dve čestice, čije su mase, vektori položaja i brzine redom jednaki m_1 , \vec{r}_1 , \vec{v}_1 i m_2 , \vec{r}_2 , \vec{v}_2 , zavisi samo od relativnog radijus vektora i relativne brzine čestica. Znači, ako sa \vec{F}_{21} označimo silu kojom čestica 2 deluje na česticu 1, onda je

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2). \quad (3)$$

3. Štaviše, sila interakcije između dve čestice je kolinearna sa relativnim vektorom položaja čestica i ima oblik

$$\vec{F}_{21} = f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (4)$$

pri čemu važe principi

- *superpozicije*, tj. ukupna sila \vec{F}_3 kojom čestice 1 i 2 deluju na neku treću česticu, jednaka je vektorskom zbiru sila kojom čestice 1 i 2 pojedinačno deluju na nju, tj. $\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$ i
- *akcije i reakcije*, tj. sile kojom dve čestice uzajamno deluju jedna na drugu, jednake su po intenzitetu i pravcu, a suprotnog su smera:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (5)$$

(*III Njutnov zakon*).

1.2 O inercijalnim sistemima

Sve do zasnivanja specijalne teorije relativnosti, smatralo se da postoji apsolutni referentni sistem koji miruje, a svi sistemi, koji bi se kretali konstantnom brzinom u odnosu na njega nazivani su inercijalnim sistemima. Danas se zna da postojanje apsolutno mirujućeg sistema nije moguće utvrditi, pa se koristi tzv. *Ajnštajnova definicija*:

Inercijalni sistem je referentni sistem u kome telo koje ne interaguje sa drugim telima ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja.

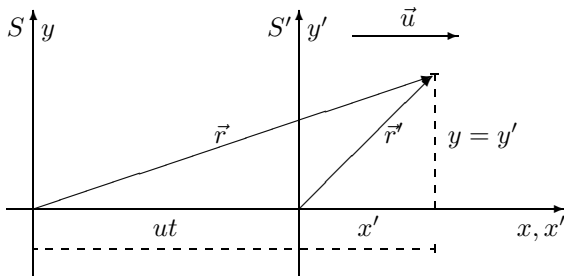
Za naše potrebe za sada je dovoljno pretpostaviti da postoji barem jedan inercijalni sistem, a svaki drugi koji se u odnosu na njega kreće konstantnom brzinom je takođe inercijalan.

Galilejeve transformacije opisuju kako se menjaju koordinate nekog fizičkog događaja pri prelasku iz jednog u drugi inercijalni sistem. U nerelativističkoj fizici smatra se da je *vreme apsolutno*, tj. da je vremenski interval između dva događaja isti u svim inercijalnim sistemima. Posmatrajmo dva inercijalna sistema S i S', u kojima smo koordinatne sisteme (Dekartove) izabrali tako da se u početnom trenutku poklapaju, dok im u daljem kretanju ose ostaju paralelne, a sistem S' se u odnosu na S kreće duž zajedničke x-ose, brzinom konstantnog intenziteta u . Sa slike se onda jasno vidi da Galilejeve transformacije imaju oblik

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (6)$$

i, naravno, važi

$$t' = t. \quad (7)$$



Očigledna posledica Galilejevih transformacija je da je vektor relativnog položaja između dve tačke isti u svim inercijalnim sistemima, tj.

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \quad (8)$$

kao i da se relativna brzina ne menja pri prelasku iz jednog u drugi inercijalni sistem (pošto je vreme apsolutno), tj.

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2. \quad (9)$$

Takođe se lako proverava da je i ubrzanje čestice isto u svim inercijalnim sistemima

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (10)$$

Ako sada uočimo izolovan sistem od dve čestice, onda osnovni dinamički zakon za npr. česticu 1 u sistemu S ima oblik

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2), \quad (11)$$

odakle, zbog Galilejevih transformacija, važi

$$m_1 \vec{a}'_1 = \vec{F}_{21}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2), \quad (12)$$

što znači da osnovni dinamički zakon u ovom slučaju ima isti oblik u svim inercijalnim sistemima, pri čemu smo iskoristili i iskustvom potvrđenu činjenicu da je masa čestice ista u svim inercijalnim sistemima.

1.3 Diferencijalne jednačine kretanja za sistem čestica

Posmatrajmo sistem od N čestica, koje interaguju međusobno, ali ne i sa okolnim telima. Takav sistem zovemo *izolovan sistem* čestica. Sila koja deluje na ν -tu česticu jednaka je zbiru svih sila kojima ostale čestice iz sistema deluju na nju, tj.

$$\vec{F}_\nu = \sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu}, \quad \text{pri čemu je } \vec{F}_{\mu\mu} = 0, \quad (13)$$

za svako μ , tj. čestice ne interaguju same sa sobom. Pošto je, po postulatima sile

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \vec{F}_{\mu\nu}(\vec{r}_\mu - \vec{r}_\nu, \vec{v}_\mu - \vec{v}_\nu), \quad (14)$$

ukupna sila koja deluje na ν -tu česticu je funkcija vektora položaja i brzina svih čestica sistema, tj.

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N). \quad (15)$$

Posmatrajmo sada *neizolovan sistem*, koji se sastoji od n čestica. Ako taj sistem "dopunimo" do izolovanog sistema, koji sadrži ukupno N čestica, silu koja deluje na proizvoljnu česticu iz uočenog neizolovanog sistema, možemo da napišemo u obliku

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{r}_{n+1}(t), \dots, \vec{r}_N(t), \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}(t), \dots, \vec{v}_N(t)) = \vec{F}_\nu^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t), \quad (16)$$

gde smo eksplicitnu zavisnost sile \vec{F}_ν od vektora položaja i brzina čestica kojima smo sistem "dopunili" do izolovanog, zamenili eksplicitnom zavisnošću od vremena u funkciji \vec{F}_ν^* . Odatle zaključujemo da eksplicitna zavisnost sile od vremena ukazuje na neizolovanost sistema.

Ako napišemo osnovnu jednačinu dinamike za svaku česticu neizolovanog sistema, dobijamo sistem vektorskih jednačina

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) \\ &\dots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) \end{aligned} \quad (17)$$

odnosno, uzimajući u obzir definicije brzine i ubrzanja

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) \\ &\dots \\ m_n \ddot{\vec{r}}_n &= \vec{F}_n^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) \end{aligned} \quad (18)$$

Ako poznajemo sve sile koje deluju na sistem, ovaj sistem predstavlja sistem od n običnih diferencijalnih vektorskih jednačina drugog reda, u kome su nepoznate funkcije vektori položaja svih n čestica sistema, a nezavisno promenljiva vreme t . Ove jednačine predstavljaju **diferencijalne jednačine kretanja** i, ako su poznati *početni uslovi*, tj. položaji i brzine čestica u početnom trenutku, u principu je moguće naći konačne jednačine kretanja $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t)$.

Iz Galilejevih transformacija (odnosno njihovih posledica (8), (9) i (10)) sledi da diferencijalne jednačine kretanja zadržavaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima, što znači da su *zakoni mehanike isti u svim inercijalnim sistemima*. Ovaj stav poznat je kao **Galilejev princip relativnosti**. Takođe, iz činjenice da su u njima izvodi nepoznatih funkcija $\vec{r}(t)$ najvišeg, tj. drugog reda izraženi eksplicitno u funkciji svih ostalih veličina, sledi da ove jednačine za proizvoljne početne uslove imaju *jednoznačno rešenje* (pod dosta širokim opštim uslovima, koji su u mehanici po pravilu zadovoljeni). Ovo je posledica jedne matematičke teoreme, a fizički to znači da *sile koje deluju na sistem i kinematičko stanje sistema (tj. položaji i brzine čestica) u bilo kom trenutku jednoznačno određuju kretanje tog sistema, kako u prošlosti tako i u budućnosti*, što predstavlja sadržaj tzv. **mehaničkog principa kauzalnosti**.

2 Osnovne teoreme mehanike

2.1 Teorema kinetičke energije

Posmatrajmo sistem od N čestica. Interesuje nas za koliko se promeni njegova ukupna kinetička energija T za infinitezimalno malo vreme dt . Pošto je

$$T = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_{\nu} \vec{v}_{\nu}^2,$$

odgovarajuća promena kinetičke energije jednaka je

$$dT = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu} d\vec{v}_{\nu}.$$

Kako je

$$d\vec{v}_{\nu} = \vec{a}_{\nu} dt$$

izraz za dT se može prepisati u obliku

$$dT = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu} \cdot \vec{a}_{\nu} dt,$$

a pošto je

$$d\vec{r}_{\nu} = \vec{v}_{\nu} dt,$$

konačno je

$$dT = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{a}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = dA, \quad (19)$$

gde smo iskoristili osnovni dinamički zakon za svaku česticu, a sa dA označili ukupan rad svih sila koje deluju na sistem izvršen za vreme dt . Ova relacija predstavlja matematički izraz **teoreme kinetičke energije**: promena kinetičke energije sistema jednaka je ukupnom radu izvršenom za isto vreme na sistemu.

2.1.1 Zakon održanja ukupne mehaničke energije

Sile \vec{F}_{ν} koje se mogu izraziti preko skalarne funkcije $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$ kao

$$\vec{F}_{\nu} = -\text{grad}_{\nu} U = - \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} \vec{e}_z \right) \quad (20)$$

nazivaju se *potencijalne sile*, a funkcija U *potencijalna energija* sistema. Ako U ne zavisi eksplicitno od vremena, kažemo da su odgovarajuće sile *konzervativne*. (Primeri: sila koja deluje na česticu u homogenom gravitacionom polju, elastična sila itd.)

Ukupna mehanička energija sistema E se definiše kao zbir njegove kinetičke T i potencijalne energije U .

Ako su sve sile koje deluju na sistem konzervativne, onda je njihov ukupni rad jednak

$$dA = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = - \sum_{\nu=1}^N \text{grad}_{\nu} U \cdot d\vec{r}_{\nu} = - \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} dy_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} dz_{\nu} \right) = -dU, \quad (21)$$

što znači da *rad koji izvrše konzervativne sile zavisi samo od početnih i krajnjih tačaka čestica na koje te sile deluju, a ne i od načina na koji je put pređen*. S druge strane, iz teoreme kinetičke energije (19) je $dT = dA$, pa je

$$dT = -dU \quad \Rightarrow \quad d(T + U) = dE = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const}, \quad (22)$$

tj, važi **zakon održanja energije**: ako su sve sile koje deluju na čestice sistema konzervativne, onda se ukupna mehanička energija sistema održava (drugim rečima, predstavlja integral kretanja). Jasno je da zakon održanja energije važi i ako osim konzervativnih sila deluju i tzv. *giroskopske* sile, tj. sile koje ne vrše rad (npr. Lorencova sila $q\vec{v} \times \vec{B}$, kojom magnetno polje \vec{B} deluje na česticu naelektrisanja q , koja se kreće brzinom \vec{v}).

Ako potencijalna energija U eksplicitno zavisi od vremena, onda je

$$dU = \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} dy_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} dz_{\nu} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -dA + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -dT + \frac{\partial U}{\partial t} dt, \quad (23)$$

pa je jasno da zakon održanja energije u tom slučaju ne važi.

2.2 Teorema impulsa

Ukupni impuls \vec{p} sistema od N čestica jednak je

$$\vec{p} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu},$$

a brzina njegove promene je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{d\vec{v}_{\nu}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu},$$

gde smo iskoristili osnovni dinamički zakon (1) za česticu. Silu koja deluje na ν -tu česticu možemo da razložimo na silu koja potiče od čestica unutar sistema i na spoljašnju silu \vec{F}_{ν}^{spolj} (koja postoji ako sistem nije izolovan):

$$\vec{F}_{\nu} = \sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}_{\nu}^{spolj},$$

tako da je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \left(\sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}_{\nu}^{spolj} \right) = \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}^{spolj}.$$

Ukupna unutrašnja sila jednaka je nuli, pošto je

$$\sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^N \vec{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N (\vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}_{\nu\mu}) = 0,$$

gde smo prvo u drugoj dvostruko sumi promenili mesta nemim indeksima μ i ν , a zatim iskoristili zakon akcije i reakcije. Znači, brzina promene ukupnog impulsa sistema jednaka je ukupnoj spoljašnjoj sili koja deluje na sistem, tj.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{spolj}. \quad (24)$$

što predstavlja **teoremu impulsa**.

Vektor položaja *centra mase* \vec{r}_c je po definiciji jednak

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{r}_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu}}, \quad (25)$$

pa je

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu}},$$

odakle je

$$\vec{p} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \left(\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \right) \vec{v}_c = m \vec{v}_c,$$

gde smo sa m označili ukupnu masu sistema. Ako ovakav izraz za impuls zamenimo u (24) zaključujemo da je

$$m \vec{a}_c = \vec{F}^{spolj}, \quad (26)$$

što znači da se *centar mase sistema kreće kao čestica mase jednake ukupnoj masi sistema na koju deluje sila jednaka ukupnoj spoljašnjoj sili koja deluje na sistem.*

2.2.1 Zakon održanja impulsa

Iz teoreme impulsa (24) direktno sledi **zakon održanja impulsa**: *ako je ukupna spoljašnja sila koja deluje na sistem jednaka nuli, impuls sistema se ne menja.*

2.3 Teorema momenta impulsa

Moment proizvoljne vektorske veličine \vec{A} u odnosu na neku tačku O (*pol*) definiše se kao vektorski proizvod $\vec{r} \times \vec{A}$, gde je \vec{r} vektor položaja tačke u kojoj posmatramo \vec{A} . **Moment impulsa** $\vec{M}^{(O)}$ čestice u odnosu na pol O je onda

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r} \times m \vec{v}, \quad (27)$$

a **moment sile** $\vec{L}^{(O)}$:

$$\vec{L}^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (28)$$

Ukupni moment impulsa sistema od N čestica u odnosu na koordinatni početak inercijalnog sistema u kome sistem posmatramo jednak je

$$\vec{M} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu},$$

pa je brzina njegove promene

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \frac{d\vec{r}_{\nu}}{dt} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} + \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \frac{d\vec{v}_{\nu}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{a}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}. \quad (29)$$

Ako silu koja deluje na ν -tu česticu razložimo na njenu unutrašnju i spoljašnju komponentu, slično kao pri izvođenju teoreme impulsa, zaključujemo da je ukupni moment unutrašnjih sila jednak nuli. Naime,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}^{unutr} &= \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\mu} \times \vec{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\mu} \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^N (\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}) \times \vec{F}_{\mu\nu} = 0, \end{aligned}$$

gde smo u poslednjem redu iskoristili postulat sile po kome je sila interakcije između dve čestice kolinearna sa njihovim relativnim vektorom položaja. Dalje iz (29) sledi

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}^{spolj} = \vec{L}^{spolj}, \quad (30)$$

tj. *brzina promene momenta impulsa sistema jednaka je ukupnom momentu svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem, što predstavlja teoremu momenta impulsa.*

2.3.1 Zakon održanja momenta impulsa

Ako je ukupni moment svih spoljašnjih sila jednak nuli, onda je

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0,$$

pa je ukupni moment impulsa sistema stalan u toku vremena.

3 Metod nezavisnih generalisanih koordinata

3.1 Veze

Ako pri kretanju sistema postoje izvesna ograničenja na položaje i brzine čestica, kažemo da sistem vrši **prinudno kretanje** (u suprotnom, tj. ako ograničenja nema, kaže se da je sistem slobodan ili da vrši *slobodno kretanje*). Pomenuta ograničenja se nazivaju **veze** i ona se realizuju pomoću nekakvih površina, poluga, osovin ili drugih mehanizama. Matematički se veze izražavaju relacijama između koordinata i brzina čestica, i vremena. Mi ćemo razmatrati samo slučajeve kada su te relacije izražene jednačinama, koje sadrže samo koordinate čestica i vreme. Veze koje ograničavaju samo koordinate čestica, a ne i brzine, nazivaju se **holonomne** (u suprotnom, tj. ako ograničavaju i brzine, zovu se *neholonomne*). U zavisnosti od toga da li eksplicitno zavise od vremena, veze se dele na *stacionarne* i *nestacionarne*.

Primeri...

3.2 Nezavisne generalisane koordinate

Posmatrajmo sistem od N čestica, čiji su položaji ograničeni sa k holonomnih veza. Skup od zadatih k holonomnih jednačina veza

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) &= 0 \\ &\vdots \\ f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

možemo shvatiti kao sistem algebarskih jednačina po k , proizvoljno izabranim, Dekartovih koordinata čestica. Rešavanjem tog sistema, izabranim k koordinata možemo izraziti preko preostalih $n = 3N - k$ koordinata. Broj n zovemo **broj stepeni slobode** i on predstavlja minimalan broj koordinata (promenljivih) potrebnih da se potpuno opiše položaj svih čestica, odnosno konfiguracija sistema. Ukoliko simetrija problema to nameće, umesto Dekartovih koordinata mogu se izabrati neke druge *generalisane* koordinate, ali je i u tom slučaju od prvobitnih $3N$ koordinata moguće izabrati n **nezavisnih generalisanih koordinata** pomoću kojih se u svakom trenutku jednoznačno može odrediti konfiguracija sistema. Nezavisne generalisane koordinate ćemo označavati sa q_i , $i = 1, \dots, n$ i u daljem toku izlaganja ćemo ih kratko zvati generalisane koordinate (kada ne postoji mogućnost zabune), a njihove izvode po vremenu $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ – **generalisane brzine**. Generalisane koordinate, dakle, potpuno opisuju položaj sistema čestica, ali ne moraju biti vezane za pojedinačne čestice. Npr. ako posmatramo sistem od 2 čestice, koje se kreću duž x -ose, za generalisane koordinate možemo izabrati x -koordinatu centra mase tog sistema i rastojanje između čestica.

Formalno, postupak određivanja nezavisnih generalisanih koordinata se izvodi na sledeći način. Prepostavimo da smo sa prvobitnih $3N$ Dekartovih koordinata prešli na $3N$ nekih drugih, pogodnijih, koordinata koje ćemo označiti sa q_1, q_2, \dots, q_{3N} , tako da važi

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, \dots, q_{3N}) \\ y_i &= y_i(q_1, \dots, q_{3N}) \\ z_i &= z_i(q_1, \dots, q_{3N}), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (32)$$

U jednačinama veze (31) možemo Dekartove koordinate sada izraziti preko generalisanih koordinata q_i , čime ćemo dobiti sistem od k algebarskih jednačina u kojima figuriše $3N$ generalisanih koordinata. Od tih $3N$ generalisanih koordinata izaberemo $n = 3N - k$ nezavisnih generalisanih koordinata: q_1, \dots, q_n , a sve ostale $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{3N}$

izrazimo preko njih. Konačno, pomoću jednačina (32), sve Dekartove koordinate možemo izraziti preko nezavisnih generalisanih koordinata q_1, \dots, q_n , tako da se *vektor položaja \vec{r}_ν proizvoljne čestice sistema izražava u funkciji nezavisnih generalisanih koordinata i vremena t* , tj.

$$\begin{aligned}\vec{r}_\nu &= x_\nu(q_1, \dots, q_n, t)\vec{e}_x + y_\nu(q_1, \dots, q_n, t)\vec{e}_y + z_\nu(q_1, \dots, q_n, t)\vec{e}_z \\ &= \vec{r}_\nu(q_1, \dots, q_n, t).\end{aligned}\quad (33)$$

Vreme t se eksplicitno javlja u ovom izrazu ako ono postoji i u jednačinama veze (31), tj. u slučaju nestacionarnih veza, ili ako relacija između Dekartovih i generalisanih koordinata (32) eksplicitno sadrži vreme. Položaj svake čestice je, dakle, potpuno određen u svakom trenutku, ako su poznate zavisnosti nezavisnih generalisanih koordinata od vremena, tj. $q_i(t)$. Brzina čestice je onda

$$\vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = \vec{v}_\nu(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (34)$$

tj. ona se može izraziti kao funkcija generalisanih koordinata q_i , generalisanih brzina \dot{q}_i i vremena t .

Kinetička energija se izražava u funkciji generalisanih koordinata i brzina na sledeći način:

$$\begin{aligned}T &= \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \vec{v}_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 \\ &= \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i + C(q_1, \dots, q_n, t),\end{aligned}\quad (35)$$

gde su

$$A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}, \quad (36)$$

$$B_i(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}, \quad (37)$$

$$C(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2. \quad (38)$$

Znači, kinetička energija je kvadratna funkcija generalisanih brzina, a u slučaju kada \vec{r}_ν ne zavisi eksplicitno od vremena ni za jedno ν , ona će sigurno biti i homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, pošto su tada svi koeficijenti B_i i C jednaki nuli.

Izračunajmo sada ukupni rad dA pri kretanju u toku kojeg se čestice pod delovanjem sila \vec{F}_ν pomere za $d\vec{r}_\nu$:

$$dA = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) dq_i + \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt, \quad (39)$$

Sumu koja u prvom sabirku u poslednjem izrazu stoji uz dq_i nazivamo **generalisanom silom**, koja odgovara generalisanoj koordinati q_i , i označavamo je sa Q_i , tako da je

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dots \quad (40)$$

Primeri...

4 Dalamber-Lagranžev princip

4.1 Moguća i virtuelna pomeranja

Infinitezimalno pomeranje $d\vec{r}_\nu$ čestice ν nazivamo **mogućim** ako je ono u skladu sa vezama. **Virtuelno** pomeranje čestice $\delta\vec{r}_\nu$ je po definiciji jednako razlici dva moguća pomeranja, $d\vec{r}_\nu$ i $d'\vec{r}_\nu$, iz iste tačke \vec{r}_ν , u istom trenutku i koja traju isto vreme dt . Ako pomeranju $d\vec{r}_\nu$ odgovara promena generalisanih koordinata dq_i , $i = 1, \dots, n$, a pomeranju $d'\vec{r}_\nu$ promena $d'q_i$, $i = 1, \dots, n$, onda se virtuelno pomeranje preko generalisanih koordinata može izraziti na sledeći način:

$$\delta\vec{r}_\nu = d'\vec{r}_\nu - d\vec{r}_\nu = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} d'q_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt \right) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (41)$$

gde smo sa δq_i označili razliku odgovarajućih promena $d'q_i$ i dq_i , tj.

$$\delta q_i = d'q_i - dq_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (42)$$

Primeri...

4.2 Reakcije

Sile koje se javljaju usled postojanja veza nazivaju se **silama reakcije**. Kažemo da su sile reakcije **idealne** ako su jednake linearnoj kombinaciji gradijenata $\text{grad}_\nu f_i$

$$\vec{R}_\nu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad}_\nu f_i, \quad (43)$$

gde λ_i (tzv. Lagranževi množitelji veza) mogu biti funkcije koordinata i brzina svih čestica, kao i vremena, ali su isti za sve čestice. Ukupni rad svih sila reakcije na mogućem pomeranju jednak je:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \vec{R}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad}_\nu f_i \cdot d\vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(df_i - \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \right) = - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (44)$$

gde smo iskoristili da je $df_i = 0$, pošto su moguća pomeranja u skladu sa vezama. Odatle je jasno da je ukupni rad svih sila reakcije na virtuelnom pomeranju jednak nuli:

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{R}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \vec{R}_\nu \cdot d'\vec{r}_\nu - \sum_{\nu=1}^N \vec{R}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu = 0. \quad (45)$$

Napišimo sada osnovni dinamički zakon za proizvoljnu česticu ν :

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu,$$

gde smo ukupnu silu koja deluje na česticu razdvojili na **aktivnu silu** \vec{F}_ν i silu reakcije \vec{R}_ν . Ako svaku takvu jednačinu pomnožimo virtuelnim pomeranjem $\delta\vec{r}_\nu$ i prosimiramo po svim česticama dobijamo **Dalamber–Lagranžev princip**:

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu \right) \delta\vec{r}_\nu = 0,$$

tj, ukupni rad svih aktivnih sila i *fiktivnih sila inercije* ($-m_\nu \vec{a}_\nu$) na virtuelnim pomeranjima idealnih holonomnih sistema jednak je nuli.

5 Lagranževe jednačine

Iz Dalamber–Lagranževog principa mogu se dobiti tzv. **Lagranževe jednačine**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (46)$$

gde generalisane sile Q_i potiču samo od aktivnih sila.

Izvođenje Lagranževih jednačina:

- Pošto je

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad \text{i} \quad \vec{a}_\nu = \frac{d\vec{v}_\nu}{dt},$$

izraz $\vec{a}_\nu \delta \vec{r}_\nu$ jednak je

$$\vec{a}_\nu \delta \vec{r}_\nu = \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) - \vec{v}_\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (47)$$

Dalje se ovaj izraz može transformisati uz pomoć relacija

$$\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}, \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\vec{r}_\nu}{dt}. \quad (49)$$

Relacija (48) se dokazuje polazeći od izraza (34) za brzinu u generalisanim koordinatama:

$$\vec{v}_\nu = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t},$$

odakle je

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad (50)$$

pošto je

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = 0. \quad (51)$$

Da bismo pokazali (49) potražićemo eksplicitan izraz za $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Kako, međutim, parcijalni izvodi po koordinatama i vremenu komutiraju, poslednji izraz se može prepisati kao

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\vec{r}_\nu}{dt},$$

gde smo uzeli u obzir i

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0, \quad (52)$$

čime je relacija (49) dokazana. Pomoću relacija (48) i (49) izraz (47) dobija oblik

$$\vec{a}_\nu \delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial q_i} \right) \delta q_i,$$

pa je

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{a}_{\nu} \delta \vec{r}_{\nu} &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_{\nu}^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_{\nu}^2}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_{\nu}^2}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_{\nu}^2}{\partial q_i} \right) \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_{\nu} \vec{v}_{\nu}^2 - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_{\nu} \vec{v}_{\nu}^2 \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \end{aligned} \quad (53)$$

• Kako je

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \delta \vec{r}_{\nu} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

iz (53) i Dalamber–Lagranževog principa (4.2) sledi jednakost

$$\sum_{i=1}^n \left(Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right) \delta q_i = 0. \quad (54)$$

Pošto su generalisane koordinate međusobno nezavisne, to su i njihove virtuelne promene δq_i takođe međusobno nezavisne, a kako poslednja jednakost treba da bude zadovoljena za sve moguće vrednosti δq_i sledi da svi koeficijenti uz δq_i moraju biti jednaki nuli, odnosno, zaista važe Lagranževe jednačine u obliku (46).

U opštem slučaju sile koje deluju na sistem mogu biti potencijalne i nepotencijalne, pa je

$$\vec{F}_{\nu} = -\text{grad}_{\nu} U + \vec{F}_{\nu}^*,$$

gde smo zvezdicom obeležili nepotencijalne aktivne sile. Onda i generalisane sile Q_i možemo razdvojiti na njihov potencijalni i nepotencijalni deo:

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i} = - \sum_{\nu=1}^N \text{grad}_{\nu} U \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu}^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i} = - \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} \frac{\partial z_{\nu}}{\partial q_i} \right) + Q_i^*,$$

gde je

$$Q_i^* = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu}^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i}$$

generalisana sila koja odgovara nepotencijalnim silama, a

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} \frac{\partial z_{\nu}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

pa je

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^*.$$

Ako ovakav izraz za generalisane sile zamenimo u jednačine (46) dobijamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^*,$$

odnosno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = Q_i^*.$$

Funkcija

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = T - U \quad (55)$$

naziva se Lagranževa funkcija, ili **lagranžijan**, i pomoću nje se Lagranževe jednačine pišu u uobičajenom obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (56)$$

5.1 Osobine Lagranževih jednačina

Pošto prema (35) kinetička energija T ima oblik

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i + C(q_1, \dots, q_n, t),$$

a potencijalna

$$U = U(q_1, \dots, q_n, t),$$

parcijalni izvodi lagranžijana će imati sledeći oblik

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i}{\partial q_l} \dot{q}_i + \frac{\partial C}{\partial q_l} - \frac{\partial U}{\partial q_l}$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{q}_i \dot{q}_j) + B_l.$$

Kako je, međutim,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{q}_i \dot{q}_j) = \delta_{li} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jl},$$

dvostruka suma u izrazu za izvod lagranžijana po generalisanoj brzini svodi se na jednu sumu, tj.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (\delta_{li} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jl}) + B_l = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n A_{lj} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n A_{il} \dot{q}_i \right) + B_l.$$

S druge strane, iz izraza (36) za koeficijente A_{ij} je jasno da je $A_{ij} = A_{ji}$, pa je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n A_{il} \dot{q}_i \right) + B_l = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i \right) + B_l = \sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i + B_l.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial B_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + A_{lj} \ddot{q}_j \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial B_l}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n A_{lj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{li}}{\partial t} + \frac{\partial B_l}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial B_l}{\partial t}, \end{aligned}$$

tako da, konačno, Lagranževe jednačine u opštem slučaju imaju oblik:

$$\sum_{j=1}^n A_{lj}(q, t) \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^n f_{li,j}^1(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n f_{li}^2(q, t) \dot{q}_i + f_l^3(q, t) = Q_l^*(q, \dot{q}, t), \quad l = 1, \dots, n, \quad (57)$$

gde smo sa q i \dot{q} kratko označili skupove (q_1, \dots, q_n) i $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Lagranževe jednačine, dakle, predstavljaju sistem od n simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, u kome su nepoznate funkcije sve generalisane koordinate $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, a nezavisno promenljiva vreme t . One su linearne po izvodima najvišeg reda, \ddot{q}_i , a može se pokazati da se iz njih eksplicitno svi \ddot{q}_i mogu izraziti preko generalisanih brzina, koordinata i vremena, pa se onda i odatle može izvući zaključak da važi princip kauzalnosti.

Iz Lagranževih jednačina se za sisteme sa isključivo potencijalnim silama ponekad neposredno mogu dobiti prvi integrali kretanja. Naime, ako lagranžijan ne zavisi eksplicitno od koordinate q_i (takva koordinata zove se *ciklična*), odgovarajuća Lagranževa jednačina ima oblik

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

odakle je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$$

6 Jednodimenzioni sistemi

6.1 Linarni harmonijski oscilator

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od jedne čestice mase m , koja se kreće duž x -ose, tako što je vezana za elastičnu oprugu, koeficijenta elastičnosti k . Ako za koordinatni početak uzmemo ravnotežni položaj, onda je sila kojom opruga deluje na česticu $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. Jednačine veze su $y = 0$ i $z = 0$, a za generalisanu koordinatu je najzgodnije uzeti x -koordinatu. Rad dA koji izvrši elastična sila na elementarnom pomeranju $d\vec{r} = dx\vec{e}_x$ jednak je

$$dA = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right),$$

što znači da se radi o potencijalnoj sili čiji je potencijal

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Kinetička energija je jednaka

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

pa je lagranžijan

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2).$$

Ako umesto konstante k uvedemo konstantu ω , tako da je $k = m\omega^2$, lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2), \tag{58}$$

a Lagranževa jednačina se lako dovodi na oblik

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{59}$$

Opšte rešenje ove jednačine (*jednačina linearnog harmonijskog oscilatora*) je

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

gde su A i α konstante koje se određuju iz početnih uslova:

$$x_0 = x(0) = A \cos \alpha, \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = -A\omega \sin \alpha.$$

Iz poslednje dve jednačine lako se nalazi

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha = -\arctg \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

6.2 Matematičko klatno

Matematičko klatno je sistem koji se sastoji od jedne čestice, mase m , koja se u homogenom gravitacionom polju kreće po kružnici poluprečnika R , koja leži u vertikalnoj ravni. Ako koordinatni sistem izaberemo tako da mu je početak u centru kružnice, da kružnica leži u ravni $z = 0$, a da je gravitaciono ubrzanje $\vec{g} = -g\vec{e}_x$, jednačine veza možemo napisati u obliku:

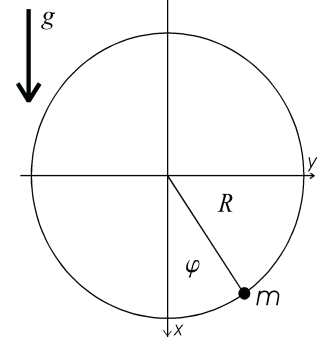
$$z = 0, \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Pošto postoje dve veze, sistem ima jedan stepen slobode, a za generalisanu koordinatu je zgodno izabrati ugao φ , koji vektor položaja čestice zaklapa sa x -osom (vidi sliku). Kako je $x = R \cos \varphi$, a $y = R \sin \varphi$, kinetička energija klatna je

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2,$$

a potencijalna energija $U = -mgx = -mgR \cos \varphi$, pa je la-granžijan

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + mgR \cos \varphi. \quad (60)$$



Ako su sile reakcije idealne, onda je zadovoljena Lagranževa jednačina, koja se u ovom slučaju svodi na oblik

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \sin \varphi = 0. \quad (61)$$

Ako pri kretanju ugao φ stalno ostaje vrlo mali, onda je $\sin \varphi \approx \varphi$, pa se jednačina (61) svodi na jednačinu tipa jednačine linearnog harmonijskog oscilatora (l.h.o):

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \varphi = 0,$$

čije je opšte rešenje

$$\varphi = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t + \alpha \right),$$

što znači da u tom slučaju klatno vrši male harmonijske oscilacije. U opštem slučaju jednačina (61) se može pojednostaviti ako se $\ddot{\varphi}$ napiše kao

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right),$$

tako da iz (61) dobijamo

$$d \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{g}{R} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{R} \cos \varphi = \text{const}.$$

Ako se poslednja dobijena jednačina pomnoži sa mR^2 , onda izraz sa leve strane tako dobijene jednačine predstavlja ukupnu mehaničku energiju matematičkog klatna, koja se, dakle, održava, tj.

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - mgR \cos \varphi = \text{const}. \quad (62)$$

Ovaj zaključak sledi i iz teoreme kinetičke energije, naime, pošto su veze stacionarne, rad sila reakcije (koje su ovde idealne) na mogućem pomeranju je jednak nuli, pa sledi da je $dT = dA = -dU$, tj. $d(T + U) = dE = 0$. Poslednje rezonovanje nije ničim specijalno vezano za slučaj matematičkog klatna, pa sasvim generalno važi da se **ukupna mehanička energija sistema sa stacionarnim vezama, u kojima su sile reakcije idealne, a aktivne sile konzervativne, održava**.

Jednačina (62) predstavlja diferencijalnu jednačinu prvog reda, koja dozvoljava razdvajanje promenljivih, tj. iz nje se lako dobija

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi + \frac{E}{mgR})}} = \sqrt{\frac{g}{R}} dt,$$

pa, ako uzmemo da je $\varphi(0) = 0$, direktno sledi

$$\sqrt{\frac{g}{R}}t = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi + \frac{E}{mgR})}},$$

što implicitno predstavlja konačnu jednačinu kretanja $\varphi(t)$, izraženu u kvadraturama. Integral sa desne strane poslednje jednačine se može izraziti preko elementarnih funkcija samo u slučaju kada je $E = mgR$. Naime, tada je

$$\sqrt{\frac{g}{R}}t = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi + 1)}} = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)},$$

a poslednji integral se pomoću trigonometrijske smene

$$\alpha = \text{tg}(\varphi/4)$$

lako svodi na tablični, tako da se pravolinijski dobija konačna jednačina kretanja u obliku

$$\varphi(t) = 4\text{arctg} \frac{e\sqrt{\frac{g}{R}}t - 1}{e\sqrt{\frac{g}{R}}t + 1}.$$

Iz dobijene konačne jednačine kretanja se vidi da za $t \rightarrow \infty$ ugao $\varphi \rightarrow \pi$, tj. materijalna tačka se asimptotski približava najvišem položaju na kružnici po kojoj se kreće. Zbog toga se ovakva vrsta kretanja matematičkog klatna naziva **asimptotsko kretanje**.

Ako je $-mgR < E < mgR$, sigurno postoji ugao $0 < \alpha < \pi$ takav da je $E = -mgR \cos \alpha$, pa se iz zakona održanja energije (62) vidi da se ugao φ u ovom slučaju može da se menja od $-\alpha$ do α , a za $\varphi = \pm\alpha$ kinetička energija je jednaka nuli. Klatno, dakle, u ovom slučaju osciluje između $-\alpha$ i α , pa se ovakva vrsta kretanja naziva **oscilatorno kretanje**. Može se pokazati da period ovakvih oscilacija za konačne amplitude α , za razliku od malih oscilacija, zavisi od amplitude.

Za energije veće od potencijalne energije klatna u najvišoj tački, mgR , klatno vrši tzv. **progresivno kretanje**. U najvišoj tački kružnice, klatno još uvek ima brzinu veću od nule, tako da može da prođe kroz tu tačku i nastavi da se kreće. I ovo kretanje je periodično i može se pokazati da period zavisi od energije (što je energija veća period je manji).

6.3 Jednodimenzioni konzervativni sistemi sa stacionarnim vezama

Ako su veze stacionarne i $n = 1$ jedina generalisana koordinata q se sigurno može izabrati tako da kinetička energija T ima oblik

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2,$$

a lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q).$$

Lagranževa jednačina onda ima oblik

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + \frac{dU}{dq} = 0 \quad (63)$$

i može se, slično kao u slučaju matematičkog klatna, transformisati tako da se dobije prvi integral kretanja koji je ekvivalentan zakonu održanja energije

$$E = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + U(q) = \text{const},$$

pomoću koga se mogu razdvojiti promenljive, odakle onda sledi i konačna jednačina kretanja u kvadraturama:

$$t = \int dq \sqrt{\frac{a(q)}{2(E - U(q))}}.$$

Neka za $q = q_0$ potencijalna energija ima ekstremum. Pošto je u toj tački $\frac{dU}{dq} = 0$ iz jednačine kretanja (63) sledi da $q = q_0$ odgovara ravnotežnom položaju posmatranog sistema. Pretpostavimo da smo izveli sistem iz tog ravnotežnog položaja, tako da je $q = q_0 + \eta$, gde je η mala veličina. Ako u Lagranževoj jednačini razvijemo sve veličine u red oko q_0 i zadržimo samo linearne članove (tj. izvršimo tzv. *linearizaciju* jednačine, pošto je η malo), dobijamo sledeću jednačinu

$$\ddot{\eta} + \frac{U''(q_0)}{a(q_0)}\eta = 0. \quad (64)$$

Kako je $a(q) > 0$ (pošto je $T \geq 0$), za $U''(q_0) > 0$ prethodna jednačina ima oblik jednačine za l.h.o., tj. sistem harmonijski osciluje oko takvog položaja ravnoteže. Drugim rečima, *ako položaj ravnoteže $q = q_0$ odgovara minimumu potencijalne energije, sistem se u tom položaju nalazi u stabilnoj ravnoteži*. Ako je $U''(q_0) < 0$, opšte rešenje poslednje jednačine je

$$\eta(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}, \quad \lambda^2 = -\frac{U''(q_0)}{a(q_0)},$$

odakle se vidi da se za $t \rightarrow \infty$ sistem beskonačno udaljava od ravnotežnog položaja, tj. položaj maksimuma potencijalne energije odgovara nestabilnoj ravnoteži.

7 Male oscilacije konzervativnih sistema sa stacionarnim vezama

7.1 Ležen–Dirihleova teorema

Posmatrajmo idealan holonoman sistem sa n stepeni slobode, na koji deluju samo konzervativne aktivne sile, a veze su stacionarne. Zbog stacionarnosti veza generalisane koordinate q_i se sigurno mogu izabrati tako da kinetička energija bude homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, a zbog konzervativnosti sila potencijalna energija U ne zavisi eksplicitno od vremena, tako da Lagranžijan sistema ima oblik

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q). \quad (65)$$

Neka u položaju određenom generalisanim koordinatama $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ potencijalna energija sistema ima minimum. To je sigurno i položaj ravnoteže, pošto Lagranževе jednačine za ovakav sistem imaju oblik

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \quad (66)$$

Naime, ako $q_i = q_i^0$, $i = 1, \dots, n$ jeste rešenje sistema Lagranževih jednačina, onda je $\dot{q}_i = 0$, odnosno $\ddot{q}_i = 0$, pa iz jednačina sledi da moraju biti zadovoljeni i uslovi

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad (67)$$

što je tačno, jer, po pretpostavci, U u tom položaju ima minimum. Pretpostavimo dalje da smo ovom sistemu, koji se prvobitno nalazio u ravnoteži u položaju $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ dodali malo energije, tako da je on počeo da se kreće. Uvedimo nove generalisane koordinate η_i koje opisuju za koliko se sistem pomerio iz položaja ravnoteže:

$$\eta_i = q_i - q_i^0. \quad (68)$$

Ako su vrednosti η_i male po apsolutnoj vrednosti, Lagranževu funkciju možemo razviti u Tejlorov red i zadržati se na prvim netrivialnim članovima. To, drugim rečima, znači da koeficijente $A_{ij}(q)$ treba aproksimirati njihovom vrednošću u $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$, a potencijalnu energiju treba razviti do članova kvadratnih po η_i , pošto linearni članovi otpadaju zbog uslova ekstremalnosti (67). Na taj način se za Lagranževu funkciju dobija izraz

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \eta_i \eta_j + \text{const}, \quad (69)$$

gde su koeficijenti a_{ij} i b_{ij} jednaki

$$a_{ij} = A_{ij}(q_0), \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_0}. \quad (70)$$

Jasno je da je

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad (71)$$

pa se onda Lagranževe jednačine svode na sistem

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{\eta}_j + b_{ij} \eta_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (72)$$

Ako pretpostavimo da rešenje ovakvog sistema diferencijalnih jednačina ima oblik

$$\eta_j(t) = A_j \cos(\omega t + \alpha), \quad (73)$$

onda, zbog

$$\ddot{\eta}_j(t) = -\omega^2 A_j \cos(\omega t + \alpha), \quad (74)$$

posle skraćivanja svih jednačina sa $\cos(\omega t + \alpha)$, dobijamo sistem od n homogenih linearnih algebarskih jednačina

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (75)$$

Ovakav sistem ima netrivialno rešenje (po amplitudama A_j) samo ako mu je determinanta jednaka nuli, tj. ako je zadovoljena jednačina

$$\det(-\omega^2 a_{ij} + b_{ij}) = 0. \quad (76)$$

Leva strana ove jednačine ima oblik polinoma stepena n po kvadratu frekvence ω , tako da jednačina ima n rešenja za ω^2 .

Neka je ω_k^2 bilo koje od n rešenja jednačine (76), a $A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}$ netrivialno rešenje sistema (75), koje se dobija kada se u njega zameni $\omega^2 = \omega_k^2$. Pomnožimo i -tu jednačinu sistema (75) i -tom amplitudom $A_i^{(k)}$ i prosumirajmo po i od 1 do n . Na taj način dobijamo jednačinu

$$\sum_{i,j=1}^n (-\omega_k^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{(k)} = 0, \quad (77)$$

odakle je

$$\omega_k^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(k)}}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(k)}}, \quad (78)$$

što je sigurno pozitivno, pošto su obe dvostruke sume u poslednjem količniku pozitivne. Naime,

$$U(A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}) - U(0, \dots, 0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(k)} \geq 0,$$

pošto potencijalna energija za $\eta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ ima minimum. Štaviše, pošto je bar jedna od amplituda $A_i^{(k)}$ različita od nule, važi stroga nejednakost. Slično,

$$T(A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(k)} > 0,$$

jer je kinetička energija po definiciji nenegativna veličina (a jednaka nuli samo kada su sve brzine jednake nuli)¹. Ako je ω_k^2 pozitivan broj, onda je ω_k realan broj, pa odgovarajuće partikularno rešenje sistema diferencijalnih jednačina (72) ima oblik

$$\eta_i^{(k)}(t) = A_i^{(k)} \cos(\omega_k t + \alpha_k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (79)$$

¹Strogo govoreći, ovo rezonovanje je tačno ako su sve amplitude $A_i^{(k)}$ realne, što ne možemo unapred znati. Međutim, korišćenjem osobina simetričnosti koeficijenata a_{ij} i b_{ij} , može se pokazati da su ove sume pozitivne i ako su amplitude kompleksni brojevi.

gde za ω_k možemo da uzmemo pozitivni koren broja ω_k^2 . Opšte rešenje sistema Lagranževih jednačina (72) je linearna kombinacija partikularnih rešenja:

$$\eta_i(t) = \sum_{k=1}^n C_k A_i^{(k)} \cos(\omega_k t + \alpha_k), \quad (80)$$

tj. odstupanja generalisanih koordinata od njihovih ravnotežnih vrednosti u okolini minimuma potencijalne energije sistema su linearne kombinacije periodičnih funkcija oblika $\cos(\omega_k t + \alpha_k)$. Drugim rečima, sistem vrši **male oscilacije** oko položaja sa minimalnom potencijalnom energijom, što znači da važi **Ležen–Dirihleova teorema**: *konfiguracija kojoj odgovara minimum potencijalne energije predstavlja položaj stabilne ravnoteže konzervativnog sistema sa stacionarnim vezama*. Brojevi C_k u opštem rešenju, zajedno sa fazama α_k , predstavljaju $2n$ neodređenih konstanta, koje se nalaze iz početnih uslova $\eta_i(0), \dot{\eta}_i(0)$, odnosno početnih uslova za generalisane koordinate q_i i generalisane brzine \dot{q}_i .

7.2 Normalne frekvence i koordinate

Pozitivni brojevi ω_k , $k = 1, \dots, n$, dobijeni rešavanjem jednačine (76) nazivaju se **normalne frekvence**. Uvedimo sada umesto koordinata η_i tzv. **normalne koordinate** Q_i , koje se definišu kao

$$Q_i = C_i \cos(\omega_i t + \alpha_i). \quad (81)$$

Pošto je

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} Q_k, \quad \dot{\eta}_i = \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} \dot{Q}_k, \quad (82)$$

Lagranževa funkcija (69) u normalnim koordinatama $L(Q, \dot{Q})$ jednaka je

$$\begin{aligned} L(Q, \dot{Q}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} \dot{Q}_k \sum_{l=1}^n A_j^{(l)} \dot{Q}_l - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} Q_k \sum_{l=1}^n A_j^{(l)} Q_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\dot{Q}_l \dot{Q}_k \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} \right) - Q_l Q_k \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\alpha_{kl} \dot{Q}_l \dot{Q}_k - \beta_{kl} Q_l Q_k \right), \end{aligned} \quad (83)$$

gde smo uveli oznake

$$\alpha_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)}, \quad \beta_{kl} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)}. \quad (84)$$

Amplitude $A_j^{(l)}$ su rešenja sistema (75) kada je $\omega = \omega_l$, tj. zadovoljavaju jednačine:

$$\sum_{j=1}^n (-\omega_l^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j^{(l)} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (85)$$

Pomnožimo svaku od ovih jednačina odgovarajućom amplitudom $A_i^{(k)}$ i prosumirajmo po i od 1 do n . Na taj način dobijamo jednačinu

$$\sum_{i,j=1}^n (-\omega_l^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j^{(l)} A_i^{(k)} = 0, \quad (86)$$

odakle je

$$\omega_l^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)}}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)}} = \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}}, \quad (87)$$

tj.

$$\beta_{kl} = \omega_l^2 \alpha_{kl}. \quad (88)$$

Analogno bismo mogli da dobijemo i relaciju

$$\beta_{lk} = \omega_k^2 \alpha_{lk}. \quad (89)$$

Međutim, pošto je $a_{ij} = a_{ji}$, koeficijenti α_{kl} imaju osobinu

$$\alpha_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} A_i^{(k)} A_j^{(l)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j^{(k)} A_i^{(l)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(l)} A_j^{(k)} = \alpha_{lk} \quad (90)$$

i, zbog $b_{ij} = b_{ji}$, potpuno analogno

$$\beta_{kl} = \beta_{lk}. \quad (91)$$

Oduzimanjem jednačina (88) i (89) dobijamo:

$$(\omega_l^2 - \omega_k^2) \alpha_{lk} = 0, \quad (92)$$

odakle za $\omega_l \neq \omega_k$ sledi $\alpha_{kl} = 0$, pa je onda, zbog (88), i $\beta_{kl} = 0$. Znači, ako su svi koreni jednačine (76) jednostruki, dvostruka suma u izrazu (83) za lagranžijan svodi se na jednu sumu oblika

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_{kk} \dot{Q}_k^2 - \beta_{kk} Q_k^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_{kk} (\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2 Q_k^2), \quad (93)$$

tj. *lagranžijan se korišćenjem normalnih koordinata svodi na zbir od n međusobno nezavisnih sabiraka, od kojih svaki ima oblik lagranžijana linearnog harmonijskog oscilatora (58) čija je frekvencija jednaka odgovarajućoj normalnoj frekvenciji*. Sličan zaključak se može izvesti i u slučaju kada jednačina (76) ima višestruke korene.

Primer...

8 Centralno kretanje

Kažemo da čestica vrši **centralno kretanje** ako je u svakom trenutku njen vektor položaja \vec{r} kolinearan sa silom \vec{F} koja deluje na nju. Sila \vec{F} se u tom slučaju naziva **centralnom silom** i ima u najopštijem slučaju oblik

$$\vec{F} = F(\vec{r}, \vec{v}, t) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (94)$$

Znači, pravac sile koja deluje na česticu pri ovakvom kretanju uvek prolazi kroz tačku u odnosu na koju određujemo položaj čestice (koordinatni početak). U kontekstu problema centralnog kretanja tu tačku ćemo zvati **centrom sile**.

8.1 Zakoni održanja i jednačine kretanja

Pošto je centralna sila kolinearna sa vektorom položaja čestice, moment te sile u odnosu na centar je jednak nuli, a to, po teoremi momenta impulsa (30), znači da se moment impulsa \vec{M} čestice pri centralnom kretanju ne menja. Odatle sledi da se čestica kreće u jednoj te istoj ravni, normalnoj na vektor \vec{M} , određenoj početnim vektorom položaja i početnom brzinom čestice. To dalje znači da se efektivno čestica kreće kao da ima dva stepena slobode, pa je najzgodnije za generalisane koordinate izabrati polarne koordinate r i φ u ravni u kojoj se čestica kreće. Ako vektore položaja i brzine izrazimo u polarnim koordinatama, za moment impulsa dobijamo izraz

$$\vec{M} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = mr\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z, \quad (95)$$

pa iz zakona održanja momenta impulsa sledi

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (96)$$

U daljem izlaganju ćemo posmatrati specijalan slučaj centralne sile, čiji intenzitet zavisi samo od rastojanja r od centra sile, tj. slučaj kada je sila oblika

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (97)$$

Elementarni rad dA koji izvrši ovakva sila jednak je

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r)dr = -d \int (-F(r))dr, \quad (98)$$

što znači da je ona konzervativna, a odgovarajuća potencijalna energija je

$$U(r) = - \int F(r)dr. \quad (99)$$

To dalje znači da pri ovakvom kretanju važi zakon održanja ukupne mehaničke energije. Kinetička energija čestice u polarnim koordinatama ima oblik

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad (100)$$

pa zakon održanja energije ima oblik

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const}. \quad (101)$$

Ako sada $\dot{\varphi}$ izrazimo iz zakona održanja momenta impulsa (96), pa ga zamenimo u prethodni izraz za energiju dobijamo

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \quad (102)$$

gde smo sa $U_{\text{eff}}(r)$ označili tzv. **efektivnu potencijalnu energiju**, koja je po definiciji jednaka

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (103)$$

Na taj način smo ukupnu energiju napisali u obliku analognom izrazu za ukupnu energiju čestice pri jednodimenzionom kretanju, pa nam tako napisan zakon održanja energije daje mogućnost da kvalitativno analiziramo centralno kretanje.

Primer... Keplerovo kretanje

Osim kvalitativne analize, pomoću zakona održanja energije (102) možemo, barem u principu, naći i konačne jednačine kretanja. Naime, iz (102) direktno sledi

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}, \quad (104)$$

što implicitno zaista daje jednačinu kretanja $r(t)$. Kada nađemo $r(t)$, onda je, u principu, moguće naći i $\varphi(t)$, pomoću zakona održanja momenta impulsa (96), iz kog sledi

$$\varphi(t) = \int dt \frac{M}{mr^2(t)}. \quad (105)$$

Takođe, iz zakona održanja (96) i (102) moguće je i direktno naći jednačinu trajektorije u implicitnom obliku

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{U_{\text{eff}}(r)}{E}}}, \quad (106)$$

što nije teško proveriti.

8.2 Lagranžev formalizam i Bineov obrazac

Lagranževa funkcija za ovakav sistem ima oblik

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r), \quad (107)$$

pa je odatle Lagranževa jednačina koja odgovara koordinati r :

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{m} \frac{dU}{dr} = 0. \quad (108)$$

Pošto je koordinata φ ciklična, Lagranževa jednačina koja joj odgovara odmah daje jedan integral kretanja:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \quad (109)$$

što se poklapa sa zakonom održanja momenta impulsa (96). Ako se u prvoj Lagranževnoj jednačini \ddot{r} izrazi kao

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 \right)$$

i $\dot{\varphi}$ zameni iz zakona održanja momenta impulsa, lako se pokazuje da se dobija jednačina koja se može jednom prointegraliti po r , što ponovo daje zakon održanja energije (102).

Iz Lagranževe jednačine (108) moguće je, međutim, dobiti i diferencijalnu jednačinu trajektorije, ako se primeni sledeća transformacija:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad (110)$$

gde se, zatim, φ izrazi iz (109), tako da je dalje

$$\dot{r} = \frac{M}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{M}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (111)$$

odnosno

$$\ddot{r} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{M}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{M^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (112)$$

Kada se ovakav izraz za \ddot{r} zameni u Lagranževu jednačinu, ona se jednostavno transformiše u oblik

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{r^2 m}{M^2} F(r), \quad (113)$$

koji je poznat kao **Bineov obrazac**, a koji predstavlja diferencijalnu jednačinu trajektorije čestice, koja se kreće u polju centralne sile $\vec{F} = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r$.

8.3 Kretanje u polju privlačne Keplerove sile $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$

Za česticu mase m , koja se kreće u polju privlačne Keplerove sile $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ Bineov obrazac ima oblik

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{km}{M^2}. \quad (114)$$

Opšte rešenje ove jednačine ima oblik

$$\frac{1}{r} = A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi + \frac{km}{M^2}, \quad (115)$$

a konstante A_1 i A_2 ćemo uvesti tako da r ima minimalnu vrednost za $\varphi = 0$. Drugim rečima, treba da bude zadovoljeno

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad (116)$$

pa iz jednačine (115) sledi

$$-\frac{1}{r^2} \left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = A_2 = 0, \quad (117)$$

što znači da je

$$r = \frac{1}{A_1 \cos \varphi + \frac{km}{M^2}}, \quad (118)$$

odnosno

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (119)$$

Drugim rečima, trajektorija čestice je konusni presek, čiji su parametri p i ekscentricitet redom jednaki

$$p = \frac{M^2}{km}, \quad \varepsilon = A_1 \frac{M^2}{km}. \quad (120)$$

Pošto je

$$\begin{aligned} E &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = U_{\text{eff}}(r_{\min}) = -k \left(A_1 + \frac{km}{M^2} \right) + \frac{M^2}{2m} \left(A_1 + \frac{km}{M^2} \right)^2 \\ &= -k \frac{km}{M^2} (1 + \varepsilon) + \frac{M^2}{2m} \left(\frac{km}{M^2} \right)^2 (1 + \varepsilon)^2 = \frac{k^2 m}{2M^2} (\varepsilon^2 - 1) \end{aligned} \quad (121)$$

sledi da se ekscentritet ε u funkciji ukupne energije E može izraziti kao

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2 m}}, \quad (122)$$

odakle se vidi da energija određuje po kakvom konusnom preseku se čestica kreće. Naime, ako je

1. $E = -\frac{k^2 m}{2M^2}$, onda je $\varepsilon = 0$, pa je trajektorija kružnica;
2. $-\frac{k^2 m}{2M^2} < E < 0$, onda je $\varepsilon < 1$, pa je trajektorija elipsa;
3. $E = 0$, onda je $\varepsilon = 1$, pa je trajektorija parabola;
4. $E > 0$, $\varepsilon > 1$, a trajektorija je hiperbola.

Razmotrimo detaljnije slučaj kretanja po elipsi. Pošto je $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$ jednačinu trajektorije (119) u Dekartovim koordinatama prepisujemo kao

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - \varepsilon x,$$

odakle kvadriranjem dobijamo

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2,$$

odnosno

$$x^2 + \frac{2p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} x + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Poslednja jednačina se može prepisati u obliku

$$\frac{\left(x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{\left(\frac{p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2} = 1, \quad (123)$$

što za $\varepsilon < 1$ zaista predstavlja jednačinu elipse, sa poluosama

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (124)$$

Ako je čestica koju smo razmatrali planeta u Sunčevom sistemu, koja se kreće pod delovanjem Sunčeve gravitacione sile (dok se interakcija sa ostalim telima zanemaruje), onda smo na ovaj način izveli *I Keplerov zakon*, prema kome se svaka planeta kreće po elipsi u čijoj se žiži nalazi Sunce. *II Keplerov zakon* je samo posledica zakona održanja impulsa. Naime, sektorska brzina \vec{S} svake planete je proporcionalna njenom momentu impulsa, pošto je

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{M} \quad (125)$$

pa iz zakona održanja momenta impulsa, koji važi za svaku centralnu silu, sledi da radijus vektor planete u odnosu na Sunce za isto vreme uvek prebriše istu površinu, tj. sektorska brzina planete pri njenom obilaženju oko Sunca je konstantna. *III Keplerov zakon*, po kome je odnos kuba velike poluose a i kvadrata perioda τ obilaženja planete oko Sunca isti za sve planete, takođe se može isvesti uz pomoć gore dobijenih rezultata. Ako formiramo količnik a^3/τ^2 dobijamo

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{a^3}{\left(\frac{\pi ab}{S}\right)^2} = \frac{aS^2}{\pi^2 b^2} = \frac{k}{4\pi^2 m}, \quad (126)$$

a pošto je za kretanje planeta pod delovanjem Sunčeve gravitacije $k = \gamma m m_S$, gde je γ gravitaciona konstanta, a m_S masa Sunca, sledi da je

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{\gamma m_S}{4\pi^2}, \quad (127)$$

što je zaista isto za sve planete Sunčevog sistema.

9 Problem dva tela

Razmotrimo izolovan sistem koji se sastoji od dve čestice masa m_1 i m_2 . Ako su radijus vektori čestica redom \vec{r}_1 i \vec{r}_2 , a sila kojom čestica 2 deluje na česticu 1 jednaka \vec{F} , onda jednačine kretanja ovih čestica imaju oblik

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}. \quad (128)$$

Ako sada umesto vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 uvedemo radijus vektor centra mase \vec{r}_c i vektor relativnog položaja čestica \vec{r} :

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (129)$$

onda sabiranjem jednačina (128) dobijamo jednačinu

$$m \ddot{\vec{r}}_c = 0, \quad m = m_1 + m_2, \quad (130)$$

a deljenjem svake od jednačina (128) odgovarajućom masom i oduzimanjem

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m}, \quad (131)$$

Jednačina (130) nam kaže da se pri kretanju ovakvog sistema njegov centar mase kreće uniformno (što, naravno, važi za bilo kakav izolovani sistem). Jednačina (131) ima oblik jednačine kretanja čestice mase μ , koja se kreće pod delovanjem sile \vec{F} . Masa μ naziva se *redukovana masa* (pošto je manja i od m_1 i od m_2). Ako smo u stanju da rešimo ovaj jednoč-estični problem, onda sigurno možemo da rešimo i prvobitni dvo-čestični problem. Kad nađemo vektore \vec{r}_c i \vec{r} kao funkcije vremena, onda rešavanjem sistema (129) nalazimo položaje čestica 1 i 2:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \frac{m_2}{m} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c - \frac{m_1}{m} \vec{r} \quad (132)$$

Uvođenjem vektora centra mase i vektora relativnog položaja postizemo ne samo razdvajanje promenljivih u jednačinama kretanja, već i u izrazima za moment impulsa \vec{M} i kinetičku energiju sistema T . Naime, ako u izraz za ukupni moment impulsa sistema

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

zamenimo (132), lako se pokazuje da mešoviti članovi otpadaju, tako da je moment impulsa jednak

$$\vec{M} = \vec{r}_c \times m \dot{\vec{r}}_c + \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}. \quad (133)$$

Slično se za kinetičku energiju

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

dobija izraz

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}_c^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2. \quad (134)$$

Pretpostavimo sada da je sila kojom čestice interaguju oblika

$$\vec{F} = F(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (135)$$

Ovakva sila jeste konzervativna, što se lako vidi ako izračunamo ukupni rad dA koji se izvrši pri pomeranju čestica za $d\vec{r}_1$ i $d\vec{r}_2$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r)dr = -d \int (-F(r))dr = -dU(r).$$

Ako za generalisane koordinate izaberemo Dekartove koordinate čestica 1 i 2, onda lagranžijan sistema ima oblik

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (136)$$

Ako, međutim, za generalisane koordinate izaberemo Dekartove komponente vektora centra mase \vec{r}_c i vektora relativnog položaja \vec{r} , onda lagranžijan ima oblik

$$L(\vec{r}_c, \vec{r}, \dot{\vec{r}}_c, \dot{\vec{r}}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_c^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r). \quad (137)$$

Problem kretanja ovog sistema se onda svodi na problem rešavanja kretanja čestice redukovane mase μ u polju centralne sile $\vec{F}(r)$.

Sistem centra mase

Pošto se centar mase razmatranog sistema kreće uniformno, za njega se može vezati inercijalni sistem reference, koji ćemo zvati sistem centra mase (CM). Radijus vektore čestica 1 i 2 u ovom sistemu označavaćemo redom sa \vec{r}_1^* i \vec{r}_2^* . Radijus vektor centra mase \vec{r}_c^* u ovom sistemu je, naravno, jednak nuli $\vec{r}_c^* = 0$, dok je vektor relativnog položaja isti u svim inercijalnim sistemima $\vec{r}^* = \vec{r}$. Imajući to u vidu, iz relacija (132) dobijamo položaje čestica u sistemu CM u funkciji vektora \vec{r} :

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{m}\vec{r}, \quad \vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{m}\vec{r}. \quad (138)$$

Impulsi čestica u ovom sistemu su jednakog intenziteta i pravca, a suprotnog smera:

$$m_1\dot{\vec{r}}_1^* = -m_2\dot{\vec{r}}_2^* = \mu\dot{\vec{r}} = \vec{p}^*. \quad (139)$$

Ukupni moment impulsa \vec{M}^* i ukupna kinetička energija T^* čestica su, prema izrazima (133) i (134), jednaki

$$\vec{M}^* = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}^*, \quad T^* = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{p}^{*2}}{2\mu}. \quad (140)$$

Često je zgodno da se problem kretanja ovakvog sistema reši prvo u sistemu CM. Da bismo onda našli rešenje u nekom drugom referentnom sistemu, potrebne su nam veze između relevantnih veličina u ta dva sistema. Razmotrimo sistem u kome je radijus vektor CM jednak vektoru \vec{r}_c . Položaji čestica u tom sistemu su onda

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \vec{r}_1^*, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c + \vec{r}_2^*, \quad (141)$$

a brzine

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}_1^*, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}_2^*. \quad (142)$$

Impulsi čestica u tom sistemu su, prema (139), jednaki

$$\vec{p}_1 = m_1\dot{\vec{r}}_1 = \mu\dot{\vec{r}}_c + \vec{p}^*, \quad \vec{p}_2 = m_2\dot{\vec{r}}_2 = \mu\dot{\vec{r}}_c - \vec{p}^*, \quad (143)$$

a ukupni impuls \vec{p} , moment impulsa \vec{M} i ukupna kinetička energija T :

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}_c, \quad \vec{M} = m\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \vec{M}^*, \quad T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_c^2 + T^*. \quad (144)$$

Primer

Razmotrimo problem kretanja dve materijalne tačke pod delovanjem njihovog uzajamnog gravitacionog privlačenja. Jednačina (131) za taj slučaj ima oblik

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = \frac{\gamma \mu m}{r^3} \vec{r}, \quad (145)$$

što se poklapa sa jednačinom za kretanje čestice mase μ pod delovanjem gravitacione sile nepokretne čestice mase m . Specijalno, za eliptičnu orbitu po izrazu (126) dobijamo

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{\gamma m}{4\pi^2},$$

gde je sada a velika poluosa "relativne" trajektorije. Ako ovu relaciju primenimo na sistem Sunce-planeta zaključujemo da III Keplerov zakon nije sasvim tačan, tj. tačno važi:

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{\gamma m_S}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m_P}{m_S}\right).$$

Ovo odstupanje je teško detektovati, pošto je masa Sunca m_S mnogo veća od mase m_P bilo koje planete u Sunčevom sistemu.

10 Rasejanja

Jedna od najčešće primenjivanih metoda za dobijanje informacija o strukturi malih tela je njihovo bombardovanje česticama i merenje broja čestica koje se pri tome raseju u raznim pravcima. Ugaona raspodela rasejanih čestica zavisi od oblika mete i od prirode sila između čestica i mete. Da bismo mogli da interpretiramo rezultate ovakvih eksperimenata, potrebno je da znamo kako se izračunava ugaona raspodela čestica ako su sile poznate.

Razmotrićemo prvo jednostavan slučaj kada je meta nepokretna čvrsta idealno elastična lopta radijusa R , na koju naleće homogen paralelan snop čestica. Neka je *fluks* čestica u snopu, tj. broj čestica koje u jedinici vremena prođu kroz jediničnu površinu normalnu na pravac snopa, jednak f . Onda je broj čestica koje u jedinici vremena pogode loptu jednak

$$w = f\sigma, \quad (146)$$

gde je σ poprečni presek mete, tj.

$$\sigma = \pi R^2. \quad (147)$$

Razmotrimo sada jednu od čestica iz snopa. Neka je najkraće rastojanje između pravca njene brzine pre sudara i centra mete (tzv. *parametar sudara*) jednako b , a intenzitet brzine v (vidi sliku). Onda je ugao α , koji brzina u trenutku sudara sa loptom zaklapa sa odgovarajućom normalom na površinu lopte, određen relacijom

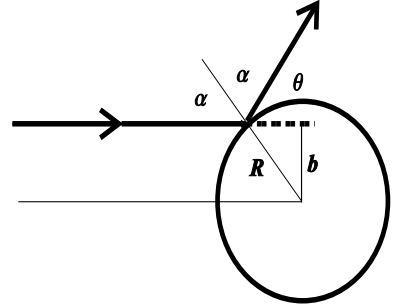
$$b = R \sin \alpha.$$

Pošto se čestica apsolutno elastično odbija, ugao θ za koji se promeni pravac brzine prilikom sudara, tzv. *ugaona rasejanja*, jednak je $\theta = \pi - 2\alpha$, pa je

$$b = R \cos \frac{\theta}{2}. \quad (148)$$

Sada možemo da izračunamo broj čestica koje se raseju u oblast oko pravca određenog uglovima θ i φ , sa intervalom $d\theta$ i $d\varphi$. Čestice čiji je ugao rasejanja između θ i $\theta+d\theta$ (nezavisno od ugla φ) su one čiji je parametar sudara bio između b i $b+db$, gde je db jednako

$$db = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta. \quad (149)$$



Prilikom rasejanja ne dolazi do promene ugla φ , pa je broj čestica koji nas zanima jednak broju čestica koje pre sudara prolaze kroz mali deo $d\sigma$ poprečnog preseka upadnog snopa, koji je jednak

$$d\sigma = b|db|d\varphi, \quad (150)$$

tj. čestice koje prođu kroz taj mali deo poprečnog preseka snopa se raseju upravo u zadatu oblast (vidi sliku). Zamenjujući b i db u poslednji izraz dobijamo

$$d\sigma = \frac{1}{4}R^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (151)$$

Broj čestica koje u jedinici vremena prođu kroz ovu oblast, a samim tim se i raseju u uočeni pravac jednak je

$$dw = f d\sigma \quad (152)$$

i on može da se meri malim detektorom postavljenim u tom pravcu, a na relativno velikom rastojanju L od mete ($L \gg R$). Zato je potrebno izraziti ovaj rezultat u funkciji površine $dS = L^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ takvog detektora. Imajući u vidu da je prostorni ugao $d\Omega$ koji odgovara oblasti u koju se čestice rasejavaju upravo jednak

$$d\Omega = \frac{dS}{L^2},$$

broj dw možemo da napišemo u obliku

$$dw = f \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dS}{L^2}. \quad (153)$$

Veličina $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ naziva se **diferencijalni presek rasejanja**. Diferencijalni presek rasejanja, dakle, predstavlja odnos broja čestica koje se u jedinici vremena raseju u jedinični prostorni ugao i upadnog fluksa čestica. U specijalnom slučaju koji smo ovde razmatrali diferencijalni presek rasejanja je jednak $R^2/4$, dok se ukupni presek rasejanja $\sigma = \pi R^2$ tačno dobija njegovom integracijom po svim prostornim uglovima (tj. u ovom slučaju jednostavnim množenjem sa punim prostornim uglom 4π).

Raderfordova formula

Razmotrimo problem rasejanja u polju odbojne Keplerove sile $\vec{F} = \kappa/r^2 \vec{e}_r$, gde je $\kappa > 0$. Bineov obrazac za ovaj slučaj ima oblik jednačine

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m\kappa}{M^2},$$

čije je opšte rešenje, uz zahtev da se ugao φ meri od položaja u kome je čestica najbliža centru sile,

$$r = \frac{1}{C \cos\varphi - \frac{m\kappa}{M^2}}. \quad (154)$$

Kako je efektivna potencijalna energija u ovom slučaju jednaka

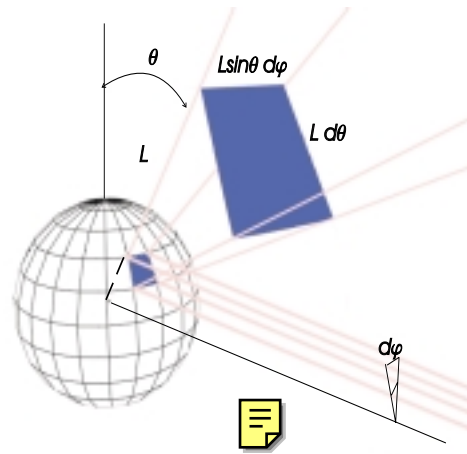
$$U_{\text{eff}} = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\kappa}{r}, \quad (155)$$

jasno je da je moguće samo transfinitno kretanje. Ako intenzitet brzine čestice na beskonačno velikim rastojanjima od centra sile označimo sa v_∞ , ukupna energija čestice je

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

a intenzitet momenta impulsa je

$$M = mbv_\infty,$$



gde je b parametar rasejanja, tj. najkraće rastojanje između centra sile i pravca brzine čestice na beskonačno velikim rastojanjima od njega. Jednačina trajektorije (154) posle zamene izraza za moment impulsa dobija oblik

$$r = \frac{1}{C \cos \varphi - \frac{\kappa}{mv_{\infty}^2 b^2}}. \quad (156)$$

Za $r \rightarrow \infty$ efektivna potencijalna energija teži nuli, pa energija teži vrednosti $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$, tj.

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} \dot{r}^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \right)^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{dr}{d\varphi} \frac{M}{mr^2} \right)^2.$$

Iz jednačine (156) i izraza za moment impulsa dalje sledi

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} C^2 b^2 v_{\infty}^2 \sin^2 \varphi(r) = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 b^2 C^2 \sin^2 \alpha,$$

gde je $\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi$. Odatle je

$$C = \frac{1}{b \sin \alpha},$$

a kako je iz jednačine trajektorije

$$\cos \alpha = \frac{\kappa}{Cmv_{\infty}^2 b^2},$$

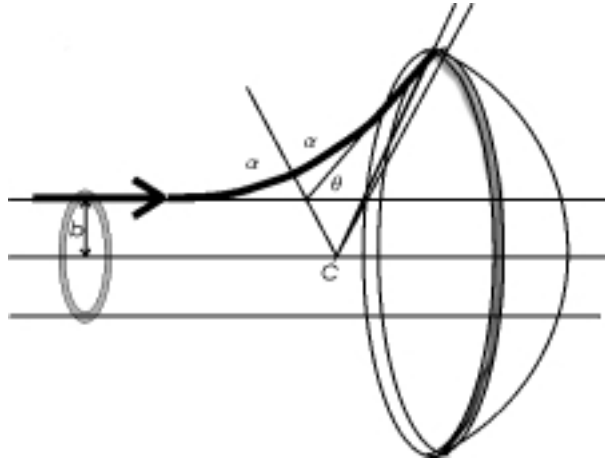
sledi da je

$$b = \frac{\kappa}{mv_{\infty}^2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa}{mv_{\infty}^2} \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\kappa}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Na taj način smo našli vezu između parametra sudara b i ugla rasejanja θ , pa možemo lako da izračunamo diferencijalni presek rasejanja:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b|db|d\varphi}{\sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{\kappa}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}.$$

Ovaj rezultat, primenjen na slučaj rasejanja čestice naelektrisanja q , koja naleće na nepokretnu česticu naelektrisanja q' , kada je $\kappa = qq'/(4\pi\epsilon_0)$, u literaturi je poznat kao *Raderfordova formula*.



11 Kruto telo

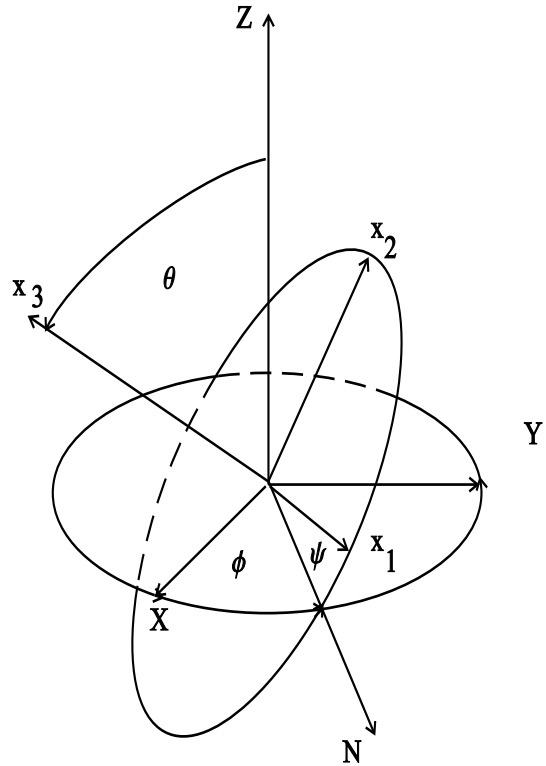
Kruto telo predstavlja sistem čestica čija se međusobna rastojanja ne menjaju u toku kretanja. Položaj krutog tela je u svakom trenutku određen položajem tri njegove tačke, koje ne leže na istoj pravoj. Ako su Dekartove koordinate tih tačaka (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) i (x_3, y_3, z_3) , onda se uslov nepromenljivosti rastojanja između njih izražava u obliku sledeće tri jednačine:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - R_{12}^2 &= 0, \\(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - R_{32}^2 &= 0, \\(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - R_{13}^2 &= 0,\end{aligned}$$

u kojima su R_{12} , R_{32} i R_{13} rastojanja između uočenih tačaka. Ove tri jednačine se mogu shvatiti kao jednačine veza, što znači da je od 9 Dekartovih koordinata uočene trojke tačaka, dovoljno $n = 9 - 3 = 6$ koordinata za potpuno opisivanje položaja krutog tela u bilo kom trenutku vremena, tj. broj stepeni slobode slobodnog krutog tela je 6.

11.1 Ojlerovi uglovi

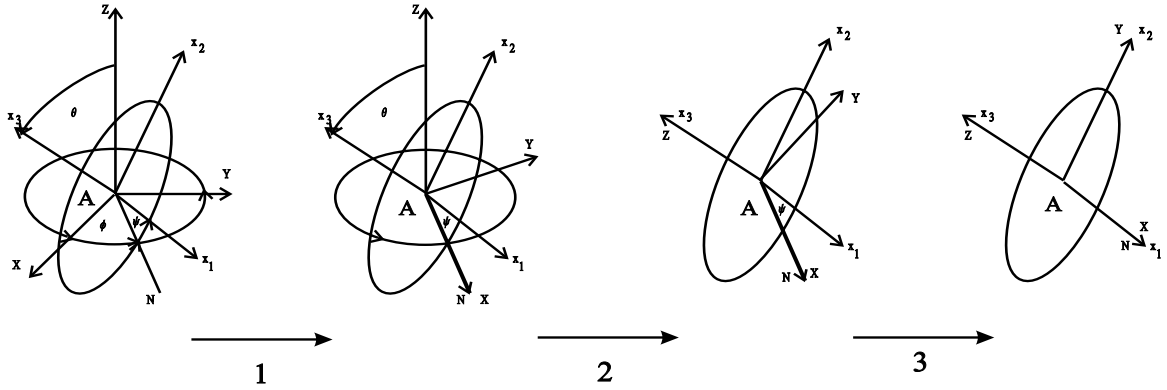
Uobičajeno je da se za kruto telo veže jedan koordinatni sistem $Ax_1x_2x_3$, koji se naziva **sopstveni sistem krutog tela**. Koordinatni početak A ovog sistema naziva se **pol krutog tela**. Za generalisane koordinate krutog tela se najčešće uzimaju Dekartove koordinate njegovog pola i tzv. **Ojlerovi uglovi** koji se definišu na sledeći način. Neka je $AXYZ$ koordinatni sistem čije su ose paralelne osama laboratorijskog sistema, a čiji se koordinatni početak poklapa sa polom krutog tela A . Prava po kojoj se seku ravni AXY i Ax_1x_2 naziva se **čvorna (ili nodalna) linija**. Ugao koji čvorna linija zaklapa sa pozitivnim pravcem AX ose označićemo sa φ , ugao koji čvorna linija zaklapa sa pozitivnim pravcem Ax_1 ose označićemo sa ψ , a ugao koji zaklapaju ose AZ i Ax_3 sa θ . Ovako definisani uglovi φ , ψ i θ predstavljaju Ojlerove uglove (vidi sliku).



11.2 Ojlerova i Šalova teorema

Sistem $AXYZ$ može se prevesti u sopstveni sistem $Ax_1x_2x_3$ krutog tela pomoću tri uzastopne rotacije na sledeći način:

1. prvo se sistem $AXYZ$ oko AZ ose zarotira za ugao φ , čime se poklope AX osa i čvorna linija;
2. zatim se tako dobijeni sistem zarotira oko čvorne linije za ugao θ , čime se osa AZ dovede do poklapanja sa Ax_3 osom pokretnog sistema;
3. konačno, ravan AXY zarotira se oko Ax_3 ose za ugao ψ , čime se AX osa poklopi sa Ax_1 osom i, naravno, AY osa sa osom Ax_2 .



Pošto je kompozicija tri rotacije takođe rotacija, sledi da se sistem XYZ može prevesti u sistem $Ax_1x_2x_3$ jednom rotacijom oko ose koja prolazi kroz tačku A . Drugim rečima, *bilo kakvo kretanje krutog tela pri kome jedna njegova tačka ostaje nepokretna ekvivalentno je jednoj rotaciji oko ose koja sadrži tu nepokretnu tačku*, što predstavlja tvrđenje **Ojlerove teoreme**. Pošto se laboratorijski sistem $OXYZ$ translacijom za vektor \vec{r}_A prevodi u sistem $AXYZ$, onda za *bilo kakvo kretanje* važi **Šalova teorema**: *bilo kakvo kretanje krutog tela ekvivalentno je kompoziciji jedne translacije za vektor za koji se pomeri jedna njegova proizvoljno izabrana tačka i jedne rotacije oko ose koja prolazi kroz tu tačku*. Sada je jasno da $x_A, y_A, z_A, \varphi, \psi$ i θ zaista određuju položaj krutog tela, tj. mogu se izabrati za generalisane koordinate pri proizvoljnom slobodnom kretanju krutog tela.

11.3 Ugaona brzina

Uočimo položaj krutog tela u trenutku t , a zatim u trenutku $t+dt$. Tačka krutog tela čiji je vektor položaja $\vec{r}_\nu = \vec{r}_A + \vec{r}'_\nu$ u laboratorijskom sistemu za vreme dt pomeri se za

$$d\vec{r}_\nu = d\vec{r}_A + d\vec{r}'_\nu,$$

gde je $d\vec{r}_A$ pomeraj koji odgovara translaciji, a $d\vec{r}'_\nu$ pomeraj koji odgovara rotaciji, u smislu Šalove teoreme. Osa rotacije prolazi kroz pol A i neka je njen pravac određen ortom \vec{n} . Ako se za vreme dt kruto telo zarotira za mali ugao $d\alpha$ oko te ose, onda je

$$d\vec{r}'_\nu = d\vec{\alpha} \times \vec{r}'_\nu,$$

gde je $d\vec{\alpha} = d\alpha \vec{n}$ (vidi sliku). Iz poslednje relacije sledi

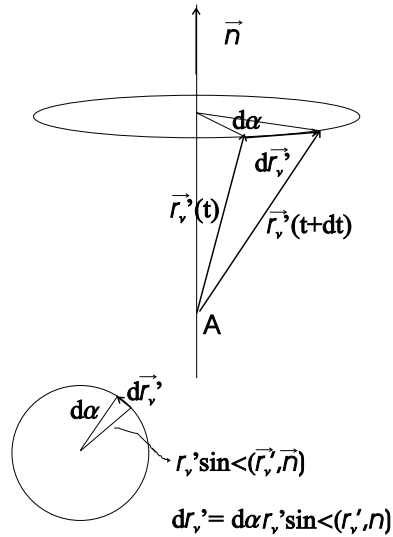
$$\vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_\nu, \quad (157)$$

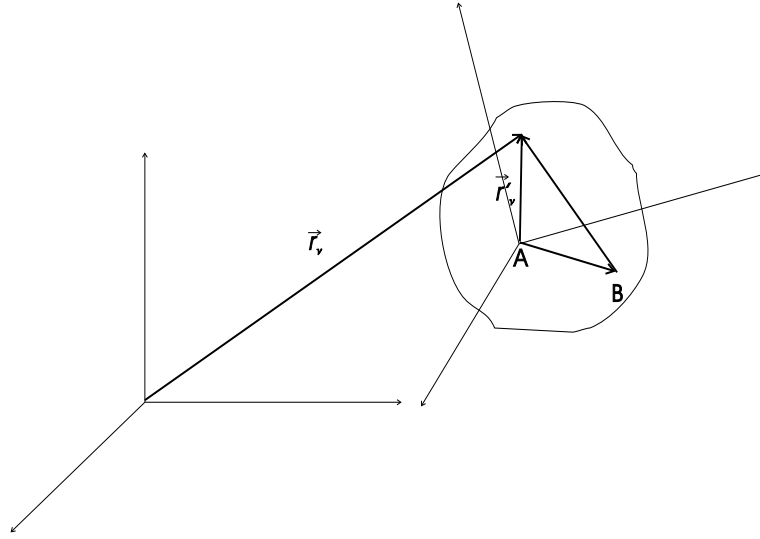
gde smo sa $\vec{\omega}$ označili **ugaonu brzinu**, koja je po definiciji jednaka

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}. \quad (158)$$

Ugaona brzina je karakteristika kretanja krutog tela kao celine i ne zavisi od izbora pola. Pokazaćemo to, pretpostavljajući suprotno, tj. pretpostavljajući da ugaona brzina zavisi od izbora pola. Ako za pol izaberemo tačku A , onda je brzina neke druge tačke B krutog tela, prema izrazu (157) jednaka

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AB}, \quad (159)$$





gde je $\vec{\omega}_1$ ugaona brzina krutog tela, kada je pol u A . Slično, brzina tačke ν jednaka je

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_\nu.$$

Ako za pol izaberemo tačku B , onda je brzina tačke ν , ponovo po (157), jednaka

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \times (\vec{r}_\nu - \vec{AB}) = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{r}_\nu - \vec{AB}),$$

gde smo iskoristili i (159). Izjednačavanjem poslednja dva izraza dobijamo

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{AB} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{r}_\nu - \vec{AB}) = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_\nu$$

odakle je

$$0 = (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times (\vec{AB} - \vec{r}_\nu).$$

Poslednja jednakost važi za bilo koje \vec{r}_ν , što je moguće jedino ako je $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$, tj. jedino kada ugaona brzina zaista ne zavisi od izbora pola.

Pošto se pri posmatranom kretanju kruto telo zarotira za mali ugao, sledi da je

$$d\vec{\alpha} = d\varphi \vec{e}_Z + d\theta \vec{e}_N + d\psi \vec{e}_3,$$

pa se ugaona brzina može izraziti kao

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_Z + \dot{\theta} \vec{e}_N + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (160)$$

Pomoću ovog izraza moguće je naći komponente ugaone brzine bilo u laboratorijskom, bilo u sistemu vezanom za kruto telo. Ovde ćemo pokazati kako se nalaze komponente $\vec{\omega}$ u sistemu vezanom za kruto telo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi}(\vec{e}_Z)_1 + \dot{\theta}(\vec{e}_N)_1 \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}(\vec{e}_Z)_2 + \dot{\theta}(\vec{e}_N)_2 \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}(\vec{e}_Z)_3 + \dot{\theta}(\vec{e}_N)_3 + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Iz definicije čvorne linije (vidi sliku) sledi da je

$$\vec{e}_N = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2,$$

pa je $(\vec{e}_N)_1 = \cos \psi$, $(\vec{e}_N)_2 = -\sin \psi$ i $(\vec{e}_N)_3 = 0$. Komponente vektora \vec{e}_Z mogu se dobiti tako što se matricom koja odgovara ukupnoj rotaciji kojom se koordinatni sistem $AXYZ$ prevodi u sistem $Ax_1x_2x_3$ deluje na kolonu koja

odgovara tom vektoru u sistemu XYZ . Kako je ukupna rotacija kompozicija tri rotacije, komponente \vec{e}_Z dobijamo kao

$$\begin{pmatrix} (\vec{e}_Z)_1 \\ (\vec{e}_Z)_2 \\ (\vec{e}_Z)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pri čemu matrice 3×3 sa desne strane odgovaraju redom (s desna na levo) rotacijama oko: AZ ose za ugao φ , čvorne linije za ugao θ i ose Ax_3 za ugao ψ . Odatle direktno dobijamo

$$\begin{pmatrix} (\vec{e}_Z)_1 \\ (\vec{e}_Z)_2 \\ (\vec{e}_Z)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

pa su komponente ugaone brzine

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (161)$$

11.4 Moment impulsa, kinetička energija i tenzor inercije krutog tela

Izračunajmo moment impulsa \vec{M} krutog tela u odnosu na koordinatni početak O laboratorijskog sistema:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \sum_{\nu} (\vec{r}_A + \vec{r}'_{\nu}) \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \vec{r}_A \times \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{v}_{\nu} + \sum_{\nu} \vec{r}'_{\nu} \times m_{\nu} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{\nu}) \\ &= \vec{r}_A \times m \vec{v}_C + \sum_{\nu} \vec{r}'_{\nu} \times m_{\nu} \vec{v}_A + \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}'_{\nu} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\nu}) \\ &= \vec{r}_A \times m \vec{v}_C + m \vec{r}'_C \times \vec{v}_A + \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}'_{\nu}{}^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_{\nu}) \vec{r}'_{\nu}), \end{aligned} \quad (162)$$

gde je $m = \sum_{\nu} m_{\nu}$ ukupna masa krutog tela, \vec{r}'_C vektor položaja centra mase C krutog tela u odnosu na pol A , a \vec{v}_C brzina centra mase krutog tela u laboratorijskom sistemu. Ako pol A krutog tela miruje i ako upravo taj pol izaberemo za koordinatni početak laboratorijskog sistema onda je $\vec{r}_A = 0$ i $\vec{v}_A = 0$, kretanje krutog tela se svodi na čistu rotaciju, a moment impulsa jednak je poslednjem sabirku u prethodnom izrazu:

$$\vec{M}^{\text{rot}} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}'_{\nu}{}^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_{\nu}) \vec{r}'_{\nu}). \quad (163)$$

Projekcije ovog vektora na ose sopstvenog sistema krutog tela jednake su:

$$\begin{aligned} M_1^{\text{rot}} &= \sum_{\nu} \left(m_{\nu} (r'_{\nu}{}^2 \omega_1 - (\omega_1 x'_{1\nu} + \omega_2 x'_{2\nu} + \omega_3 x'_{3\nu}) x'_{1\nu}) \right) \\ &= \left(\sum_{\nu} m_{\nu} (x'_{2\nu}{}^2 + x'_{3\nu}{}^2) \right) \omega_1 + \left(- \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{1\nu} x'_{2\nu} \right) \omega_2 + \left(- \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{1\nu} x'_{3\nu} \right) \omega_3, \\ M_2^{\text{rot}} &= \left(- \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{1\nu} x'_{2\nu} \right) \omega_1 + \left(\sum_{\nu} m_{\nu} (x'_{1\nu}{}^2 + x'_{3\nu}{}^2) \right) \omega_2 + \left(- \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{2\nu} x'_{3\nu} \right) \omega_3, \\ M_3^{\text{rot}} &= \left(- \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{1\nu} x'_{3\nu} \right) \omega_1 + \left(- \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{2\nu} x'_{3\nu} \right) \omega_2 + \left(\sum_{\nu} m_{\nu} (x'_{1\nu}{}^2 + x'_{2\nu}{}^2) \right) \omega_3, \end{aligned}$$

što se može napisati u tenzorskom obliku kao

$$\vec{M}^{\text{rot}} = \tilde{I} \cdot \vec{\omega}, \quad (164)$$

gde je

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad I_{ij} = \sum_{\nu} m_{\nu} (x'_{i\nu}{}^2 \delta_{ij} - x'_{i\nu} x'_{j\nu}), \quad (165)$$

tzv. **tenzor inercije**. Ako se može smatrati da je masa kontinualno raspodeljena po zapremini V krutog tela, onda se elementi tenzora inercije mogu računati pomoću integrala:

$$I_{ij} = \int_V \rho(x_i'^2 \delta_{ij} - x_i' x_j'), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (166)$$

gde je ρ gustina krutog tela. Dijagonalni elementi ovog tenzora imaju smisao momenata inercije krutog tela u odnosu na odgovarajuću osu sopstvenog sistema krutog tela, dok vandijagonalni elementi, tzv. *proizvodi inercije* nemaju direktan fizički smisao. Pošto je tenzor inercije simetričan tenzor, sigurno postoji ortogonalni bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ u kome je ovaj tenzor reprezentovan dijagonalnom matricom

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (167)$$

gde se svojstvene vrednosti I_i nazivaju *glavnim momentima inercije*, a svojstvene ose *glavnim osama inercije* krutog tela. Znači, ako kruto telo rotira oko jedne od svojih glavnih osa inercije, moment impulsa ima pravac te ose. U ostalim slučajevima moment impulsa nije kolinearan sa osom rotacije krutog tela.

Kinetička energija T krutog tela jednaka je

$$T = \sum_{\nu} \frac{1}{2} m_{\nu} \vec{v}_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{v}_A + \omega \times \vec{r}_{l_{\nu}})^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 + \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_{l_C}) + T^{\text{rot}}, \quad (168)$$

gde je

$$T^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{l_{\nu}})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{l_{\nu}} \times (\omega \times \vec{r}_{l_{\nu}})) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}_{l_{\nu}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{l_{\nu}})) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I} \cdot \vec{\omega}. \quad (169)$$

Ako je $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, gde je \vec{n} ort trenutne ose rotacije, onda je

$$T^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \vec{n} \cdot \tilde{I} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (170)$$

gde je

$$I = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{n} \times \vec{r}_{l_{\nu}})^2 \quad (171)$$

moment inercije krutog tela oko ose čiji je ort \vec{n} , odakle se vidi da se moment inercije pri rotaciji oko proizvoljne ose \vec{n} može pomoću tenzora inercije \tilde{I} mogu izračunati po formuli

$$I = \vec{n} \cdot \tilde{I} \cdot \vec{n}. \quad (172)$$

Primer...

11.5 Koriolisova teorema

Neka je \vec{C} vektor koji se ne menja u sopstvenom sistemu krutog tela. Za posmatrača iz laboratorijskog sistema ovaj vektor se u toku infinitezimalno kratkog vremenskog intervala dt promeni za $d\vec{C} = \vec{\alpha} \times \vec{C}$, pa je

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{C}. \quad (173)$$

Neka je $\vec{G}(t) = G_1(t)\vec{e}_1 + G_2(t)\vec{e}_2 + G_3(t)\vec{e}_3$ bilo kakva vektorska veličina. Za posmatrača iz laboratorijskog sistema brzina njene promene jednaka je

$$\frac{d\vec{G}(t)}{dt} = \frac{dG_1}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt} \vec{e}_3 + G_1(t) \frac{d\vec{e}_1}{dt} + G_2(t) \frac{d\vec{e}_2}{dt} + G_3(t) \frac{d\vec{e}_3}{dt}. \quad (174)$$

Pošto se vektori \vec{e}_i u sopstvenom sistemu krutog tela ne menjaju (kao Dekartovi koordinatni ortovi), na njih se može primeniti formula (173), pa je

$$\frac{d\vec{G}(t)}{dt} = \frac{dG_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt}\vec{e}_3 + G_1(t)\vec{\omega} \times \vec{e}_1 + G_2(t)\vec{\omega} \times \vec{e}_2 + G_3(t)\vec{\omega} \times \vec{e}_3 = \frac{dG_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt}\vec{e}_3 + \vec{\omega} \times \vec{G}(t).$$

Kako je brzina promene veličine $\vec{G}(t)$ u sopstvenom sistemu jednaka

$$\left(\frac{d\vec{G}(t)}{dt}\right)^{\text{rel}} = \frac{dG_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt}\vec{e}_3, \quad (175)$$

brzinu promene u laboratorijskom sistemu možemo napisati kao

$$\frac{d\vec{G}(t)}{dt} = \left(\frac{d\vec{G}(t)}{dt}\right)^{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{G}(t). \quad (176)$$

Ovaj rezultat poznat je kao **Koriolisova teorema**.

11.6 Ojlerove jednačine

Moment impulsa krutog tela u odnosu na pol A u laboratorijskom sistemu $\vec{M}^{(A)}$ jednak je

$$\vec{M}^{(A)} = \sum_{\nu} \vec{r}_{l\nu} \times m_{\nu}\vec{v}_{\nu} = \sum_{\nu} (\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_A) \times m_{\nu}\vec{v}_{\nu} = \vec{M}^{(0)} - \vec{r}_A \times m\vec{v}_C. \quad (177)$$

Ako za pol izaberemo centar mase krutog tela, onda prethodna jednačina dobija oblik

$$\vec{M}^{(C)} = \vec{M}^{(0)} - \vec{r}_C \times m\vec{v}_C, \quad (178)$$

odakle je

$$\frac{d\vec{M}^{(C)}}{dt} = \frac{d\vec{M}^{(0)}}{dt} - \vec{r}_C \times \frac{d(m\vec{v}_C)}{dt}. \quad (179)$$

Pošto je prema teoremama impulsa i momenta impulsa

$$\frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}, \quad \frac{d\vec{M}^{(0)}}{dt} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}, \quad (180)$$

gde je \vec{F}_{ν} ukupna spoljašnja sila koja deluje na ν -ti delić krutog tela, dalje sledi

$$\frac{d\vec{M}^{(C)}}{dt} = \sum_{\nu} (\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_C) \times \vec{F}_{\nu} = \sum_{\nu} \vec{r}_{l\nu} \times \vec{F}_{\nu} = \vec{K}^{(C)}. \quad (181)$$

U poslednjoj jednačini $\vec{K}^{(C)}$ predstavlja ukupni moment spoljašnjih sila koje deluju na kruto telo, računat u odnosu na centar mase krutog tela. Ako sada na izvod momenta impulsa primenimo Koriolisovu teoremu, dobijamo jednačinu

$$\left(\frac{d\vec{M}^{(C)}}{dt}\right)^{\text{rel}} = \vec{K}^{(C)} - \vec{\omega} \times \vec{M}^{(C)}. \quad (182)$$

Moment impulsa krutog tela računat u odnosu na njegov centar mase prema jednačinama (162) i (164) jednak je

$$\vec{M}^C = \vec{M}^{(0)} - \vec{r}_C \times m\vec{v}_C = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + m\vec{r}_C \times \vec{v}_C + \tilde{\mathcal{I}}^C \cdot \vec{\omega} - \vec{r}_C \times m\vec{v}_C = \tilde{\mathcal{I}}^C \cdot \vec{\omega}, \quad (183)$$

pošto je $\vec{r}_C = 0$. Ako za Dekartove ose sopstvenog sistema krutog tela izaberemo glavne ose inercije, onda tenzor inercije \mathcal{I}^C u tako izabranom sistemu ima dijagonalni oblik, pa projektovanjem jednačine (182) na te ose dobijamo tzv. **Ojlerove jednačine**:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= K_1^C \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= K_2^C \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= K_3^C. \end{aligned} \quad (184)$$

11.7 Analitički metod u dinamici krutog tela

Kao što je već rečeno, slobodno kruto telo ima 6 stepeni slobode, a za generalisane koordinate je zgodno uzeti Dekartove koordinate pola A krutog tela x_A, y_A, z_A i Ojlerove uglove φ, θ i ψ . Rad pri elementarnom pomeranju slobodnog krutog tela je onda jednak

$$\begin{aligned} dA &= \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot \vec{v}_{\nu} dt = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{\nu}) dt = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot \vec{v}_A dt + \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\nu}) dt \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v}_A dt + \vec{\omega} \cdot \sum_{\nu} \vec{r}'_{\nu} \times \vec{F}_{\nu} dt = F_x dx_A + F_y dy_A + F_z dz_A + \vec{\omega} \cdot \vec{K}^{(A)} dt. \end{aligned}$$

Pošto je

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_N + \dot{\psi} \vec{e}_3,$$

konačno se za elementarni rad dobija izraz

$$dA = F_x dx_A + F_y dy_A + F_z dz_A + K_z^{(A)} d\varphi + \left(\vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_N \right) d\theta + \left(\vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_3 \right) d\psi, \quad (185)$$

gde su \vec{F} i $\vec{K}^{(A)}$ ukupna spoljašnja sila i ukupni moment spoljašnjih sila, koje deluju na kruto telo, što znači da su generalisane sile

$$Q_{x_A} = F_x, \quad Q_{y_A} = F_y, \quad Q_{z_A} = F_z, \quad Q_{\varphi} = K_z^{(A)}, \quad Q_{\theta} = \vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_N, \quad Q_{\psi} = \vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_3. \quad (186)$$

Sile interakcije koje deluju između čestica krutog tela ovde tretiramo kao sile reakcije. Nije teško zaključiti da se radi o idealnim silama reakcije. Naime, pošto su odgovarajuće veze stacionarne, dovoljno je ispitati da li je ukupni rad ovih sila dA^{unutr} na mogućem pomeranju jednak nuli. Po definiciji je taj rad jednak

$$\begin{aligned} dA^{\text{unutr}} &= \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}^{\text{unutr}} \cdot d\vec{r}_{\nu} = \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\nu\mu} \cdot d\vec{r}_{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}), \end{aligned}$$

gde smo iskoristili zakon akcije–reakcije. Pošto je sila $\vec{F}_{\mu\nu}$ interakcije između proizvoljne dve čestice krutog tela kolinearna sa relativnim radijus-vektorom $\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}$ (prema postulatima sile), dalje je traženi rad jednak

$$dA^{\text{unutr}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \frac{F_{\mu\nu}}{|\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}|} (\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}) \cdot d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}) = \frac{1}{4} \sum_{\nu, \mu} \frac{F_{\mu\nu}}{|\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}|} d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu})^2.$$

Međutim, rastojanje između bilo koje dve čestice krutog tela se ne menja pri kretanju, pa je

$$d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu})^2 = 0,$$

tj. rad sila reakcije na mogućem pomeranju jednak je nuli, pa se zaista radi o idealnim silama reakcije, što znači da su pri slobodnom kretanju krutog tela zadovoljene Lagranževe jednačine u svom osnovnom obliku:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial T}{\partial x_A} &= Q_{x_A}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial T}{\partial y_A} &= Q_{y_A}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_A} - \frac{\partial T}{\partial z_A} &= Q_{z_A}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_{\theta}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_{\psi}. \end{aligned}$$

Ako su sve spoljašnje sile koje deluju na kruto telo potencijalne, onda se Lagranževe jednačine za kruto telo mogu pisati i u obliku

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial L}{\partial x_A} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial L}{\partial y_A} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_A} - \frac{\partial L}{\partial z_A} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0. \end{aligned} \quad (187)$$

Ako se za pol izabere centar mase C , onda je kinetička energija jednaka

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2} \left(I_1(\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + I_2((\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right),$$

pri čemu su Ojlerovi uglovi uvedeni pod pretpostavkom da su ose sistema vezanog za kruto telo glavne ose inercije, a I_1, I_2 i I_3 su glavni momenti inercije, pa je lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2} \left(I_1(\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + I_2((\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right) - U.$$

I pri neslobodnom kretanju, ako su sile reakcije idealne, a veze holonomne, mogu se primenjivati Lagranževe jednačine. Često se kod neslobodnog kretanja krutog tela javljaju tzv. uslovi *kotrljanja bez klizanja*, koji odgovaraju kretanju krutog tela po idealno hrapavoj podlozi, pri kome delići krutog tela koji su u neposrednom dodiru sa takvom podlogom ne proklizavaju po njoj. Ovaj uslov se formalno izražava kao jednačina u kojoj se pojavljuju brzine, tj. izvodi generalisanih koordinata, dakle radi se o neholonomnim vezama. U jednostavnijim slučajevima, to su kvazi-neholonomne veze, tj. veze koje se integracijom mogu svesti na holonomne veze, ali to nije opšte pravilo, pa treba biti oprezan sa primenom Lagranževih jednačina na takve sisteme. Primer... kotrljanje diska i lopte po ravnoj horizontalnoj podlozi

11.8 Kretanje krutog tela oko nepomične ose

Ako kruto telo rotira oko nepomične ose, jasno je da je broj stepeni slobode $n = 1$, a za generalisanu koordinatu je najzgodnije izabrati ugao φ rotacije oko te ose. Ako za pol izaberemo proizvoljnu tačku na osi rotacije, onda kinetička energija ima oblik

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,$$

a odgovarajuća generalisana sila

$$Q_\varphi = K_z^{(A)},$$

pa, pod pretpostavkom da su sile reakcije idealne, Lagranževa jednačina ima oblik

$$I\ddot{\varphi} = K_z^{(A)}.$$

Ako je jedina aktivna sila koja deluje na kruto telo sila gravitacije (koja je normalna na osu rotacije), onda ovakav fizički sistem nazivamo *fizičkim klatnom*, a prethodna jednačina, pod pretpostavkom da je $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, dobija oblik

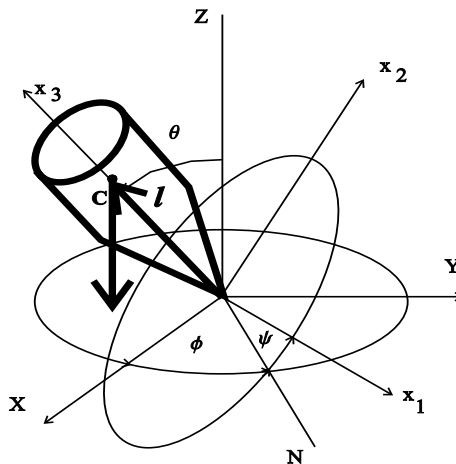
$$I\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0,$$

gde je l najkraće rastojanje centra mase krutog tela od ose rotacije. Ova jednačina, očigledno, ima isti oblik kao diferencijalna jednačina kretanja za matematičko klatno (61).

11.9 Kretanje simetrične čigre

Razmotrimo kretanje dinamički simetričnog krutog tela kod koga je $I_1 = I_2$, u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, pri kome se njegova najniža tačka ne pomera (vidi sliku). Ako za pol krutog tela izaberemo nepokretnu tačku, koja je istovremeno i koordinatni početak laboratorijskog sistema, a za ose sistema vezanog za kruto telo uzmemo glavne ose inercije, onda kinetička energija tela ima samo rotacioni deo, koji je jednak

$$T = \frac{1}{2} (I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega^2).$$



Ako dalje iskoristimo izraze (161) za komponente ugaone brzine u pokretnom sistemu, kinetička energija dobija oblik

$$T = \frac{1}{2} \left(I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right),$$

a pošto je potencijalna energija $U = mgl \cos \theta$, gde je l rastojanje centra mase od pola, lagranžijan je jednak

$$L = \frac{1}{2} \left(I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right) - mgl \cos \theta. \quad (188)$$

Pošto su generalisane koordinate φ i ψ ciklične, odmah dobijamo dva integrala kretanja

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \text{const}, \quad (189)$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const}. \quad (190)$$

Pošto je moment gravitacione sile u odnosu na nepokretnu tačku jednak

$$\vec{K} = \vec{l} \times m\vec{g} = lmg\vec{e}_Z \times \vec{e}_3,$$

jasno je da se komponente momenta impulsa duž Z i x_3 ose održavaju i lako se proverava de je upravo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_Z, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = M_3.$$

Treća Lagranževa jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

ima eksplicitan oblik

$$I_1 \ddot{\theta} - I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) - mgl \sin \theta = 0,$$

odnosno

$$I_1 \ddot{\theta} + M_3 \sin \theta - mgl \sin \theta - \frac{1}{I_1} \frac{(M_Z - \cos \theta M_3)^2}{\sin^3 \theta} \cos \theta = 0, \quad (191)$$

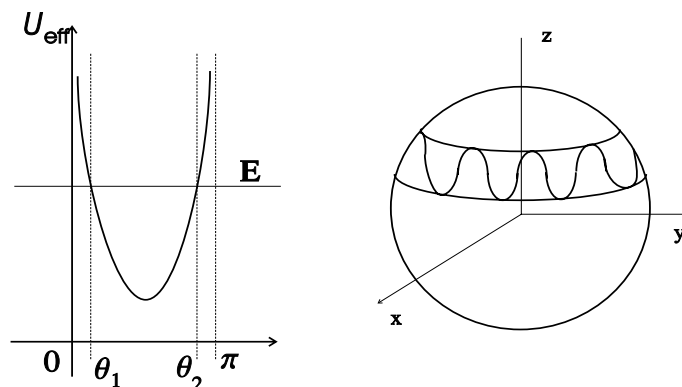
gde smo iskoristili integrale (189) i (190). Pošto je $\ddot{\theta} = d(\dot{\theta}^2)/d\theta$, integracijom poslednje jednačine dobijamo jednačinu oblika

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}} = E',$$

gde je

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2I_1} \frac{(M_Z - M_3 \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \quad E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3}. \quad (192)$$

Funkcija U_{eff} ima oblik kao na slici, odakle se vidi da kruto telo vrši tzv. *pseudoregularnu precesiju*, naime njegova glavna osa inercije x_3 rotira oko Z ose (precesira), ali istovremeno osa x_3 osciluje između uglova θ_1 i θ_2 , tj. vrši tzv. *nutaciju* (vidi sliku). (Odatle se Ojlerovi uglovi često nazivaju i: θ - ugao nutacije, φ ugao precesije i ψ - ugao rotacije.)



Hamiltonove jednačine

Svakoj generalisanoj koordinati q_i može se pridružiti tzv. **generalisani impuls** p_i koji je po definiciji jednak

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (193)$$

Položaji i brzine svih čestica nekog sistema (na koji se može primeniti Lagranžev formalizam) mogu se izraziti preko generalisanih koordinata q_i , generalisanih brzina \dot{q}_i i vremena t . Alternativno, iz definicionih jednačina (193) mogu se generalisane brzine izraziti u funkciji generalisanih koordinata i impulsa (može se pokazati da je u klasičnoj nerelativističkoj mehanici to uvek moguće), čime se dobijaju relacije

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t), \quad (194)$$

gde smo sa q i p kratko označili kompletne skupove generalisanih koordinata i impulsa. Koristeći ove relacije položaji i brzine čestica se mogu izraziti preko ukupno $2n$ generalisanih koordinata i impulsa, i vremena.

Ispostavlja se da je u ovakvom pristupu umesto Lagranževe funkcije, koja je funkcija q, \dot{q} i t , zgodnije raditi sa tzv. **Hamiltonovom funkcijom (hamiltonijanom)**, koji se definiše kao

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t), \quad (195)$$

gde svaku generalisanu brzinu \dot{q}_i treba izraziti u funkciji q, p i t , kako je i naznačeno. Da bismo uvideli u čemu je prednost uvođenja H u odnosu na L u ovakvom formalizmu, izračunajmo izvode hamiltonijana po q i p (zajedno se ove promenljive zovu **kanonske promenljive**). Iz definicije hamiltonijana (195) sledi da je njegov parcijalni izvod po generalisanom impulsu p_i jednak

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q, p, t) \right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} = \dot{q}_i(q, p, t) + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}. \quad (196)$$

Pošto se drugi i treći član u poslednjem izrazu, prema definiciji (193), poništavaju, dobijamo

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i(q, p, t). \quad (197)$$

Slično, izvod hamiltonijana po generalisanoj koordinati q_i je

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q, p, t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}. \quad (198)$$

Pošto smo, umesto u Lagranževom formalizmu međusobno nezavisnih promenljivih q i \dot{q} , u ovom formalizmu (koji ćemo zvati Hamiltonovim) izabrali promenljive q i p za međusobno nezavisne, važi da je

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0,$$

pa je

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q, p, t) \right) = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial q_i}. \quad (199)$$

Vraćanjem ovog izraza u desnu stranu (198), zbog definicije generalisanih impulsa dobijamo

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (200)$$

što je dalje, zbog Lagranževih jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (201)$$

i, ponovo, definicije generalisanih impulsa, jednako

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = Q_i^* - \dot{p}_i. \quad (202)$$

Zajedno se dobijene jednačine

$$\frac{dq_i(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = Q_i^* - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (203)$$

nazivaju **Hamiltonove jednačine**. Za razliku od Lagranževih jednačina, koje predstavljaju sistem od n običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, Hamiltonove jednačine predstavljaju sistem od $2n$ običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Rešavanjem ovog sistema (za zadate početne uslove) dobijaju se konačne jednačine kretanja $q_i(t)$ i zavisnost generalisanih impulsa od vremena $p_i(t)$, čime je potpuno određeno *stanje* sistema u svakom trenutku t . Iz samog oblika ovog sistema (izvodi nepoznatih funkcija eksplicitno izraženi preko svih ostalih veličina), jasno je da je njegovo rešenje jednoznačno, odakle ponovo sledi klasični zakon kauzalnosti.

Primer - Linearni harmonijski oscilator

Generalisani impuls p koji odgovara generalisanoj koordinati x u slučaju l.h.o. po definiciji je jednak

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) = m \dot{x}, \quad (204)$$

što odgovara x komponenti vektora impulsa čestice. Odatle je

$$\dot{x}(x, p, t) = \frac{p}{m},$$

pa je hamiltonijan jednak

$$H(p, x, t) = p \dot{x}(x, p, t) - L(x, \dot{x}(x, p, t)) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

Lako se proverava da je hamiltonijan u ovom slučaju brojno jednak ukupnoj energiji

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

Hamiltonove jednačine (203) imaju oblik

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -m \omega^2 x.$$

Prva Hamiltonova jednačina se poklapa sa jednačinom koju smo dobili direktno iz definicije generalisanog impulsa (204). U vezi sa konkretnim nalaženjem konačne jednačine kretanja $x(t)$ ovde se može primetiti da nikakvu olakšicu nismo dobili time što smo prešli na sistem od dve diferencijalne jednačine prvog reda. Naime, ovaj sistem se najlakše rešava tako što se prva jednačina diferencira po vremenu, čime se sa desne strane pojavi \dot{p} , koji zatim treba iz druge jednačine zameniti. Tako se ponovo dobija diferencijalna jednačina drugog reda: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, koja se poklapa sa odgovarajućom Lagranževom jednačinom.

Primer - Matematičko klatno

U slučaju matematičkog klatna je generalisani impuls p jednak

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + mgR \cos \varphi \right),$$

odakle je

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{m R^2},$$

a hamiltonijan

$$H(\varphi, p, t) = \frac{p^2}{2mR^2} - mgR \cos \varphi,$$

što je ponovo brojno jednako ukupnoj energiji. Hamiltonove jednačine (203) ovde imaju oblik

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{mR^2}, \quad \frac{dp}{dt} = -mgR \sin \varphi.$$

Ni u slučaju matematičkog klatna ne dobija se nikakav dobitak u smislu nalaženja konačnih jednačina kretanja, što je uobičajeno za sisteme sa malim brojem stepeni slobode. Međutim, za sisteme sa velikim n , kada se jednačine kretanja obično rešavaju numerički, mnogo je lakše raditi sa sistemima diferencijalnih jednačina prvog, nego drugog reda (makar ih bilo i duplo više), pa tada Hamiltonove jednačine imaju veliku prednost u odnosu na Lagranževe. Suštinske prednosti Hamiltonovog formalizma uočavaju se u drugim oblastima fizike, recimo u statističkoj i kvantnoj fizici.

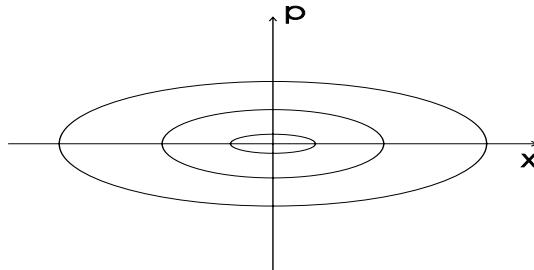
Formalizam statističke fizike primenjuje se u tzv. **faznom prostoru**. To je prostor dimenzije $2n$ u kome tačka, reprezentovana uređenim skupom generalisanih koordinata i impulsa $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ određuje stanje sistema. Kretanju sistema odgovara trajektorija koju opisuje tačka $(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$. Trajektorije sistema se u faznom prostoru ne seku, jer bi presecanje trajektorija značilo da iz istih početnih uslova (u tački preseka) postoji više trajektorija, što je u suprotnosti sa klasičnom kauzalnošću.

Primer - Linearni harmonijski oscilator

Pošto se energija l.h.o. održava, a hamiltonijan je brojno jednak energiji, kako smo gore pokazali, sledi da je

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \text{const},$$

što predstavlja jednačinu elipse u faznom prostoru, koji je ovde dvodimenzionalan. Ova elipsa predstavlja trajektoriju l.h.o. u faznom prostoru, a njene poluose određene su energijom. Jasno je da se za različite energije dobijaju elipse koje se ne presecaju (vidi sliku).



Osnovni dinamički zakon u kvantnoj mehanici predstavlja Šredingerova jednačina:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

gde ψ tzv. funkcija stanja kvantnog sistema, a \hat{H} je hermitski operator koji odgovara hamiltonijanu. Operator \hat{H} se formira tako što se u klasični izraz za hamiltonijan, umesto klasičnih generalisanih koordinata i impulsa, stave hermitski operatori koji odgovaraju koordinatama i impulsima. Tako je npr. za l.h.o. $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + m\omega^2 \hat{x}^2/2$.

Smisao hamiltonijana

Videli smo da je hamiltonijan l.h.o. i matematičkog klatna jednak njihovoj ukupnoj mehaničkoj energiji. Ispitajmo opšte uslove pod kojima je to tačno. Ako u izraz za hamiltonijan (195) eksplicitno stavimo $L = T - U$ dobijamo

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + U. \quad (205)$$

Kako smo ranije već pokazali

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + B_i,$$

gde koeficijenti A_{ij} i B_i potiču iz izraza za kinetičku energiju:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i + C(q_1, \dots, q_n, t).$$

Ako poslednja dva izraza vratimo u (205), dalje dobijamo da je hamiltonijan brojno jednak izrazu

$$H = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i - C + U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + U, \quad (206)$$

odakle se vidi da je *hamiltonijan sigurno brojno jednak ukupnoj energiji* ako je deo kinetičke energije koji je linearan po generalisanim brzinama jednak nuli, tj. *ako je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina*. Osim hamiltonijana i lagranžijana, ponekad se razmatra i tzv. **generalisana energija** \mathcal{E} , koja je funkcija generalisanih koordinata i brzina i definiše se kao

$$\mathcal{E}(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (207)$$

Očigledno, generalisana energija je brojno jednaka hamiltonijanu.

Takođe je interesantno ispitati kada je hamiltonijan integral kretanja. Totalni izvod H po vremenu jednak je

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (208)$$

Ako u sumu u gornjem izrazu, izvode kanonskih promenljivih zamenimo iz Hamiltonovih jednačina dalje dobijamo

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(Q_i^* - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^n Q_i^* \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (209)$$

odnosno, ako još jednom iskoristimo Hamiltonove jednačine, sledi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i. \quad (210)$$

Znači, *ako hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od vremena i ako je $\sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i = 0$ (što je sigurno tačno ako su sve aktivne sile potencijalne ili giroskopske) onda je sigurno $dH/dt = 0$, tj. hamiltonijan predstavlja integral kretanja.*

Primer - Tejlorovo klatno

Tejlorovo klatno je sistem koji se sastoji od čestice mase m , koja se u homogenom gravitaciom polju kreće po glatkom tankom prstenu poluprečnika R , koji rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko svog vertikalnog prečnika (vidi sliku). Ako se za generalisanu koordinatu izabere sferni ugao θ , kinetička energija ima oblik

$$T = \frac{1}{2} m R^2 (\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2),$$

a potencijalna $U = mgR \cos \theta$. Pošto kinetička energija nije homogena kvadratna funkcija generalisane brzine $\dot{\theta}$, ni generalisana energija

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta,$$

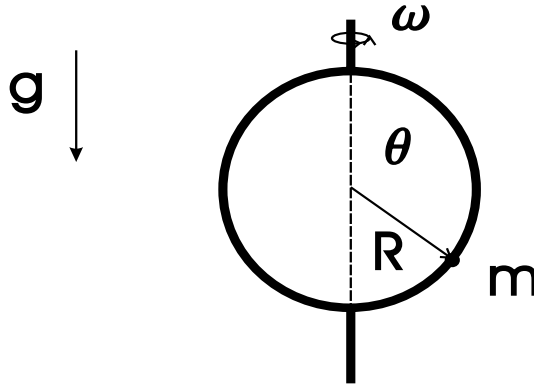
ni hamiltonijan

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta,$$

nisu jednaki ukupnoj mehaničkoj energiji

$$E = \frac{1}{2}mR^2(\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + mgR \cos \theta.$$

S druge strane, nepotencijalnih sila nema, a hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od vremena, što znači da predstavlja integral kretanja, isto kao i generalisana energija. Međutim, ukupna mehanička energija se ne održava, pošto postoji nestacionarna veza $\varphi = \omega t$.



Generalisano potencijalne generalisane sile

Osim običnih potencijalnih generalisanih sila, koje zavise od generalisanih koordinata i , eventualno, vremena, postoje i tzv. **generalisano potencijalne generalisane sile**, koje zavise i od brzina, a mogu se izraziti preko **generalisanog potencijala** $V(q, \dot{q}, t)$ kao

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (211)$$

Ako se u osnovnom obliku Lagranževih jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

generalisane sile razdvoje na generalisano potencijalne i "ostatak" Q'_i , tj. napišu kao

$$Q_i = Q'_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

lako se proverava da se jednačine ponovo mogu prepisati u standardnom obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i,$$

gde je sada $L = T - V$, a Q'_i deo generalisanih sila koji se ne može izraziti pomoću generalisanog potencijala (jasno je da su obične potencijalne sile specijalan slučaj generalisano potencijalnih). Lako se vidi da i Hamiltonove jednačine zadržavaju isti oblik, ako se sa ovakvim lagranžijanom definiše hamiltonijan. Takođe, i diskusija o smislu hamiltonijana je slična, jedino što u ovom slučaju

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \neq \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

pošto V može da zavisi od \dot{q} . Primetimo da generalisani potencijal V može da bude jedino linearna funkcija generalisanih brzina, jer bi u suprotnom generalisano potencijalna generalisana sila bila funkcija generalisanih ubrzanja, što bi značilo da odgovarajuća sila interakcije zavisi od ubrzanja, a to zabranjuju postulati sile. Znači, u najopštijem slučaju, generalisani potencijal je funkcija oblika

$$V = \sum_{i=1}^n \alpha_i(q_i, t) \dot{q}_i + U(q_i, t), \quad (212)$$

pa je hamiltonijan

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + V - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + V - \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + U, \quad (213)$$

tj. dobija se isti izraz kao i u slučaju običnih potencijalnih sila. Ovde treba napomenuti da se i u slučaju generalisano potencijalnih sila, ukupna mehanička energija i dalje definiše kao zbir kinetičke energije i potencijalne energije U , tj. dela generalisanog potencijala koji ne zavisi od generalisanih brzina. Konačno, ni izraz za dH/dt se u ovom slučaju ne menja.

Primer - Lorencova sila

Na česticu nalelektrisanja q , koja se kreće u elektromagnetnom polju, okarakterisanom jačinama \vec{E} i \vec{B} deluje Lorencova sila

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Polja se mogu izraziti preko skalarnog $\varphi(\vec{r}, t)$ i vektorskog $\vec{A}(\vec{r}, t)$ potencijala na sledeći način

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

a ako se za generalisane koordinate izaberu Dekratove koordinate čestice, lako se proverava da su odgovarajuće generalisane sile, u ovom slučaju Dekartove komponente sile \vec{F} , jednake

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial V}{\partial z},$$

gde je

$$V = q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}).$$

Drugim rečima, Lorencova sila jeste generalisano potencijalna sila. Polazeći od lagranžijana $L = T - V$, nalaze se generalisani impulsi

$$p_x = m\dot{x} + qA_x, \quad p_y = m\dot{y} + qA_y, \quad p_z = m\dot{z} + qA_z,$$

dok je hamiltonijan

$$H = T + q\varphi = \frac{1}{2m} (\vec{P} - q\vec{A})^2 + q\varphi,$$

gde je $\vec{P} = m\vec{v} + q\vec{A}$.

Ciklične koordinate u Hamiltonovom formalizmu

Ako su sve sile potencijalne, onda cikličnoj koordinati q_i , za koju po definiciji važi $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, prema odgovarajućoj Lagranževnoj jednačini

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

odgovara integral kretanja

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const},$$

tj. *generalisani impuls konjugovan cikličnoj generalisanoj koordinati je integral kretanja*. Iz odgovarajuće Hamiltonove jednačine onda sledi

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

što znači da hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od ciklične koordinate q_i , tj. H ima oblik

$$H = H(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{i-1}, \text{const}, p_{i+1}, \dots, p_n, t).$$

Odatle zaključujemo da se u Hamiltonovom formalizmu broj stepeni slobode efektivno smanjuje za broj cikličnih koordinata, kao što je, recimo, bio slučaj kod centralnog kretanja ili kod Lagranževe čigre.

Primer - Centralno kretanje

Lagranžijan u slučaju centralnog kretanja

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

ne zavisi eksplicitno od koordinate φ , pa je generalisani impuls p_φ konstanta kretanja. Pošto su generalisani impulsi

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const},$$

hamiltonijan

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r)$$

se efektivno svodi na hamiltonijan jednodimenzionog sistema:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r),$$

sa relevantnim jednačinama

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}.$$

Poasonove zagrade

Totalni izvod po vremenu proizvoljne funkcije kanonskih promenljivih i vremena $F(q, p, t)$, za sistem sa potencijalnim silama, jednak je

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (214)$$

Ako dalje iskoristimo Hamiltonove jednačine (203), ovaj izraz postaje

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (215)$$

Uvođenjem tzv. **Poasonove zagrade**, koja se za proizvoljne dve funkcije u i v kanonskih promenljivih definiše kao

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right), \quad (216)$$

konačno dobijamo

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (217)$$

Specijalno ako je $F = q_i$ ili $F = p_i$ dobijamo Hamiltonove jednačine u simetričnom obliku

$$\frac{dq_i}{dt} = [q_i, H], \quad \frac{dp_i}{dt} = [p_i, H]. \quad (218)$$

Ovakav oblik Hamiltonovih jednačina posebno je značajan zbog kvantne mehanike u kojoj operatori koji odgovaraju koordinatama i impulsima zadovoljavaju jednačine

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{q}_i, \hat{H}], \quad \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{p}_i, \hat{H}],$$

gde sada oznaka "[,]" odgovara komutatoru koji se za dva operatora \hat{u} i \hat{v} definiše kao

$$[\hat{u}, \hat{v}] = \hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u}.$$

Pod osnovnim Poasonovim zagradama podrazumevamo zagrade kanonskih promenljivih, tj.

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}.$$

Slične relacije važe u kvantnoj mehanici, pri čemu koordinate i impulsi prelaze u odgovarajuće operatore, a Poasonova zagrada u komutator, podeljen sa $i\hbar$.

Ako je neka veličina F integral kretanja, onda prema (217) važi

$$0 = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (219)$$

Može se pokazati da za integrale kretanja važi **Poasonova teorema**: *Poasonova zagrada dva integrala kretanja je takođe integral kretanja.*

Hamiltonov princip

Varijacioni račun

Za diferencijabilnu funkciju $y(x)$ nezavisno promenljive x i funkciju $F(x, y(x), \frac{dy}{dx})$ formirajmo određeni integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right) dx. \quad (220)$$

Osnovni zadatak tzv. **variacionog računa** je: naći funkciju $y(x)$, koja prolazi kroz fiksirane tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u ravni xy , takvu da integral I ima ekstremalnu vrednost. Neka je $y(x)$ tražena funkcija, a sa $\bar{y}(x)$ označimo sve ostale funkcije u okolini tražene, koje možemo izraziti u obliku

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x),$$

gde je ϵ mali parametar, a $\eta(x)$ proizvoljna funkcija, takva da je $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ (pošto je za svako \bar{y} postavljen uslov $\bar{y}(x_1) = y_1$ i $\bar{y}(x_2) = y_2$). Sa tako uvedenim oznakama I se može shvatiti kao funkcija od ϵ , a potreban uslov da ona ima ekstremalnu vrednost za $\epsilon = 0$ je

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (221)$$

Pošto je ϵ mala veličina, funkcija $F(x, \bar{y}(x), \frac{d\bar{y}}{dx})$ može se razviti u Tejlorov red na sledeći način:

$$\begin{aligned} F \left(x, \bar{y}, \frac{d\bar{y}}{dx} \right) &= F \left(x, y(x) + \epsilon \eta(x), \frac{d}{dx}(y(x) + \epsilon \eta(x)) \right) = F \left(x, y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x) \right) \\ &= F(x, y, y') + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x, y, y')} \epsilon \eta(x) + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{(x, y, y')} \epsilon \eta'(x) + \dots, \end{aligned} \quad (222)$$

gde smo sa \dots naznačili članove višeg reda po ϵ . Ako ovakav izraz zamenimo u integral (220) dobijamo

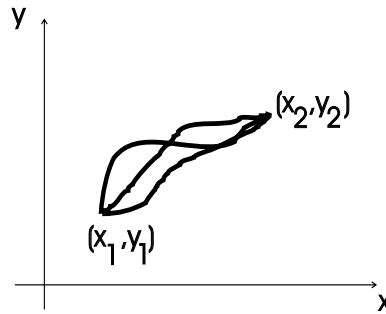
$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx + \epsilon \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx + \dots, \quad (223)$$

odakle je

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx. \quad (224)$$

Na drugi član u poslednjem integralu se može primeniti parcijalna integracija, tj.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d\eta = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx. \quad (225)$$



Kako je $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ prvi sabirak u izrazu koji smo dobili za ovaj integral se anulira, pa vraćanjem u (224) dobijamo

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx.$$

Poslednji integral jednak je nuli za proizvoljnu funkciju $\eta(x)$ samo ako je identički zadovoljena tzv. **Ojler-Lagranževa jednačina**:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (226)$$

Uobičajeno je da se razlika proizvoljne funkcije \bar{y} i funkcije y koja predstavlja rešenje varijacionog problema naziva **varijacija** funkcije y i obično se označava sa δy , tj.

$$\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x) = \epsilon \eta(x). \quad (227)$$

Varijacija izvoda funkcije $y(x)$ je onda jednaka

$$\delta y'(x) = \bar{y}'(x) - y'(x) = \epsilon \eta'(x), \quad (228)$$

odakle je jasno da varijacija i izvod komutiraju, tj.

$$\delta y'(x) = (\delta y(x))'. \quad (229)$$

Sa ovakvim oznakama se onda razlika funkcija $F(x, \bar{y}, \bar{y}')$ i $F(x, y, y')$ na osnovu (222) može napisati u obliku

$$\Delta F = F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y') = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x,y,y')} \delta y + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{(x,y,y')} \delta y' + \dots, \quad (230)$$

a razlika integrala I računatog redom sa funkcijama \bar{y} i y , na osnovu (223) jednaka je

$$\Delta I = I(\epsilon) - I(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \dots. \quad (231)$$

Uobičajeno je takođe da se sa δF i δI označavaju redom delovi ΔF i ΔI koji su linearni po ϵ , (tj. po varijaciji funkcije y), sa $\delta^2 F$ i $\delta^2 I$ delovi koji su proporcionalni ϵ^2 itd., pa se ΔF i ΔI u skladu sa tim pišu kao

$$\Delta F = \delta F + \delta^2 F + \dots, \quad \Delta I = \delta I + \delta^2 I + \dots, \quad (232)$$

gde je

$$\delta F(x, y, y') = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y', \quad (233)$$

što podseća na izraz za totalni diferencijal funkcije tri promenljive (x, y, y') , kada je promenljiva x fiksirana, i

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx. \quad (234)$$

Uslov (221) je onda ekvivalentan zahtevu da je prva varijacija integrala I jednaka nuli, tj.

$$\delta I = 0. \quad (235)$$

Ako je ovaj uslov zadovoljen, onda $I(\epsilon)$ za $\epsilon = 0$ ima stacionarnu vrednost, što odgovara minimumu, maksimumu ili prevojnoj tački. O čemu se tačno radi može se zaključiti na osnovu analize druge varijacije $\delta^2 I$. Integral I će imati ekstremalnu vrednost za $y(x)$ ako druga varijacija $\delta^2 I$ uvek ima isti znak, tj. imaće minimum za $\delta^2 I > 0$, odnosno maksimum za $\delta^2 I < 0$.

Primer

U ravni xy uočimo tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) i linije $y(x)$ koje spajaju te dve tačke. Dužina elementa dl proizvoljne takve linije je

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2},$$

pa je ukupna dužina l linije između uočenih tačaka jednaka

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ova linija će imati ekstremalnu dužinu za onu funkciju $y(x)$ za koju je zadovoljena Ojler–Lagranževa jednačina u kojoj je $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Pošto F ne zavisi eksplicitno od y , ova jednačina se svodi na

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const},$$

odakle sledi

$$y'(x) = a = \text{const} \quad \Rightarrow \quad y(x) = ax + b,$$

što je, naravno, jednačina prave, za koju se lako proverava da odgovara minimalnom rastojanju između tačaka.

Uočimo sada n nezavisnih diferencijabilnih funkcija $q_1(t), \dots, q_n(t)$ iste promenljive t , funkciju $F(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t))$ i njen integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)) dt. \quad (236)$$

Ako za skup funkcija $q_1(t), \dots, q_n(t)$ integral I ima ekstremalnu vrednost, a ako sa $\bar{q}_1(t), \dots, \bar{q}_n(t)$ označimo funkcije

$$\bar{q}_i(t) = q_i(t) + \epsilon \eta_i, \quad \eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (237)$$

onda je, analogno jednodimenzionom slučaju:

$$I(\epsilon) - I(0) = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right) dt + \delta^2 I + \dots \quad (238)$$

Odatle je

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta_i dt, \quad (239)$$

što je za proizvoljne i međusobno nezavisne funkcije η_i uvek jednako nuli jedino ako su identički zadovoljene **Ojler–Lagranževe jednačine**

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (240)$$

Znači, Ojler–Lagranževe jednačine predstavljaju potreban uslov da integral I ima stacionarnu vrednost za skup funkcija $q_i(t)$, a da li se radi o ekstremumu, utvrđuje se na osnovu znaka druge varijacije $\delta^2 I$.

Princip najmanjeg dejstva

Da bismo primenili varijacioni račun na mehaniku, potrebno je da uvedemo još nekoliko novih pojmova.

Hamiltonovo dejstvo W po definiciji je jednako

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) dt, \quad (241)$$

gde je $L(q, \dot{q}, t)$ lagranžijan posmatranog sistema.

Konfiguracioni prostor je n -dimenzioni prostor u kome je tačka uređena n -torka (q_1, \dots, q_n) , koju čine generalisane koordinate fizičkog sistema koji ima n stepeni slobode. Putanja koju tačka u konfiguracionom prostoru opisuje pri stvarnom kretanju sistema zove se **pravi (stvarni) put sistema**. Uočimo jedan pravi put koji sistem, tj. njegova reprezentaciona tačka u konfiguracionom prostoru pređe od trenutka t_1 do trenutka t_2 , od tačke $M(t_1)$ do tačke $M(t_2)$. Pod **okolnim putem sistema** ćemo onda podrazumevati put u konfiguracionom prostoru između istih tačaka $M(t_1)$ i $M(t_2)$, koji odgovara zamišljenom kretanju sistema od trenutka t_1 do t_2 , a koji malo odstupa od stvarnog kretanja. Označimo sa $P(q_1(t), \dots, q_n(t))$ proizvoljnu tačku na pravom putu, a sa $\bar{P}(\bar{q}_1(t), \dots, \bar{q}_n(t))$ tačku

na okolnom putu, koja odgovara istom trenutku t . Neka su δq_i varijacije generalisanih koordinata koje odgovaraju prelasku sa pravog na okolni put, tj.

$$\delta q_i(t) = \bar{q}_i(t) - q_i(t). \quad (242)$$

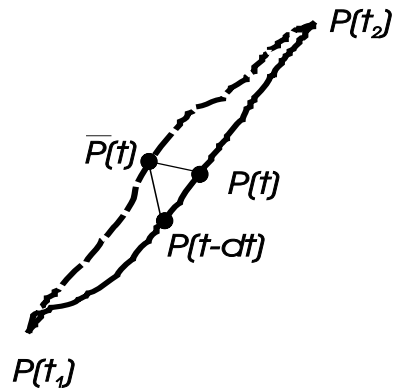
Ako na sistem koji posmatramo deluju samo potencijalne sile, onda Lagranževe jednačine imaju oblik

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n, \quad (243)$$

koji se na osnovu prethodnog odeljka poklapa sa oblikom Ojler-Lagranževih jednačina (240), za $q_i(t)$ (na pravom putu sistema), kada se uzme $F = L$. Pošto ispunjenost ovih jednačina znači da odgovarajući integral ima stacionarnu vrednost, to znači da Hamiltonovo dejstvo na pravom putu ima stacionarnu vrednost. Analizom druge varijacije dejstva (što prevazilazi okvire ovog kursa), može se pokazati da je ona pozitivna za dovoljno male vremenske intervale $t_2 - t_1$, što znači da važi **Hamiltonov princip najmanjeg dejstva**: *stvarno kretanje sistema sa idealnim reakcijama, holonomnim vezama i potencijalnim silama odvija se tako da Hamiltonovo dejstvo duž pravog puta ima minimalnu vrednost u odnosu na vrednosti dejstva duž svih okolnih puteva.*

Napomena

Oznakom δq_i smo u Lagranževom formalizmu označavali promene generalisanih koordinata, koje su odgovarale virtuelnim pomeranjima. Ispostavlja se da varijacija zaista odgovara virtuelnoj promeni generalisane koordinate. Naime, ako u trenutku $t - dt$ u konfiguracionom prostoru na stvarnom putu uočimo tačku $P(t - dt)$, a u trenutku t uočimo tačke $P(t)$ i $\bar{P}(t)$, prvu na pravom, a drugu na okolnom putu, onda prelaz iz $P(t - dt)$ u $P(t)$ odgovara mogućem pomeranju (stvarno kretanje sve vreme je u skladu sa vezama), isto kao i prelaz $P(t - dt)$ u $\bar{P}(t)$, pošto je i okolni put u skladu sa vezama. Razlika ova dva moguća pomeranja odgovara prelasku iz $P(t)$ u $\bar{P}(t)$ (vidi sliku), a pošto je razlika dva ovako definisana moguća pomeranja jednaka virtuelnom pomeranju, sledi da je $\bar{q}_i(t) - q_i(t) = \delta q_i(t)$ zaista virtuelna promena generalisane koordinate q_i .



Još malo varijacionog računa

Iz izraza za varijaciju proizvoljne funkcije $F(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$:

$$\delta F(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right),$$

slede jednakosti:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha F) &= \alpha \delta F, \quad \alpha = \text{const} \\ \delta(F_1 + F_2) &= \delta F_1 + \delta F_2, \\ \delta(F_1 F_2) &= F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1, \\ \delta F_1(F_2(q, \dot{q}, t)) &= \frac{dF_1}{dF_2} \delta F_2, \\ \delta F(f_1(q, \dot{q}, t), \dots, f_k(q, \dot{q}, t)) &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial f_i} \delta f_i, \end{aligned}$$

što se dokazuje na sledeći način:

$$\delta(\alpha F) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(\alpha F)}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial(\alpha F)}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \alpha \delta F$$

$$\begin{aligned}
\delta(F_1 + F_2) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (F_1 + F_2) \delta q_i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (F_1 + F_2) \delta \dot{q}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \delta F_1 + \delta F_2, \\
\delta(F_1 F_2) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (F_1 F_2) \delta q_i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (F_1 F_2) \delta \dot{q}_i \right) \\
&= F_1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + F_2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\
&= F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1, \\
\delta F_1(F_2(q, \dot{q}, t)) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dF_1}{dF_2} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{dF_1}{dF_2} \frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \frac{dF_1}{dF_2} \delta F_2, \\
\delta F(f_1(q, \dot{q}, t), \dots, f_k(q, \dot{q}, t)) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial f_j} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial f_j} \delta f_j
\end{aligned}$$

Hamiltonovi sistemi

Pod Hamiltonovim sistemima podrazumevamo sve one sisteme za koje se može naći funkcija $L(q, \dot{q}, t)$ (koja ne mora biti jednaka $T - V$), tako da se odgovarajuće Ojler-Lagranževe jednačine u svom eksplicitnom obliku poklapaju sa diferencijalnim jednačinama kretanja tog sistema, tj. da važi Hamiltonov princip najmanjeg dejstva za $W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$. Ovi sistemi ne moraju biti mehanički i u tom smislu se kaže da Hamiltonov princip predstavlja opšti princip teorijske fizike. Zaista, principi analogni Hamiltonovom principu u mehanici, postoje i u drugim oblastima fizike, npr. Maksvelove jednačine za elektromagnetno polje, mogu se napisati u obliku Ojler-Lagranževih jednačina za pogodno definisano dejstvo itd.

Primer

Za česticu mase m koja duž vertikale pada u homogenom gravitacionom polju, pri čemu na nju deluje i sila otpora sredine, proporcionalna njenoj brzini sa koeficijentom proporcionalnosti am , funkcija

$$L' = \frac{1}{2} m e^{at} (\dot{x}^2 + 2gx),$$

gde je x osa orijentisana vertikalno naniže, stavljena u Ojler-Lagranževu jednačinu

$$\frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 0,$$

daje diferencijalnu jednačinu

$$m\ddot{x} = mg - ma\dot{x}.$$

Ova jednačina se može dobiti i direktno iz II Njutnovog zakona, ili pomoću Lagranževe jednačine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q^*,$$

gde je

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgx, \quad Q^* = -ma\dot{x}.$$

Ovde je zgodno primetiti da ako lagranžijan L zadovoljava Hamiltonov princip, onda će ga takođe i funkcije $L' = \alpha L$ i $L' = L + df(q, t)/dt$ u svojstvu lagranžijana zadovoljavati. Za prvu funkciju je to očigledno, a za drugu

je dejstvo

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{df(q, t)}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} df(q, t) = W + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1), \quad (244)$$

pa je njegova varijacija

$$\delta W' = \delta W + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i(t_2) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i(t_1) = \delta W, \quad (245)$$

gde smo iskoristili činjenicu da su varijacije generalisanih koordinata u trenucima t_1 i t_2 jednake nuli. Konačno, ako ovako definisani lagranžijani L' daju iste diferencijalne jednačine kao i L , onda je jasno da i lagranžijan

$$L' = \alpha L + \frac{df(q, t)}{dt}, \quad (246)$$

takođe daje iste diferencijalne jednačine kada se zameni u Ojler-Lagranževe jednačine.

Kanonske transformacije

Ekvivalencija Hamiltonovih jednačina i Hamiltonovog principa

Iz definicije hamiltonijana sledi da se lagranžijan može napisati kao

$$L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H,$$

pa je varijacija lagranžijana, na osnovu osobina pokazanih u prethodnom odeljku, jednaka

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \delta(p_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i) - \delta H = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right).$$

Pošto varijacija i određeni integral u izrazu za dejstvo mogu da zamene mesta, varijacija Hamiltonovog dejstva je jednaka

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt.$$

Kako je

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \delta q_i dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i d(\delta q_i) = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i dp_i = - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \dot{p}_i dt,$$

gde smo iskoristili činjenicu da varijacija i izvod po vremenu mogu da komutiraju, kao i granični uslov $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, konačno za varijaciju dejstva dobijamo izraz

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt.$$

Ako su sve sile nepotencijalne onda je iz ovog izraza jasno da, zbog međusobne nezavisnosti δq_i i δp_i , Hamiltonov princip važi ako i samo ako su zadovoljene Hamiltonove jednačine, čime smo eksplicitno dokazali ekvivalenciju Hamiltonovog principa i Hamiltonovih jednačina.

Kanonske transformacije

Generalisane koordinate q_i se za jedan isti sistem mogu birati na razne načine, međutim, iz Hamiltonovog principa za sisteme sa potencijalnim silama sledi da oblik Lagranževih jednačina mora uvek ostati isti. Može se i formalno strogo pokazati da isto važi i za sisteme sa nepotencijalnim silama. Drugim rečima, transformacije u konfiguracionom prostoru ne menjaju oblik Lagranževih jednačina. Nasuprot tome, ispostavlja se da postoje transformacije kanonskih

promenljivih, tj. transformacije u faznom prostoru, koje ne održavaju oblik Hamiltonovih jednačina. Transformacije u faznom prostoru koje održavaju oblik Hamiltonovih (kanonskih) jednačina, nazivaju se **kanonskim transformacijama**. Preciznije, obostrano jednoznačnu transformaciju oblika

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (247)$$

zvaćemo kanonskom ako postoji funkcija $\tilde{H}(Q, P, t)$, takva da su zadovoljene jednačine

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Pošto su Hamiltonove jednačine ekvivalentne Hamiltonovom principu, kao što smo pokazali u prethodnom odeljku, zahtev da je transformacija kanonska ekvivalentan je zahtevu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \tilde{H} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \tilde{H} dt \right) = 0,$$

pri čemu važi $\delta Q_i(t_1) = \delta Q_i(t_2) = 0$. S druge strane, „prvobitne“ kanonske promenljive q i p su zadovoljavale kako Hamiltonove jednačine tako i Hamiltonov princip, pa je i za njih važno

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) = 0.$$

Kako je za bilo kakvu funkciju $F(q, Q, t)$ „starih“ i „novih“ generalisanih koordinata, q i Q , zbog graničnih uslova zadovoljeno

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dF &= \delta (F(q(t_2), Q(t_2), t_2) - F(q(t_1), Q(t_1), t_1)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial F}{\partial q_i} \right|_{t_2} \delta q_i(t_2) + \left. \frac{\partial F}{\partial Q_i} \right|_{t_2} \delta Q_i(t_2) - \left. \frac{\partial F}{\partial q_i} \right|_{t_1} \delta q_i(t_1) - \left. \frac{\partial F}{\partial Q_i} \right|_{t_1} \delta Q_i(t_1) \right) = 0 \end{aligned}$$

jasno je da će, ako važi

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \tilde{H} dt + dF. \quad (248)$$

transformacija (247) biti kanonska.² Uobičajeno je da se uslov (248) naziva **uslovom kanoničnosti**, a funkcija F **generatrisom kanonske transformacije**. Iz uslova kanoničnosti sledi

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \tilde{H} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt,$$

pa izjednačavanjem članova uz iste diferencijale međusobno nezavisnih promenljivih q_i , Q_i i t , dobijamo jednačine

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad \tilde{H} - H = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (249)$$

Znači, ako je zadata funkcija $F(q, Q, t)$, onda iz jednačina (249) možemo naći vezu između starih i novih kanonskih promenljivih u obliku (247), kao i hamiltonijan \tilde{H} u novim promenljivim. Obrnuto, ako je zadata kanonska transformacija (247), onda se pomoću (249) mogu naći generatrisa i hamiltonijan \tilde{H} u novim promenljivim.

Uzimajući u obzir da je

$$d(P_i Q_i) = P_i dQ_i + Q_i dP_i, \quad d(p_i q_i) = p_i dq_i + q_i dp_i,$$

²Jasno, ovim uslovom nisu pokrivenne sve kanonske transformacije. Npr. iz uslova $\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \alpha (\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \tilde{H} dt) + dF$ takođe sledi da Hamiltonov princip važi u novim promenljivim ako je važio u starim.

uslov kanoničnosti (248) se dalje može transformisati u jedan od sledećih oblika

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = - \sum_{i=1}^n Q_i dP_i - \tilde{H} dt + d \left(F + \sum_{i=1}^n P_i Q_i \right), \quad (250)$$

$$- \sum_{i=1}^n q_i dp_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - \tilde{H} dt + d \left(F - \sum_{i=1}^n p_i q_i \right), \quad (251)$$

$$- \sum_{i=1}^n q_i dp_i - H dt = - \sum_{i=1}^n Q_i dP_i - \tilde{H} dt + d \left(F + \sum_{i=1}^n (P_i Q_i - p_i q_i) \right), \quad (252)$$

odakle, ako uvedemo oznake

$$F_2(q, P, t) = F + \sum_{i=1}^n P_i Q_i, \quad (253)$$

$$F_3(Q, P, t) = F - \sum_{i=1}^n p_i q_i, \quad (254)$$

$$F_4(p, P, t) = F + \sum_{i=1}^n (P_i Q_i - p_i q_i), \quad (255)$$

slede relacije

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (256)$$

$$q_i = - \frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (257)$$

$$q_i = - \frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (258)$$

Funkcija generatrisa se dakle može zadavati kao funkcija bilo kojih $2n$ nezavisnih promenljivih iz skupa od ukupno $4n$ starih i novih kanonskih promenljivih.

Primeri:

1. Nađimo kanonsku transformaciju generisanu funkcijom

$$F_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i. \quad (259)$$

Pošto je funkcija generatrisa zadata kao funkcija starih koordinata i novih impulsa treba primeniti jednačine (256), na osnovu kojih dobijamo

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \quad \tilde{H} = H,$$

tj. funkcija (259) je generatrisa identične transformacije.

2. Ako je transformacija kanonskih promenljivih oblika

$$Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i,$$

onda je

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = - \sum_{i=1}^n Q_i dP_i - H dt = - \left(\sum_{i=1}^n d(Q_i P_i) - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i \right) - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - H dt - d \sum_{i=1}^n Q_i P_i,$$

odakle sledi da ovakva transformacija jeste kanonska sa funkcijom generatrisom $F = - \sum P_i Q_i = \sum q_i Q_i$. Na sličan način, lako se proverava da transformacija $Q_i = p_i, P_i = q_i$ nije kanonska.

Iz poslednjeg primera je jasno da kanonske transformacije generalisane koordinate i impulse lišavaju njihovog prvobitnog smisla, tj. Q_i ne mora da bude vezano isključivo za prostorne koordinate, dok P_i može da određuje i prostornu konfiguraciju sistema. Zbog toga je i zgodno koristiti naziv kanonske promenljive. Takođe je jasno da se pogodno izabranom kanonskom transformacijom, oblik Hamiltonovih jednačina može pojednostaviti. Npr, ako se transformacijom postigne da novi hamiltonijan postane jednak nuli, Hamiltonove jednačine dobijaju trivijalan oblik iz koga sledi da su nove kanonske promenljive integrali kretanja.

Simetrije i zakoni održanja

Da bismo pokazali da između simetrija hamiltonijana i zakona održanja postoji veza, uočimo prvo tzv. **beskonačno male kanonske transformacije**, tj. kanonske transformacije pri kojima se kanonske promenljive infinitezimalno malo promene. Ako sa Δq_i i Δp_i označimo te male promene promenljivih, onda je

$$Q_i = q_i + \Delta q_i, \quad P_i = p_i + \Delta p_i, \quad (260)$$

a pošto smo u prethodnoj lekciji pokazali da identičnoj transformaciji odgovara funkcija generatrisa $F_2 = \sum q_i P_i$, onda malo transformaciji odgovara generatrisa

$$F_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \epsilon G(q, P), \quad (261)$$

gde je ϵ mali parametar, a G funkcija koja konkretno određuje oblik transformacije i koju ćemo zvati **generator** beskonačno male transformacije. Pomoću relacija (256) nalazimo dalje

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

odakle je

$$\Delta p_i = P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (262)$$

Slično:

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i},$$

pa je

$$\Delta q_i = Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad (263)$$

pošto je P_i blisko p_i .

Primer: Ako za generator izaberemo hamiltonijan, tj. $G = H$, a za mali parametar mali vremenski interval $\epsilon = dt$, onda iz (262) i (263) dobijamo

$$\Delta p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt = \dot{p}_i dt = dp_i, \quad \Delta q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = \dot{q}_i dt = dq_i,$$

tj. ovakva transformacija opisuje vremensku evoluciju posmatranog sistema. Znači, stvarno kretanje sistema može se u faznom prostoru opisati pomoću jedne beskonačno male transformacije, čiji je generator hamiltonijan.

Proizvoljna funkcija $u(q, p)$ kanonskih promenljivih pri beskonačno malo transformaciji promeni se za

$$\Delta u = u(q + \Delta q, p + \Delta p) - u(q, p) \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \Delta p_i \right) = \epsilon \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right),$$

što se pomoću Poasonove zgrade može napisati u obliku

$$\Delta u = \epsilon [u, G]. \quad (264)$$

Odatle, za promenu hamiltonijana pri ovakvoj transformaciji dobijamo

$$\Delta H = \epsilon[H, G]. \quad (265)$$

Pošto smo G uveli tako da ne zavisi eksplicitno od vremena, a pretpostavljamo da nepotencijalnih sila nema, onda je G integral kretanja ako i samo ako je $[H, G] = 0$. U tom slučaju je, prema poslednjoj formuli i $\Delta H = 0$. Drugim rečima, *svi prvi integrali jednačina kretanja su generatori beskonačno malih kanonskih transformacija pri kojima se hamiltonijan ne menja*. I obrnuto, *ako se pri nekoj maloj transformaciji hamiltonijan ne menja, onda je generator te transformacije integral kretanja*.

Ako je q_i ciklična koordinata, onda H ne zavisi eksplicitno od q_i , pa se neće promeniti pri beskonačno maloj promeni q_i . Drugim rečima, pri transformaciji

$$\Delta q_j = \epsilon \delta_{ij}, \quad \Delta p_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

hamiltonijan se ne menja, što znači da je odgovarajući generator integral kretanja. Pošto je

$$\Delta p_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} = 0,$$

sledi da G ne zavisi od generalisanih koordinata, a iz

$$\Delta q_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} = \epsilon \delta_{ij}$$

sledi da je $G = p_i$, tj p_i je integral kretanja. To je, naravno, sledilo i direktno iz Lagranževih ili Hamiltonovih jednačina, ali ovde vidimo da je to i posledica simetrije sistema, tj. činjenice da je hamiltonijan invarijantan u odnosu na promenu odgovarajuće koordinate. Takav smo slučaj imali npr. kod centralnog kretanja, gde hamiltonijan nije zavasio eksplicitno od polarnog ugla φ , što pak znači da nije bitno kako ćemo u ravni u kojoj se čestica kreće postaviti ose koordinatnog sistema, što je opet posledica činjenice da je sila centralna, tj. nema dominantnog pravca u prostoru. Ili primer simetrične čigre, kod koje hamiltonijan ne zavisi ni od ugla φ ni od ugla ψ , što je opet posledica simetrije sistema.

Generator rotacije

Uočimo sada slobodan sistem, za generalisane koordinate izaberimo Dekartove koordinate čestica i razmotrimo transformaciju pri kojoj se sistem zarotira oko z -ose za mali ugao $\Delta\theta$. Rotacija sistema za ugao $\Delta\theta$ odgovara rotaciji koordinatnog sistema za ugao $-\Delta\theta$, pa se nove koordinate X_i , Y_i i Z_i dobijaju pomoću matrice rotacije na sledeći način

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\Delta\theta) & \sin(-\Delta\theta) & 0 \\ -\sin(-\Delta\theta) & \cos(-\Delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\theta & 0 \\ \Delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix},$$

odakle je

$$\Delta x_i = -\Delta\theta y_i, \quad \Delta y_i = \Delta\theta x_i, \quad \Delta z_i = 0.$$

Pošto ovde $\Delta\theta$ možemo da uzmemo za parametar ϵ , iz relacija (263) sledi

$$-y_i = \frac{\partial G}{\partial p_{ix}}, \quad x_i = \frac{\partial G}{\partial p_{iy}},$$

odakle je generator ove transformacije

$$G = \sum_{i=1}^n (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}),$$

što je jednako z komponenti ukupnog momenta impulsa sistema $-M_z$. Znači, ako je M_z integral kretanja to znači da je hamiltonijan takvog sistema invarijantan u odnosu na malu rotaciju oko z -ose, i obrnuto, ako je hamiltonijan invarijantan u odnosu na malu rotaciju oko z -ose, z komponenta momenta impulsa se održava. Pošto pravac z -ose možemo proizvoljno da izaberemo, jasno je da će generator male rotacije oko pravca određenog ortom \vec{n} biti $G = \vec{n} \cdot \vec{M}$.

Generator translacije

Maloj translaciji koordinatnog sistema duž npr. x -ose, odgovaraju jednačine

$$X_i = x_i + \epsilon,$$

odakle je

$$\Delta x_i = \epsilon = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_{ix}} \Rightarrow G = \sum_{i=1}^n p_{ix} = P_x.$$

U slučaju translacije u pravcu čiji je ort \vec{n} odgovarajući generator bi bio $G = \vec{n} \cdot \vec{P}$, gde je \vec{P} ukupni impuls sistema. Znači, zakon održanja impulsa vezan je za invarijantnost hamiltonijana u odnosu na prostornu translaciju.

Mehanika kontinuuma

Hipoteza kontinuuma

Supstanca se sastoji od molekula, koji se sastoje od atoma i subatomske čestice. Ona, dakle, nije kontinualna. Pa ipak, postoje mnogi aspekti ponašanja raznih materijala, kao što je, npr. istezanje čelične šipke pod delovanjem neke sile ili postojanje sile otpora pri kretanju tela kroz vazduh i slično, koji se mogu opisati i predvideti pomoću teorija koje ne uzimaju u obzir diskretnu prirodu supstance. U osnovi tih teorija leži tzv. *hipoteza kontinuuma*, po kojoj su materijali beskonačno deljivi. U skladu sa hipotezom kontinuuma moguće je uočiti infinitezimalno malu zapreminu supstance, koja se naziva delić kontinuuma, pri čemu u svakoj okolini tog delića postoji supstanca. Da li je hipoteza kontinuuma opravdana ili ne zavisi od posmatrane situacije: npr. u mnogim slučajevima moguće je čelik smatrati kontinualnim materijalom, ali ne i ako se posmatra prostiranje talasa izuzetno malih talasnih dužina kroz njega. S druge strane, osobine razređenog gasa pod određenim okolnostima mogu se odlično opisati smatrajući gas neprekidnom sredinom. U svakom slučaju, nije dobro opravdavati kontinualni pristup brojem čestica u određenoj zapremini (tj. gustinom). Na kraju krajeva, infinitezimalno mala zapremina u limesu ili sadrži elementarnu česticu ili ne sadrži ništa. U tom smislu treba imati u vidu da matematički gledano delić predstavlja tačku, ali sa stanovišta fizike, to je mala zapremina (mnogo manja od ukupne zapremine razmatranog sistema) u kojoj se još uvek nalazi puno čestica $N \gg 1$, ali mnogo manje od ukupnog broja čestica u sistemu. Takva mala zapremina naziva se *fizički beskonačno mala zapremina*. Takođe, vrednosti fizičkih veličine "u tački" \vec{r} i "u trenutku" t , zapravo predstavljaju *lokalne vrednosti*, tj. vrednosti razmatrane veličine usrednjene po fizički beskonačno maloj zapremini, u kratkom vremenskom intervalu. Ovaj kratki vremenski interval, može se slično uvesti kao *fizički beskonačno kratak*, tj. to je interval mnogo kraći od ukupnog vremena razmatranja sistema, u toku kog se pri merenju ta veličina ne menja toliko da bi se promenila njena srednja vrednost, ali dovoljno dugačak da mikroskopske promene unutar delića ne dođu do izražaja. Samo ako je u razmatranoj situaciji moguće na takav način uvesti delić, koji dalje može da se tretira kao čestica, hipoteza kontinuuma ima smisla. Konačan odgovor na pitanje da li je hipoteza kontinuuma opravdana u nekoj situaciji ili nije daje samo eksperimentalna provera. Ono što će ovde biti razmatrano u praksi je već veoma dugo potvrđivano u raznim situacijama, pa ćemo u daljem toku kursa uvek smatrati da se ono što radimo odnosi na slučajeve kada su zadovoljeni uslovi za primenu hipoteze kontinuuma.

Lagranžev i Ojlerov metod u mehanici kontinuuma

Postoje dva osnovna pristupa prilikom proučavanja kontinualne sredine: (1) Lagranžev ili supstancijalni i (2) Ojlerov ili metod polja.

1. **Lagranžev metod.** Kod ovog metoda uoči se položaj svih delića u nekom početnom trenutku $t = t_0$ i dalje se prati kretanje svakog od tih delića. Ako se neki delić u početnom trenutku nalazio u tački $\vec{r}_0 = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$, onda možemo da kažemo da će se u proizvoljnom sledećem trenutku on nalaziti u tački $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$, čiji položaj zavisi kako od početnog položaja $\vec{r}_0 = (X_1, X_2, X_3)$, tako i trenutka t . Sve fizičke veličine razmatramo duž putanje delića, dakle u funkciji početnih koordinata (X_1, X_2, X_3) i vremenskog trenutka t . Ako, recimo, sa T označimo temperaturu, onda $T(X_1, X_2, X_3, t)$ predstavlja temperaturu u tački u kojoj se u trenutku t nalazi delić koji se u početnom trenutku nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) . Kolokvijalno bismo mogli da kažemo da se u ovom pristupu razmatraju fizičke veličine i pojave onako kako ih "osećaju" delići, tj. supstanca, pa se zato ovaj pristup zove i supstancijalni, a promenljive (X_1, X_2, X_3) supstancijalne promenljive. Slično, zapremina koja se uvek sastoji od istih delića naziva se "supstancijalna zapremina". Ilustracija primene Lagranževog metoda je razmatranje pomeranja velikih vazdušnih masa na satelitskim snimcima u realnom vremenu.
2. **Ojlerov metod** odgovara matematičkom metodu polja, tj. sve fizičke veličine razmatraju se u tački prostora $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, čisto geometrijski, nezavisno od toga koji se delić nalazi u toj tački, u proizvoljnom vremenskom trenutku t . U tom metodu bi izraz $T(x_1, x_2, x_3, t)$ predstavljao temeperaturu u tački (x_1, x_2, x_3) u trenutku t . Poređenja radi, mogli bismo da kažemo da $T(x_1, x_2, x_3, t)$ predstavlja temperaturu koju "oseća" delić koji se u trenutku t našao na mestu (x_1, x_2, x_3) . U ovom pristupu nas, dakle, ne interesuje šta se sa tim delićem ranije dešavalo, niti šta će se sa njim dešavati posle prolaska kroz tu tačku. Koordinate (x_1, x_2, x_3)

nazivaju se Ojlerove promenljive. Beleženje dnevnih vrednosti temperature, pritiska i brzine vetra na jednom mestu predstavlja primer primene Ojlerovog metoda.

Iako se u svakoj situaciji mogu primeniti i jedan i drugi metod, Lagranžev metod se češće primenjuje kod čvrstih tela, kod kojih je pokretljivost delića mala, tj. obično cestice osciluju oko nekog svog srednjeg položaja, dok se kod fluida, koji se odlikuju velikom pokretljivošću, najčešće primenjuje Ojlerov metod.

Supstancijalni izvod

Pretpostavimo da razmatramo neku vektorsku fizičku veličinu \vec{A} i uočimo dve njene vrednosti: u tački $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ u trenutku t i u infinitezimalno bliskoj tački $\vec{r} + d\vec{r} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ i infinitezimalno bliskom vremenskom trenutku $t + dt$. Primenjujući matematički izraz za diferencijal funkcije više promenljivih, možemo da pišemo da je:

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt, \quad (1)$$

gde je $d\vec{A} = \vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t)$. Ovaj izraz važi za bilo kakve infinitezimalne vrednosti $d\vec{r}$ i dt , međutim, ako nas zanima kako se menja veličina \vec{A} duž trajektorije delića, onda važi $d\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}, t)dt$, gde je $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$ polje brzine u razmatranoj kontinualnoj sredini (brzina delića). Onda iz formule (1) sledi

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt, \quad (2)$$

odnosno

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3)$$

što se uz pomoć Hamiltonovog (nabla) operatora

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

može napisati kao

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4)$$

Izraz $(\vec{v} \cdot \nabla)$ je kraći zapis za

$$v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

i formalno predstavlja skalarni proizvod vektora brzine \vec{v} i nabla operatora ∇ .

Izraz (3) predstavlja brzinu promene vektorske veličine \vec{A} duž trajektorije delića, dakle brzinu promene \vec{A} , kako je "oseća" supstanca, pa se zato naziva **supstancijalni izvod** veličine \vec{A} . Na sličan način bismo mogli da izvedemo i izraz za brzinu promene skalarnog polja $f(\vec{r}, t)$ duž trajektorije delića. Tako bismo dobili

$$\frac{df}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{v} \cdot \text{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5)$$

Vidimo da se supstancijalni izvod, kako vektorske, tako i skalarne veličine, sastoji od dva sabirka: $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$ (f) i $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ($\frac{\partial f}{\partial t}$). Prvi u sebi sadrži polje brzine i parcijalne izvode po prostornim koordinatama, pa se fizički može protumačiti da potiče od toga što delići koji pristižu u uočenu tačku sa sobom donose promenu fizičke situacije, tj. vrednosti razmatrane fizičke veličine. Drugi sabirak predstavlja lokalnu promenu fizičke veličine sa vremenom.

Ubrzanje delića po definiciji predstavlja supstancijalni izvod brzine, pa je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (6)$$

Primer....

Tenzor brzine deformacije i vektor vrtložnosti

Neka je zadato polje brzine $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}(\vec{x}, t)$. Za dve infinitezimalno bliske tačke u prostoru \vec{x} i $\vec{x} + d\vec{x}$ važi

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} dx_i + \dots, \quad (7)$$

odakle, ako zanemarimo članove višeg reda, dobijamo

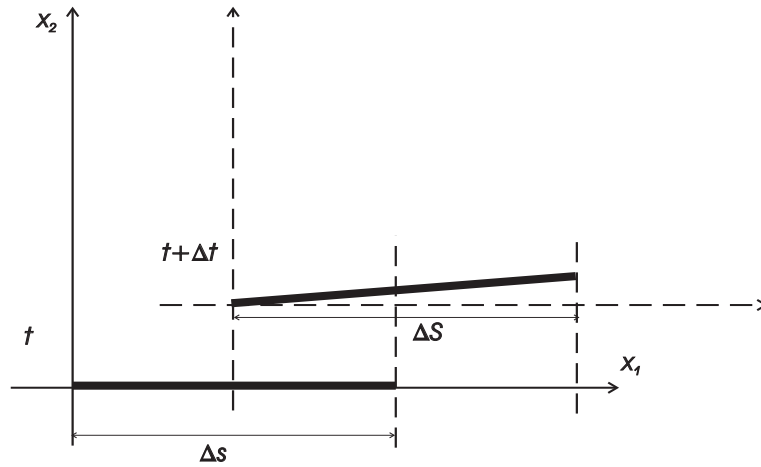
$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t) = d\vec{v} = (d\vec{x} \cdot \nabla) \vec{v} = \tilde{T} d\vec{x}, \quad \mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (8)$$

Tenzor \tilde{T} možemo da napišemo u obliku zbira njegovog simetričnog $\tilde{\mathcal{V}}$ i antisimetričnog dela $\tilde{\mathcal{R}}$ kao:

$$\tilde{T} = \tilde{\mathcal{V}} + \tilde{\mathcal{R}}, \quad \mathcal{V}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9)$$

Simetrični tenzor $\tilde{\mathcal{V}}$ nazivamo **tenzorom brzine deformacije**. Da bismo videli kakav fizički smisao ima ovaj tenzor uočimo kratku supstancijalnu duž (tj. duž koja se sastoji od delića kontinualne sredine koju razmatramo) $\Delta\vec{x}$, koja u trenutku t ima pravac ose x_1 i dužinu Δs (vidi sliku). Za kratko vreme Δt , ova duž se pomeri, pri čemu joj se dužina i orijentacija takođe promene. Ako su Δs i Δt dovoljno mali možemo da pretpostavimo da su te promene male. Početna tačka uočene duži se u pravcu x_1 za vreme Δt pomeri za $v_1(\vec{x}, t)\Delta t$, a krajnja za $v_1(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t)\Delta t = (v_1(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta s)\Delta t$, tako da projekcija ove duži na x_1 osu u trenutku $t + \Delta t$ ima dužinu

$$\Delta S = \left(\Delta s + \left(v_1(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta s \right) \Delta t \right) - v_1(\vec{x}, t)\Delta t = \Delta s \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t \right). \quad (10)$$



Odatle direktno sledi

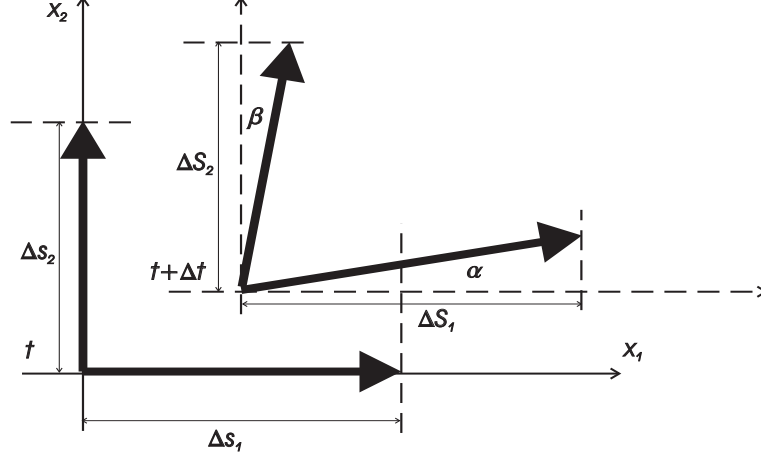
$$\frac{\Delta S - \Delta s}{\Delta t \Delta s} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \mathcal{V}_{11}, \quad (11)$$

što znači da dijagonalni element \mathcal{V}_{11} tenzora brzine deformacije ima smisao relativne promene dužine u jedinici vremena supstancijalnih duži u pravcu ose x_1 . Sličnim postupkom bi se moglo pokazati da i preostala dva dijagonalna elementa imaju smisao brzine relativne promene dužine u odgovarajućem pravcu. Još opštije, može se pokazati da veličina $\vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{V}} \cdot \vec{n}$, gde je \vec{n} ort proizvoljnog pravca, ima fizički smisao brzine promene dužine infinitezimalnih supstancijalnih duži u pravcu orta \vec{n} .

Vandijagonalni elementi tenzora brzine deformacije su u vezi sa promenama uglova. Naime, uočimo sada dve male supstancijalne duži sa zajedničkim početkom: $\Delta\vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ i $\Delta\vec{x}^2 = \Delta s_2 \vec{e}_2$, u trenutku t . Nakon kratkog vremenskog intervala Δt ove dve duži promene pravac, tako da prva duž sa osom x_1 zaklapa mali ugao α , a druga sa osom x_2 mali ugao β (vidi sliku). Zajednička tačka ovih duži u pravcu x_2 za vreme Δt pređe put $v_2(\vec{x}, t)\Delta t$, a

drugi kraj duži $\Delta\vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ se u pravcu x_2 pomeri za $v_2(\vec{x} + \Delta s_1 \vec{e}_1, t) \Delta t = (v_2(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta s_1) \Delta t$. Ugao α je onda jednak

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{(v_2(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta s_1) \Delta t - v_2(\vec{x}, t) \Delta t}{\Delta s_1 (1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t)} \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta t. \quad (12)$$



Slično, ugao β je jednak

$$\beta \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Delta t, \quad (13)$$

pa je vandijagonalni element \mathcal{V}_{12} jednak

$$\mathcal{V}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\alpha + \beta}{2 \Delta t}. \quad (14)$$

Drugim rečima, vandijagonalni element \mathcal{V}_{12} ima smisao polovine promene ugla u jedinici vremena između supstancijalnih duži koje imaju pravac osa x_1 i x_2 . Slično se pokazuje da je veličina $\vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{V}} \cdot \vec{m}$ jednaka polovini brzine promene ugla između infinitesimalnih supstancijalnih duži u pravcu međusobno ortogonalnih ortova \vec{n} i \vec{m} .

Vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ definiše kao

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (15)$$

odakle sledi da je antisimetrični tenzor $\tilde{\mathcal{R}}$ reprezentovan matricom

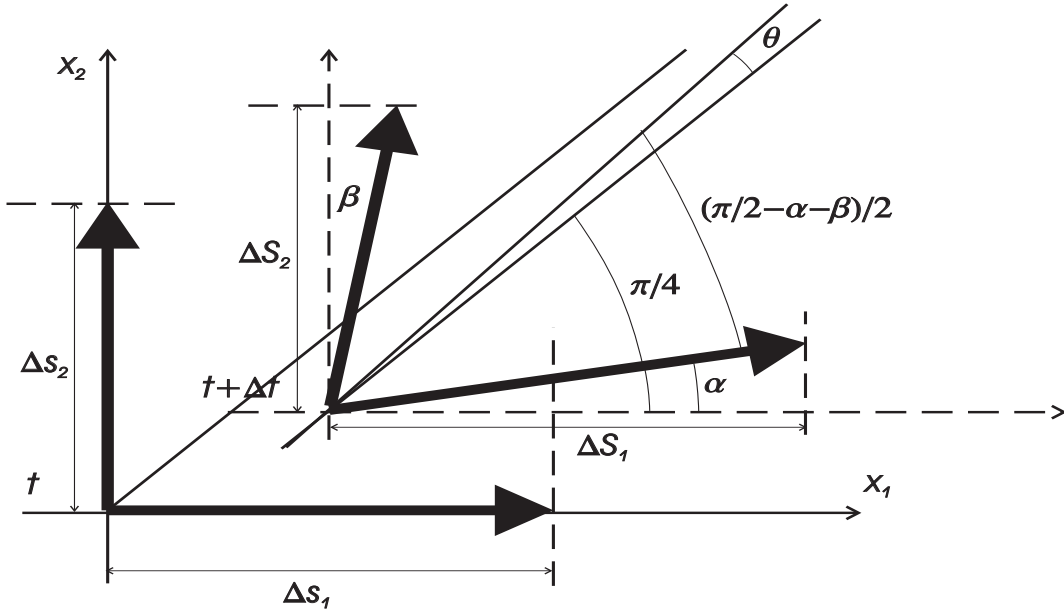
$$\tilde{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

pa se lako pokazuje da je

$$\tilde{\mathcal{R}} d\vec{x} = \omega \times d\vec{x}. \quad (17)$$

Ako ponovo uočimo male supstancijalne duži $\Delta\vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ i $\Delta\vec{x}^2 = \Delta s_2 \vec{e}_2$, u trenutku t i simetralu ugla između ovih duži, a zatim simetralu ugla koju ove duži zaklapaju u trenutku $t + \Delta t$, sa slike se vidi da je ugao $\Delta\theta$ za koji se simetrala zaokrene za vreme Δt jednak

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \Delta t = \omega_3 \Delta t, \quad (18)$$



pa je

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega_3, \quad (19)$$

tj. komponenta ω_3 vektora vrtložnosti ima smisao ugaone brzine rotacije simetrale ugla između supstancijalnih duži koje se kreću u ravni Ox_1x_2 . Slično se može pokazati i za preostale komponente vektora vrtložnosti $\vec{\omega}$, što znači da se deo promene brzine $d\vec{v}$ (8) koji odgovara antisimetričnom delu tenzora \tilde{T} može interpretirati kao brzina pri rotaciji ugaonom brzinom jednakom vektoru vrtložnosti $\vec{\omega}$. Konačno, iz relacije

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \omega \times d\vec{x} + \tilde{V}d\vec{x} \quad (20)$$

možemo da zaključimo da je kretanje infinitezimalnih delova unutar kontinualne sredine može opisati kao kombinacija translatornog, rotacionog i deformacionog kretanja, kojima redom odgovaraju brzine $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $\omega \times d\vec{x}$ i $\tilde{V}d\vec{x}$ u prethodnom izrazu.

Jednačina kontinuiteta

Uočimo sada malu supstancijalnu zapreminu u obliku paralelepipeda, čije ivice u trenutku t imaju pravac koordinatnih osa, a dužine su im Δx_1 , Δx_2 i Δx_3 . Za vreme Δt ovaj paralelepiped se malo pomeri, a ivice mu se malo iskose i produže (ili skrate). Pošto su sve te promene male, može se smatrati da je nova zapremina približno jednaka $\Delta V' = \Delta x'_1 \Delta x'_2 \Delta x'_3$, gde su $\Delta x'_1$, $\Delta x'_2$ i $\Delta x'_3$ nove dužine ivica, tako da je relativna promena zapremine jednaka

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = (\mathcal{V}_{11}\Delta t + 1)(\mathcal{V}_{22}\Delta t + 1)(\mathcal{V}_{33}\Delta t + 1) - 1, \quad (21)$$

gde smo iskoristili relacije

$$\Delta x'_1 = \Delta x_1(\mathcal{V}_{11}\Delta t + 1), \quad \Delta x'_2 = \Delta x_2(\mathcal{V}_{22}\Delta t + 1), \quad \Delta x'_3 = \Delta x_3(\mathcal{V}_{33}\Delta t + 1).$$

Pošto je Δt mali vremenski interval, a pretpostavljamo da su elementi tenzora brzine deformacije konačni, onda je $\mathcal{V}_{ii}\Delta t$ mnogo manje od 1, pa je

$$(\mathcal{V}_{11}\Delta t + 1)(\mathcal{V}_{22}\Delta t + 1)(\mathcal{V}_{33}\Delta t + 1) - 1 \approx (\mathcal{V}_{11} + \mathcal{V}_{22} + \mathcal{V}_{33})\Delta t = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \Delta t = \Delta t \operatorname{div} \vec{v}, \quad (22)$$

odakle je brzina relativne promene zapremine jednaka

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta t \Delta V} = \operatorname{Tr} \tilde{V} = \operatorname{div} \vec{v}. \quad (23)$$

Znači, ako je kretanje u kontinualnoj sredini takvo da je brzina relativne promene zapremine infinitezimalno malih supstancijalnih delova jednaka nuli, onda je

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad (24)$$

zbog čega se ova jednačina naziva uslovom **nestišljivosti**.

Neka je masa supstance koja se nalazi unutar uočene supstancijalne zapremine jednaka Δm . Pošto se pri kretanju ta zapremina stalno sastoji od istih čestica, prema klasičnom zakonu održanja mase Δm se ne menja, tj.

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho' \Delta V' = \text{const}, \quad (25)$$

gde su ρ i ΔV gustina i zapremina u trenutku t , a ρ' i $\Delta V'$ gustina i zapremina u trenutku $t + \Delta t$. Na osnovu jednačine (23) dalje sledi

$$\rho = \rho'(\Delta t \nabla \vec{v} + 1) \Rightarrow 0 = \rho' \nabla \vec{v} + \frac{\rho' - \rho}{\Delta t}. \quad (26)$$

Kako je

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho' - \rho}{\Delta t} = \frac{d\rho}{dt} \quad \text{i} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho' = \rho, \quad (27)$$

konačno sledi jednačina

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad (28)$$

koja opisuje promenu gustine u kontinualnoj sredini. Ova jednačina je poznata pod nazivom **jednačina kontinuiteta**, a često se koristi i u obliku

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (29)$$

koji sledi iz (28), posle zamene supstancijalnog izvoda gustine

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho,$$

kao i identiteta

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div}\vec{v}.$$

Zapreminske i površinske sile

U fizici kontinuuma sile se dele na zapreminske i površinske. Pod **zapreminskim silama** podrazumevaju se sile koje na sve deliće unutar kontinualne sredine deluju na isti način. Za takve sile uvodi se **masena gustina** sile \vec{f} na sledeći način: ako je ukupna zapreminska sila koja deluje na infinitezimalno malu zapreminu mase Δm unutar posmatrane sredine jednaka $\Delta \vec{F}$, onda je \vec{f} po definiciji jednako

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}. \quad (30)$$

Primer za zapreminsku silu je sila gravitacije, a odgovarajuća masena gustina je

$$\vec{f} = \vec{g},$$

gde je \vec{g} gravitaciono ubrzanje.

Površinske sile su sile koje se javljaju usled interakcije između delića unutar kontinualne sredine. Ispostavlja se da se delovanje tih sila ispoljava na graničnim površinama između pojedinih delova kontinualne sredine, a osnovna veličina kojom se ovakve sile opisuju je **vektor napona**. Uočimo u nekom trenutku jednu tačku u kontinualnoj sredini i neku malu zapreminu unutar koje se ta tačka nalazi. Provucimo kroz uočenu tačku jednu ravan, čiji je ort normale \vec{n} . Neka je površina dela te ravni koji se nalazi unutar uočene zapremine jednaka ΔS . Ako sa $\Delta \vec{F}^{povr}$ označimo ukupnu površinsku silu koja deluje na deliće unutar ravni ΔS , onda se vektor napona $\vec{P}_{\vec{n}}$ koji deluje u uočenoj tački definiše kao

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \vec{n} = \text{const}}} \frac{\Delta \vec{F}^{povr}}{\Delta S}. \quad (31)$$

Eksperimentalno je utvrđeno da između komponentata vektora napona i komponentata orta \vec{n} postoji linearna homogena veza, drugim rečima, ova dva vektora su povezana tzv. **tenzorom napona** $\vec{\mathcal{P}}$ kao

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \vec{\mathcal{P}}\vec{n}. \quad (32)$$

Takođe je za dosta široku klasu sredina utvrđeno da je tenzor napona simetričan tenzor i mi ćemo ovde razmatrati samo takve sredine.

Normalna komponenta vektora napona koji deluje u nekoj tački na elementarnu površinu čiji je ort normale \vec{n} jednaka je $\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{\mathcal{P}}\vec{n}$, odakle je jasno da dijagonalni elementi tenzora napona imaju smisao normalnih komponentata napona. Slično, vandijagonalni elementi tenzora napona imaju smisao odgovarajućih tangencijalnih komponentata vektora napona.

U opštem slučaju, tenzor napona nije unapred zadata veličina, već se za konkretnu sredinu njegovi elementi povezuju sa drugim karakterističnim veličinama kojima se opisuje kretanje te sredine, npr. sa pritiskom, elementima tenzora brzine deformacije i slično (vrši se tzv. modeliranje sredine). Na primer, poznato je da u fluidima koji miruju postoje samo normalni naponi. Drugim rečima, matrica koja odgovara tenzoru napona ima oblik:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Vektor napona koji u nekoj tački deluje na elementarnu površinu čiji je ort $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ u tom slučaju je jednak

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \mathcal{P}_{11}n_1\vec{e}_1 + \mathcal{P}_{22}n_2\vec{e}_2 + \mathcal{P}_{33}n_3\vec{e}_3,$$

ali takođe i izrazu

$$\vec{P}_{\vec{n}} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_1\vec{e}_1 + (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_2\vec{e}_2 + (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_3\vec{e}_3,$$

pa izjednačavanjem tih izraza zaključujemo da je

$$\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22} = \mathcal{P}_{33} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}).$$

Ispostavlja se, dakle, da ne samo što tenzor napona ima samo dijagonalne elemente, već su oni i međusobno jednaki i upravo imaju smisao negativne vrednosti hidrostatičkog pritiska p , tj. za fluide koji miruju tenzor napona ima oblik

$$\mathcal{P} = -p(x_1, x_2, x_3, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Osnovni dinamički zakon za kontinuum

Ako uočimo malu supstancijalnu zapreminu unutar kontinualne sredine, onda osnovna jednačina dinamike za takvo telo ima oblik

$$\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta m \vec{f} + \Delta \vec{F}^{povr}, \quad (35)$$

gde je Δm masa unutar uočene zapremine ΔV , \vec{a} ubrzanje tela, a \vec{f} srednja gustina zapreminske sile koja deluje na telo. Ako sa ΔS označimo ukupnu površinu tela, onda je ukupna površinska sila $\Delta \vec{F}^{povr}$ koja deluje na telo jednaka

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F}^{povr} &= \int_{\Delta S} \vec{P}_{\vec{n}} dS = \int_{\Delta S} \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Delta S} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\Delta S} \vec{\mathcal{P}} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \vec{e}_i \right) = \int_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \vec{\mathcal{P}} \vec{e}_i = \int_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j P_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \int_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (P_{ji} \vec{e}_i) \cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \int_{\Delta V} \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^3 P_{ji} \vec{e}_i \right) dV = \int_{\Delta V} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \operatorname{div} (\vec{\mathcal{P}}^T \cdot \vec{e}_j) dV, \end{aligned} \quad (36)$$

gde smo iskoristili oznaku za divergenciju tenzora, koja se u opštem slučaju za proizvoljni tenzor $\tilde{\mathcal{A}}$ u trodimenzionalnom prostoru definiše kao

$$\operatorname{div}\tilde{\mathcal{A}} = \nabla\tilde{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{e}_i). \quad (37)$$

Zbog simetričnosti tenzora napona dalje imamo

$$\Delta\vec{F}^{povr} = \int_{\Delta V} \operatorname{div}\tilde{\mathcal{P}}^T dV = \int_{\Delta V} \operatorname{div}\tilde{\mathcal{P}} dV, \quad (38)$$

odakle je

$$\Delta\vec{F}^{povr} = \Delta V \langle \operatorname{div}\tilde{\mathcal{P}} \rangle, \quad (39)$$

gde smo sa $\langle \operatorname{div}\tilde{\mathcal{P}} \rangle$ označili srednju vrednost divergencije tenzora napona u uočenoj supstancijalnoj zapremini. Vraćanjem ovog izraza u jednačinu (35), njenim deljenjem sa Δm , konačno u limesu $\Delta V \rightarrow 0$ dobijamo **osnovni dinamički zakon** za kontinualnu sredinu:

$$\vec{a} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla\tilde{\mathcal{P}}. \quad (40)$$

Pošto je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}, \quad (41)$$

eksplicitnije ova jednačina ima oblik

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla\tilde{\mathcal{P}}. \quad (42)$$

To je vektorska parcijalna diferencijalna jednačina u kojoj su nezavisne promenljive prostorne koordinate i vreme, a nepoznata funkcija brzina. U opštem slučaju, međutim, ni gustina ρ ni elementi tenzora napona nisu poznati, tako da je svaku konkretnu sredinu potrebno modelirati, tj. na neki način dovesti tenzor napona u vezu sa brzinom dodatnim jednačinama (tzv. konstitutivne jednačine). Što se zapreminskih sila tiče, one su u ovom kontekstu po pravilu poznate.

Idealan fluid

Ojlerova jednačina

Pri razmatranju raznih realnih fenomena kod kojih se unutrašnje trenje može zanemariti, fluidi se mogu tretirati kao tzv. **idealni fluidi**, za koje tenzor napona ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{E}} \quad (43)$$

gde je $\tilde{\mathcal{E}}$ jedinični tenzor, a $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ hidrostatički pritisak. Divergencija ovakvog tenzora jednaka je

$$\nabla(-p\tilde{\mathcal{E}}) = \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \operatorname{div}(-p\tilde{e}_i) = -\sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\operatorname{grad}p, \quad (44)$$

pa osnovna jednačina dinamike (42) za idealne fluide ima oblik

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}p \quad (45)$$

i poznata je pod imenom **Ojlerova jednačina**.

Bernulijev i Koši–Lagranžev integral

Ako se iskoriste vektorski identiteti

$$\vec{v} \times \operatorname{rot} v = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(v^2) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (46)$$

i

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(v^2) - \vec{v} \times \operatorname{rot} v \quad (47)$$

Ojlerova jednačina se može prepisati u obliku

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}(v^2) - \vec{v} \times \operatorname{rot} v = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (48)$$

Za proticanje fluida se kaže da je barotropno ako je pri takvom proticanju pritisak funkcija samo gustine, tj. $p = F(\rho)$. U tom slučaju se može uvesti funkcija pritiska $I(p)$ relacijom

$$I(p) = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (49)$$

pa je

$$\operatorname{grad} I(p) = \frac{dI}{dp} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (50)$$

a Ojlerova jednačina se, onda, dalje može transformisati u oblik

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}(v^2) - \vec{v} \times \operatorname{rot} v = \vec{f} - \operatorname{grad} I(p). \quad (51)$$

Ako su još i zapreminske sile potencijalne, tj. $\vec{f} = -\operatorname{grad} u$, gde je u potencijalna energija po jedinici mase, konačno sledi jednačina

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + u + I(p) \right) = \vec{v} \times \operatorname{rot} v. \quad (52)$$

Bernulijev integral

Za vizuelizaciju kretanja fluida uvode se tzv. **strujne linije**, koje se definišu kao linije kod kojih u svakoj tački vektor polja brzine \vec{v} ima pravac tangente na tu liniju. Drugim rečima, ako sa $d\vec{r}$ označimo infinitezimalni element strujne linije (koji, naravno, ima pravac tangente na nju), onda je

$$d\vec{v} = \lambda d\vec{r} \quad \text{ili} \quad d\vec{r} \times \vec{v} = 0, \quad (53)$$

odakle se dobijaju jednačine

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}, \quad (54)$$

čijim rešavanjem (tretirajući vreme kao parametar) možemo dobiti jednačine strujnih linija. Za stacionarna kretanja, kod kojih brzina ne zavisi eksplicitno od vremena, strujne linije se, naravno, poklapaju sa trajektorijama delića fluida.

Pretpostavimo sada da je

- proticanje stacionarno,
- zapreminske sile potencijalne,
- fluid barotropan.

Pod ovim pretpostavkama važi jednačina (52), koja se zbog uslova stacionarnosti svodi na

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2}v^2 + u + I \right) - \vec{v} \times \text{rot}v = 0. \quad (55)$$

Množenjem ove jednačine elementom strujne linije $d\vec{r} = \lambda\vec{v}$ dobijamo jednačinu

$$d\vec{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2}v^2 + u + I \right) = 0, \quad (56)$$

odakle sledi

$$d \left(\frac{1}{2}v^2 + u + I \right) = 0, \quad (57)$$

odnosno

$$\frac{1}{2}v^2 + u + I = \text{const} \quad (58)$$

duž strujne linije, što predstavlja tzv. *Bernulijev integral*. Ako je gustina fluida konstantna, a jedina zapreminska sila homogena sila gravitacije gustine $\vec{f} = -g\vec{e}_3$, onda je $u = gx_3$, $I = p/\rho$, pa dobijamo uobičajenu **Bernulijevu jednačinu**:

$$\frac{1}{2}v^2 + gx_3 + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (59)$$

Koši–Lagranžev integral

Koši–Lagranžev integral odnosi se proticanje barotropnih fluida u polju potencijalnih zapreminskih sila, pri kome važi da je

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{v} = 0. \quad (60)$$

Poslednji uslov je poznat kao **uslov bezvrtložnosti** i može se pokazati da iz njega sledi da postoji skalarna funkcija Φ , tzv. **potencijal brzine**, takva da je

$$\vec{v} = \text{grad}\Phi. \quad (61)$$

Dakle, u ovom slučaju zadovoljeni su uslovi

- proticanje bezvrtložno,
- zapreminske sile potencijalne,
- fluid barotropan,

pa se jednačina (52) svodi na

$$\text{grad} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + u + I(p) \right) = 0, \quad (62)$$

odakle zaključujemo da zbir $\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + u + I(p)$ ne zavisi od prostornih koordinata, vec samo od vremena, tj. funkcija

$$F(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + u + I(p) \quad (63)$$

u fiksiranom trenutku t u svakoj tački prostora ima istu vrednost. Ovo je poznato kao **Koši–Lagranžev integral**.

Viskozni fluidi

Pri kretanju fluida realno postoje tangencijalni naponi i oni su u vezi sa **viskoznošću**, tj. unutrašnjim trenjem. Usled uzajamne interakcije brže čestice fluida teže da povuku sporije, tako da se javljaju tangencijalni naponi između slojeva fluida koji se kreću različitim brzinama. Takođe, usled toplotnog kretanja pri sudaru čestica iz slojeva različitih brzina ili pri prelasku čestica iz jednog u drugi sloj dolazi do razmene impulsa, što se takođe manifestuje kroz postojanje tangencijalnih napona. Prvi mehanizam nastajanja viskoznosti je dominantan kod tečnosti, a drugi kod gasova. Jasno je da u oba slučaja viskoznost zavisi od temperature. Kako se sa porastom temperature povećava rastojanje među česticama, kod tečnosti se viskoznost smanjuje sa porastom temperature. Kod gasova se, naprotiv, usled intenziviranja toplotnog kretanja, sa porastom temperature povećava razmena impulsa između slojeva, a samim tim sa temperaturom se povećava i viskoznost.

Navije-Stoksovi fluidi

U opštem slučaju, postojanje tangencijalnih napona znači da tenzor napona ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{P}}', \quad (64)$$

gde je $\tilde{\mathcal{P}}'$ tzv. *tenzor viskoznosti*. Mi ćemo ovde detaljnije razmotriti samo slučaj **Navije-Stoksovih fluida**, kod kojih tenzor viskoznosti ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}}' = 2\eta\tilde{\mathcal{K}} + \xi\tilde{\mathcal{S}}, \quad (65)$$

gde su η i ξ **dinamički koeficijenti viskoznosti** (koje smatramo konstantama), a

$$\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{S}}, \quad \tilde{\mathcal{S}} = \frac{1}{3}(\nabla\tilde{v})\tilde{\mathcal{E}}. \quad (66)$$

Iz definicije tenzora $\tilde{\mathcal{S}}$ sledi da on predstavlja deo tenzora brzine deformacije koji je u vezi sa deformacijama pri kojima ne dolazi do iskošenja, tj. promena oblika (pošto nema vandijagonalnih elemenata), već samo do promena zapremine (tzv. *izotropne deformacije*), pri čemu je

$$\text{Tr}\tilde{\mathcal{S}} = \nabla\tilde{v} = \text{Tr}\tilde{\mathcal{V}}.$$

Ako pri kretanju ne dolazi do promena zapremine, onda je $\tilde{\mathcal{S}} = 0$, pa se tenzor brzine deformacije svodi na tenzor $\tilde{\mathcal{K}}$, tj. $\tilde{\mathcal{K}}$ predstavlja onaj deo tenzora brzine deformacije koji je u vezi sa deformacijama pri kojima dolazi samo do promene oblika, a ne i zapremine (tzv. *ekvivolumne deformacije*).

Navije-Stoksova jednačina

Da bismo dobili eksplicitan oblik osnovnog dinamičkog zakona za Navije-Stoksove fluide potrebno je da izračunamo divergenciju tenzora viskoznosti, odnosno divergencije tenzora $\tilde{\mathcal{K}}$ i $\tilde{\mathcal{S}}$. Divergencija tenzora $\tilde{\mathcal{S}}$ jednaka je

$$\nabla\tilde{\mathcal{S}} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3\tilde{e}_i\text{div}((\text{div}\tilde{v})\tilde{e}_i) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3\tilde{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{div}\tilde{v}) = \frac{1}{3}\text{graddiv}\tilde{v}, \quad (67)$$

a divergencija tenzora $\tilde{\mathcal{K}}$:

$$\nabla\tilde{\mathcal{K}} = \nabla\tilde{\mathcal{V}} - \nabla\tilde{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^3\tilde{e}_i\text{div}(\tilde{\mathcal{V}}\tilde{e}_i) - \frac{1}{3}\text{graddiv}\tilde{v}. \quad (68)$$

Pošto je

$$\tilde{\mathcal{V}}\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^3\mathcal{V}_{ji}\tilde{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\tilde{e}_j, \quad (69)$$

sledi da je

$$\text{div}(\tilde{\mathcal{V}}\tilde{e}_i) = \frac{1}{2}\text{div}\sum_{j=1}^3\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\tilde{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \Delta v_i\right), \quad (70)$$

pa je

$$\text{div}\tilde{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3\tilde{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\Delta\tilde{v} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\tilde{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^3\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\Delta\tilde{v} = \frac{1}{2}(\text{graddiv}\tilde{v} + \Delta\tilde{v}), \quad (71)$$

odnosno

$$\text{div}\tilde{\mathcal{K}} = \frac{1}{6}\text{graddiv}\tilde{v} + \frac{1}{2}\Delta\tilde{v}. \quad (72)$$

Onda je

$$\text{div}\tilde{\mathcal{P}}' = \frac{\eta + \xi}{3}\text{graddiv}\tilde{v} + \eta\Delta\tilde{v}, \quad (73)$$

pa osnovni dinamički zakon dobija oblik jednačine

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta + \xi}{3\rho} \text{grad} \text{div} \vec{v} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}, \quad (74)$$

poznate pod nazivom **Navije–Stoksova jednačina**. Ako je gustina konstantna, onda Navije–Stokosov fluid nazivamo Stoksovim fluidom, a iz Navije–Stoksove jednačine sledi tzv. Stoksova jednačina:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (75)$$

Obe ove jednačine su parcijalne diferencijalne jednačine, drugog reda i nelinearne, u opštem slučaju vrlo komplikovane. Ovdde ćemo rešiti jednostavan primer: treba naći profil brzine u Stoksovom fluidu koji stacionarno protiče između dve paralelne beskonačne ravne ploče. Zapreminske sile se zanemaruju, a fluid se kreće samo usled kretanja gornje ploče u sopstvenoj ravni konstantnom brzinom \vec{u} . Neka je rastojanje između ploča d , a gustina fluida $\rho = \text{const}$. Izaberimo koordinatni sistem tako da donja ploča leži u ravni $x_2 = 0$, gornja u ravni $x_2 = d$, a neka je x_1 osa određena pravcem vektora \vec{u} , tj neka je $\vec{u} = u\vec{e}_1$. Pod pretpostavkom da je kretanje laminarno, tj. u slojevima (dakle da nema značajnog mešanja susednih slojeva, tj. turbulencija), kao i zbog simetrije, pretpostavimo da je brzina delića u fluidu oblika $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$. Onda je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \vec{v} = 0,$$

a pošto se zapreminske sile zanemaruju i nema gradijenta pritiska, Stoksova jednačina se svodi na

$$\Delta \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dx_2^2} = 0, \quad (76)$$

odakle sledi

$$v(x_2) = C_1 x_2 + C_2. \quad (77)$$

Integracione konstante u poslednjem izrazu odeduju se iz graničnih uslova – u ovom slučaju to su tzv. uslovi *slepljivanja*. Naime, usled viskoznosti delići fluida se 'lepe' za čvrstu granicu, tako da im je brzina jednaka brzini granice. U ovom slučaju to znači da je $v(0) = 0$, pošto ploča $x_2 = 0$ miruje, odnosno $v(d) = u$, pošto se ploča $x_2 = d$ kreće brzinom u . Zamenom ovih graničnih uslova u dobijeni izraz za profil brzine, dobijamo dve jednostavne algebarske jednačine, čijim rešavanjem nalazimo konstante C_1 i C_2 , tako da je konačno

$$\vec{v} = \frac{u}{d} x_2 \vec{e}_1. \quad (78)$$

Ovde treba napomenuti da se za razliku od viskoznih fluida, idealni fluidi ne lepe za čvrste granice, već je jedini granični uslov za njih tzv. uslov *neprobojnosti*. Naime, delići fluida ne mogu da prođu kroz čvrstu granicu, pa je normalna komponenta brzine u odnosu na granicu jednaka nuli, dok tangencijalna komponenta brzine može imati proizvoljnu vrednost. To znači da se čak i ako se formalno Stoksova jednačina svede na oblik Ojlerove jednačine, što se dešava kada se Stoksov fluid kreće bezvrtložno (pošto je tada $\Delta \vec{v} = -\text{rot} \text{rot} \vec{v}$), iz rešenja Stoksove jednačine ne može dobiti rešenje Ojlerove u limesu $\eta \rightarrow 0$.

Elastično telo

Za opisivanje kretanja unutar čvrstih deformabilnih tela pogodnije je koristiti Lagranžev nego Ojlerov formalizam, zbog male pokretljivosti njihovih delića. U skladu sa tim, umesto tenzora brzine deformacije obično se koristi tzv. **tenzor deformacije** \vec{D} koji se definiše pomoću vektora pomeranja $\vec{u}(X_1, X_2, X_3, t)$. Ako se delić u početnom trenutku $t = 0$ nalazio u tački $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, onda se u proizvoljnom trenutku t on nalazi u tački \vec{x} , pri čemu važi:

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t), \quad \vec{x}(\vec{X}, 0) = \vec{X}, \quad (79)$$

a elementi tenzora deformacije se definišu kao

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (80)$$

Fizički smisao ovog tenzora analogan je smislu tenzora brzine deformacije. Može se pokazati da je njegov dijagonalni element \mathcal{D}_{ii} jednak relativnoj promeni dužine (koja se desi za kratko vreme) infinitezimalnih supstancijalnih duži koje u početnom trenutku leže u pravcu x_i koordinatne ose, a dok je dijagonalni element \mathcal{D}_{ij} ($i \neq j$) jednak polovini promene ugla između infinitezimalnih supstancijalnih duži koje u početnom trenutku imaju pravce koordinatnih osa x_i i x_j .

Najjednostavniji slučaj čvrste deformabilne sredine je tzv. **elastično telo** koje se usled delovanja spoljašnjih sila deformiše, ali se vraća u svoje prvobitno stanje nakon prestanka delovanja spoljašnjih sila. Ako je pri tome

- tenzor napona u nekoj tački i nekom trenutku funkcija samo tenzora deformacije u toj istoj tački i istom trenutku, a tenzor napona jednak nuli ako nema deformacije (idealno elastično telo),
- razmatramo samo linearne fenomene (tj. elementi tenzora napona su linearne funkcije elemenata tenzora deformacije),
- sredina je homogena i izotropna,

može se pokazati da je veza između tenzora napona i tenzora deformacije oblika

$$\tilde{\mathcal{P}} = \lambda \left(\text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} \right) \tilde{\mathcal{E}} + 2\mu \tilde{\mathcal{D}}. \quad (81)$$

U ovom izrazu $\tilde{\mathcal{E}}$ je jedinični tenzor, λ i μ su tzv. Lameeve konstante, a sama jednačina se naziva **generalisanim Hukovim zakonom**.

Uočimo elastično telo u obliku cilindra čija osa leži na x_3 koordinatnoj osi, a visina mu je jednaka l i neka je tenzor napona reprezentovan matricom

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (82)$$

Onda iz (81) slede jednačine

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} + 2\mu \mathcal{D}_{11} \\ 0 &= \lambda \text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} + 2\mu \mathcal{D}_{22} \\ p &= \lambda \text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} + 2\mu \mathcal{D}_{33} \end{aligned} \quad (83)$$

odakle se lako nalazi

$$p = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \mathcal{D}_{33}. \quad (84)$$

Pošto je u ovom slučaju p jednako normalnoj sili F koja u pravcu x_3 deluje po jedinici površine S osnove cilindra, onda se poslednja jednakost može prepisati u obliku

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (85)$$

gde je Δl promena dužine cilindra usled delovanja sile F , a E Jungov moduo. U ovom slučaju smo, dakle, dobili uobičajeni Hukov zakon.

Polazeći od generalisanog Hukovog zakona (81) divergenciju tenzora napona, koja nam je potrebna za formiranje osnovne jednačine dinamike dobijamo na sledeći način. Ako se tenzor napona prepíše u obliku

$$\tilde{\mathcal{P}} = (3\lambda + 2\mu) \frac{1}{3} \left(\text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} \right) \tilde{\mathcal{E}} + 2\mu \left(\tilde{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \left(\text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} \right) \tilde{\mathcal{E}} \right), \quad (86)$$

onda se vidi da postoji analogija sa tenzorom viskoznosti za Navije–Stoksov fluid, s tim što ovde umesto tenzora brzine deformacije figuriše tenzor deformacije. Takođe, uzimajući u obzir da se delići malo udaljavaju od svojih ravnotežnih položaja, možemo uzeti da je $\frac{\partial}{\partial x_i} \approx \frac{\partial}{\partial X_i}$, pa se divergencija tenzora napona može izračunati analogno divergenciji tenzora viskoznosti. Osim toga, u Lagranževim koordinatama je

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},$$

pa se, uzimajući sve to u obzir, pokazuje da osnovna jednačina dinamike u ovom slučaju ima oblik

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho \vec{f} + \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{graddiv} \vec{u}, \quad (87)$$

gde se parcijalni izvodi u ' Δ ' i 'graddiv' računaju po Lagranževim koordinatama.