

Kinematika tačke

1. Tačka se kreće brzinom konstantnog intenziteta v_0 po jednoj od tri koordinatne površi cilindričnih koordinata, pri čemu je odnos projekcija brzine koje se menjaju pri kretanju konstantan. Naći trajektorije i konačne jednačine kretanja u sva tri slučaja.
2. Tačka se kreće po konusu $\theta = \alpha$ tako da seče sve njegove izvodnice pod uglom γ . Naći trajektoriju, konačne jednačine kretanja i vreme za koje će tačka dospeti do vrha konusa, ako je u početnom trenutku bilo $r = r_0$ i $\varphi = 0$. Tačka se kreće ka vrhu konusa brzinom konstantnog intenziteta.
3. Naći jednačinu trajektorije putnika koji se po severnoj polulopti Zemljine kugle kreće uvek prema severoistoku.
4. Tačka se kreće po lemniskati, čija je jednačina u polarnim koordinatama $\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi$, brzinom konstantnog intenziteta v . Naći njenu sektorsku brzinu u funkciji potega ρ .
5. Tačka se kreće po kardioidi, čija je jednačina $\rho = 2R(1 - \cos \varphi)$, sektorskom brzinom konstantnog intenziteta S . Odrediti brzinu i ubrzanje u tački određenoj polarnim uglom φ .
6. Kretanje je definisano jednačinama

$$\dot{x} + 2y = -R \sin t \quad , \quad \dot{y} - 2x = R \cos t \quad ,$$

gde je R data konstanta. Naći konačne jednačine kretanja, ako je $x = y = 0$ za $t = 0$. Pokazati da se jednačina putanje može napisati u obliku $\rho' = R|2 \cos \varphi' - 1|$ u polarnim koordinatama u sistemu $x' = x + R$, $y' = y$.

7. Tačka se kreće po krugu poluprečnika R , tako da je uvek intenzitet tangencijalnog ubrzanja jednak intenzitetu normalnog ubrzanja. Naći zakon promene brzine sa vremenom, ako je u početnom trenutku intenzitet brzine imao vrednost v_0 .

Dinamika tačke – slobodno kretanje

1. Materijalna tačka mase m bačena je sa visine H . Naći trajektoriju tačke ako je njena početna brzina $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_x$, a sila otpora sredine ima oblik $\vec{F} = -k\vec{v}$, gde je k pozitivna konstanta. Smatrati da se promena gravitacionog ubrzanja sa visinom može zanemariti. Iz dobijene jednačine naći jednačinu trajektorije u slučaju kada nema otpora sredine, tj. kada $k \rightarrow 0$.

2. Na visini H iznad Zemljine površine tački mase m saopštava se početna brzina v_0 , usmerena vertikalno naniže. Naći brzinu tačke na visini h , ako na nju deluje sila otpora sredine intenziteta $F^* = \beta v^2$, a gravitaciono ubrzanje se menja po zakonu $g(z) = gR^2/(R+z)^2$, gde je R -radijus Zemlje, z -rastojanje od površine Zemlje, g -gravitaciono ubrzanje na površini Zemlje, a β -pozitivna konstanta.) Rešenje izraziti preko integrala

$$I = \int_h^H \frac{R}{(z+R)^2} e^{-2\beta z/m} dz \quad .$$

3. Na materijalnu tačku mase m koja se nalazi u homogenom polju Zemljine teže deluje i sila oblika

$$\vec{F} = \vec{v} \times \vec{A} \quad ,$$

gde je \vec{v} brzina čestice, a \vec{A} je konstantan vektor, normalan na silu Zemljine teže $\vec{A} = \omega m \vec{e}_x$. Naći konačne jednačine kretanja, ako je u početnom trenutku $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

4. U uslovima prethodnog zadatka, čestici koja se nalazi na površini Zemlje saopštava se brzina $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$. Naći maksimalnu visinu do koje će se čestica popeti.

5. Za kos hitac, početne brzine v_0 i elevacionog ugla α , u homogenom polju Zemljine teže, uz prisustvo sile trenja proporcionalne trenutnoj brzini kretanja (sa koeficijentom proporcionalnosti $-kmg$, gde je m masa čestice)

- a) naći maksimalnu visinu penjanja i vreme za koje se ona dostiže;
- b) pokazati da domet D zadovoljava jednačinu

$$\frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{kv_0 \cos \alpha} D + \frac{1}{k^2 g} \ln \left(1 - \frac{kgD}{v_0 \cos \alpha} \right) = 0 \quad .$$

6. Materijalna tačka mase m kreće se u sredini čiji je otpor proporcionalan kvadratu brzine. Naći brzinu i pređeni put u funkciji vremena. Kolika je brzina tela u trenutku kada je ono prešlo put s ? Početna brzina je v_0 ; ne deluju nikakve druge sile.

7. Ispitati kretanje tačke mase m , koja slobodno pada (bez početne brzine) u sredini čiji je otpor proporcionalan težini tela i kvadratu brzine. Naći graničnu vrednost brzine tela pri ovim uslovima.

8. Teška tačka mase m bačena je vertikalno uvis početnom brzinom v_0 . Na nju deluje, pored konstantne sile teže, još i otpor vazduha proporcionalan njenoj težini i kvadratu brzine. Posle kog vremena će ona dostići svoj najviši položaj?

9. Odrediti vreme posle koga će teška tačka mase m , bačena vertikalno uvis početnom brzinom v_0 , ponovo da padne, kao i njenu brzinu u tom trenutku, ako se kretanje vrši pod uticajem Zemljine teže u sredini čiji je otpor proporcionalan težini tela i kvadratu brzine.
10. Zanimajući otpor atmosfere i uticaj rotacije Zemlje i Meseca, odrediti brzinu kojom treba baciti telo sa Zemlje u pravcu Meseca, da bi se ono zaustavilo u ravnoteži između Zemlje i Meseca. Poznato je da je masa Zemlje 81 put veća od mase Meseca, a rastojanje Zemlja–Mesec iznosi 60 Zemljnih radijusa.
11. Na tačku mase m deluju privlačne sile iz n nepokretnih centara. Sve sile su proporcionalne rastojanju od odgovarajućeg centra, ali su koeficijenti proporcionalnosti različiti i iznose mk_i za silu iz i -tog centra. Svi centri i tačka koju posmatramo su u istoj ravni (Oxy). Zanimajući uticaj Zemljine teže, naći trajektoriju tačke, ako je u početnom trenutku ona bila u (x_0, y_0) i imala početnu brzinu intenziteta v_0 u pravcu y -ose.
12. Na tačku mase m deluju dve privlačne sile, proporcionalne rastojanjima od korespondentnih centara sile; konstanta proporcionalnosti je ista u oba slučaja i iznosi km . Prvi centar je nepokretan i nalazi se u koordinatnom početku, dok se drugi kreće po x -osi, tako da je $x_2 = 2(a + bt)$. Naći trajektoriju posmatrane materijalne tačke, ako je ona u početnom trenutku bila u xOy ravni u tački (a, a) i imala komponente brzine $\dot{x} = \dot{z} = b$, $\dot{y} = 0$.

Lagranževe jednačine

1. Kuglica mase m nalazi se unutar cevi zanemarljive mase koja u horizontalnoj ravni rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose. Kuglica je zakačena za nepokretnu tačku na osi rotacije oprugom konstante elastičnosti k i nominalne dužine l_0 . Napisati Lagranževu jednačinu kretanja i rešiti je.

2. Čestica se kreće po cikloidi

$$x = a(\varphi + \sin \varphi) \quad , \quad y = a(1 - \cos \varphi)$$

u homogenom polju Zemljine teže. Sastaviti Lagranževe jednačine uzimajući za generalisanu koordinatu dužinu luka. Pokazati da važe osobine:

- izohronosti, tj. da period oscilacija ne zavisi od amplitude;
- tautohronosti, koja se sastoji u tome da čestice iz bilo kojeg početnog položaja za isto vreme stiže u najnižu tačku, ako je početna brzina bila jednaka nuli.

3. Materijalna tačka mase m kreće se po površini glatke sfere poluprečnika R , pri čemu na nju osim homogene sile gravitacije deluje i sila otpora sredine, proporcionalna brzini čestice sa koeficijentom proporcionalnosti γm . Sastaviti Lagranževe jednačine.

4. Teška tačka mase m vezana je za tanku glatku šipku zanemarljive mase i dužine a , tako da može da klizi duž nje bez trenja. Šipka je jednim svojim krajem učvršćena za vertikalnu osovinu, tako da sa njom obrazuje konstantan ugao α i rotira oko nje ugaonom brzinom $\omega(t)$. Odrediti funkciju $\omega(t)$ ako je poznato da se tačka kreće duž šipke po zakonu $r = k(t + \beta)^2$, gde su k i β konstante. Koliki ugao rotacije opiše šipka od početka kretanja do trenutka kada teška tačka sleti sa nje? Trenje u ležištu osovine zanemariti.

5. Teška tačka mase m kreće se po površini glatkog kružnog konusa sa vertikalnom osom i vrhom okrenutim nagore. Ugao između ose konusa i izvodnice je α . Tačka je zakačena za elastičnu oprugu čiji je drugi kraj učvršćen u vrhu konusa. Konstanta elastičnosti opruge je k , a dužina u neistegnutom stanju l . Na tačku deluje i sila otpora sredine proporcionalna brzini čestice sa koeficijentom proporcionalnosti γm . U početnom trenutku opruga je bila neistegnuta, a tački je saopštena početna brzina v_0 u horizontalnom pravcu. Sastaviti diferencijalnu jednačinu koja opisuje zavisnost dužine opruge od vremena pri kretanju posmatrane tačke.

6. Pokazati da je oblik Lagranževih jednačina za slobodne sisteme i sisteme sa holonomnim i zadržavajućim vezama invarijantan u odnosu na punktualne transformacije. Punktualne transformacije su transformacije generalisanih koordinata oblika

$$\tilde{q}_i = f_i(q_k, t); i, k = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

koje prevode tačke (q_1, \dots, q_n) iz prvobitnog konfiguracionog prostora u odgovarajuće tačke $(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)$ u novom konfiguracionom prostoru, pri čemu je Jakobijan

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \neq 0 \quad .$$

7. Pokazati neposrednim proverom da se kod idealnih i holonomnih sistema čestica diferencijalne jednačine kretanja u nezavisnim generalisanim koordinatama mogu napisati i u obliku

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\sigma} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma \quad , \quad \sigma = 1, \dots, n \quad ,$$

gde je T kinetička energija sistema, q_σ nezavisne generalisane koordinate, a Q_σ generalisane sile.

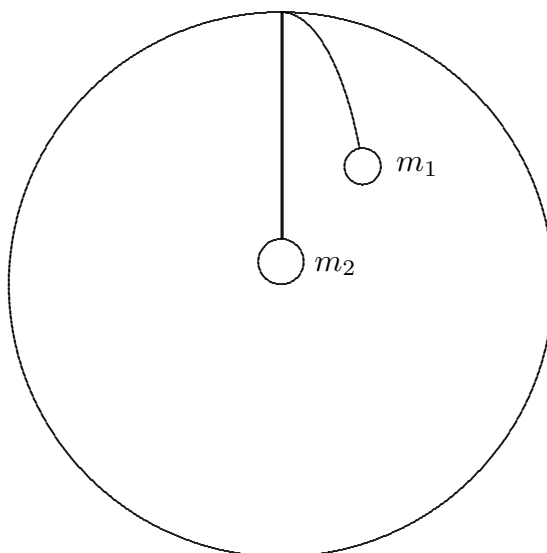
8. Ispitati kretanje tačke mase m , koja klizi po glatkoj žici poluprečnika a , koja se obrće u horizontalnoj ravni konstantnom ugaonom brzinom ω oko jedne svoje tačke.

9. Čestica mase m može da se kreće po glatkoj kružnoj žici poluprečnika a , koja leži u horizontalnoj ravni. Na česticu deluje privlačna sila upravljena ka jednoj nepokretnoj tački na rastojanju s od centra kruga ($s > a$), proporcionalna rastojanju od te tačke (konstanta proporcionalnosti k). Pokazati da kretanje ima isti karakter kao i kretanje matematičkog klatna.

10. Glatka žica je savijena u obliku zavojnice, čije jednačine u cilindričnim koordinatama imaju oblik $\rho = b$, $z = a\varphi$. U koordinatnom početku se nalazi centar privlačne sile proporcionalne rastojanju od njega (konstanta proporcionalnosti km). Naći diferencijalnu jednačinu kretanja tačke mase m , vezane za ovu žicu. Ako je u početnom trenutku $z = h$, a brzina jednaka nuli, naći i konačne jednačine kretanja.

11. Teška tačka mase m_1 kreće se po glatkoj sferi radijusa R , a teška tačka mase m_2 po vertikali. Tačke su povezane nerastegljivim koncem dužine l zanemarljive mase, koji je provučen kroz mali otvor na najvišoj tački sfere, kao što je pokazano na slici. Sastaviti Lagranževe jednačine.

12. Pretpostaviti da u prethodnom zadatku masa konca nije zanemarljiva i da iznosi M , pri čemu je masa homogeno raspodeljena po dužini konca. Sastaviti Lagranževu funkciju i jednačine.



Male oscilacije

1. Čestica mase m i naelektrisanja q kreće se po kružnici radijusa R , koja leži u vertikalnoj ravni u homogenom polju Zemljine teže. U najnižoj tački kružnice učvršćeno je naelektrisanje q . Naći položaje ravnoteže i frekvencu malih oscilacija čestice.
2. Naći frekvencu malih oscilacija sfernog klatna (čestica mase m obešena o konac dužine l), pri kojim ugao odklona konca od vertikale θ osciluje u blizini vrednosti θ_0 .
3. O donji kraj opruge čija je konstanta elastičnosti k_1 i dužina u nedeformisanom stanju a_1 , a gornji kraj učvršćen, obešena je mala kuglica mase m_1 . Za ovu kuglicu je učvršćena opruga konstante elastičnosti k_2 i dužine u nedeformisanom stanju a_2 za čiji je donji kraj obešena kuglica mase m_2 . Ceo ovaj sistem može da osciluje duž vertikale u homogenom polju Zemljine teže. Naći normalne frekvence sistema. Specijalno za slučaj $m_1 = m_2$ i $k_1 = k_2$ odrediti i normalne koordinate sistema.
4. Linearni model troatomske molekula može biti predstavljen kao sistem tri tačkaste mase m_1 , m_2 i m_3 koje mogu da se kreću duž glatke horizontalne osovine, a povezane su oprugama čije su konstante elastičnosti k_1 i k_2 . Rešiti problem malih oscilacija takvog sistema u slučaju $k_1 = k_2 = k$, $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = nm$.
5. Na telo mase M koje može da se kreće po glatkoj horizontalnoj pravoj, obešeno je dvostruko matematičko klatno, pri čemu je $m_1 = m_2 = M/2$, $l_1 = l_2 = l$. Rešiti problem malih oscilacija.
6. Čestica mase m pod delovanjem konzervativne sile osciluje duž x -ose između x_1 i x_2 .
 - a) Pokazati da je period oscilovanja τ jednak $\tau = 2 \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{m}{2(U(x_2) - U(x))} \right)^{1/2} dx$ gde je $U(x)$ potencijalna energija.
 - b) Specijalno, ako je $U(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 - bx^4)$, pokazati da je period oscilacija amplitude a jednak $\tau = \frac{2}{\omega} \int_{-a}^a \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{1/2} [1 - b(a^2 + x^2)]^{1/2}}$. Ako je b mali parametar, pokazati da je za male amplitude a period jednak $\tau = (2\pi/\omega_0)(1 + 3ba^2/4)$.
 - c) Na osnovu dela pod b) proceniti relativnu gešku koja se čini ako se period oscilacija matematičkog klatna amplitude 30° računa po formuli za male oscilacije.

Centralno kretanje

1. Materijalna tačka mase m nalazi se u polju odbojne centralne sile čiji je intenzitet obrnuto proporcionalan trećem stepenu rastojanja od jednog nepokretnog centra sile, sa koeficijentom proporcionalnosti k^2m . U početnom trenutku se posmatrana tačka nalazila na rastojanju a od centra sile i imala početnu brzinu v_0 normalnu na početni radijus vektor. Naći konačne jednačine kretanja ove tačke i na osnovu njih odrediti
 - a) posle koliko vremena t_n od početka kretanja će intenzitet ubrzanja posmatrane tačke pasti na n -ti deo ($n > 1$) svoje početne vrednosti,
 - b) gde će se u tom trenutku nalaziti posmatrana tačka.
2. Za privlačnu centralnu silu $-\frac{km}{r^2}\vec{e}_r$ skicirati funkciju efektivnog potencijala i na osnovu energetske dijagrama diskutovati dozvoljene oblasti kretanja.

3. Materijalna tačka mase m kreće se pod dejstvom centralne sile koja zavisi samo od rastojanja, tako da je brzina tačke uvek obrnuto proporcionalna rastojanju tačke od pola sile, $v = k/r$ (k - konstanta). Odrediti putanju tačke i funkciju sile.
4. Kružna orbita moguća je za svaku privlačnu centralnu silu, ali sve centralne sile ne daju i stabilnu kružnu orbitu. Ispitati stabilnost kretanja materijalne tačke mase m i linijske brzine v_0 po krugu radijusa a u polju privlačnih centralnih sila.
5. Satelit se kreće oko Zemlje po kružnoj putanji radijusa $2R$ (R je radijus Zemlje). U nekoj tački putanje dolazi do promene vektora brzine, tako da on sada zaklapa ugao α sa pravcem tangentskim na trajektoriju. Pri tom intenzitet brzine ostaje nepromenjen. Odrediti ugao α za koji se promeni pravac vektora brzine u datoj tački trajektorije, ako u daljem kretanju satelit prilazi Zemlji na najmanje rastojanje $R/2$ od njene površine.
6. Materijalna tačka mase m kreće se u polju privlačne centralne sile obrnuto proporcionalne petom stepenu rastojanja od nepokretnog centra (sa koeficijentom proporcionalnosti k^2m). Početna brzina iznosi $v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{k}{a^2}$, a početno rastojanje od centra sile iznosi a . Ispitati u kojim granicama se može kretati ugao α između početnog radijus vektora i vektora početne brzine, pa da posmatrano kretanje bude finitno.
7. Izračunati diferencijalni efikasni presek elastičnog rasejanja α čestice u polju Kulonovog potencijala jezgra.
8. Odrediti efikasni presek za elastično rasejanje čvrste kugle radijusa r_1 na nepokretnoj čvrstoj kugli radijusa r_2 .
9. Materijalna tačka bačena je sa Severnog pola, tako da je u početnom trenutku njena brzina zaklapala ugao α sa horizontalom. Koliki treba da bude intenzitet početne brzine v_0 da bi tačka pala na ekvator? Zemlju smatrati homogenom loptom mase M i radijusa R . Pri kom uglu α energija materijalne tačke ima najmanju moguću vrednost?
10. Pri kakvim vrednostima momenta impulsa M je moguće finitno kretanje čestice u centralnom polju

$$U(r) = -Ve^{-\kappa^2 r^2},$$

gde su V i κ konstante?

11. Kometa mase m kreće se u gravitacionom polju zvezde S mase M ($M \gg m$), tako da joj je u beskonačnosti brzina jednaka v_∞ , a najkraće rastojanje između pravca brzine u beskonačnosti i zvezde jednako je d . Naći jednačinu trajektorije komete i izračunati ugao ϑ između pravca brzine u beskonačnosti pre nego što kometa naiđe na zvezdu i pošto se ponovo udalji u beskonačnost.
12. Izračunati parametar p i ekscentricitet ε orbite veštačkog satelita, ako je poznato da je pri njegovom postavljanju na kružnu orbitu na visini h iznad površine Zemlje
 - a) rastojanje satelita od Zemlje odstupilo od proračunatog za Δr ;
 - b) intenzitet brzine satelita odstupio od proračunatog za Δv ;
 - c) pravac brzine satelita odstupio od proračunatog za δ .

Kruto telo

1. Homogena kocka ivice a i mase m smeštena je u koordinatni sistem $Oxyz$ tako da joj se jedno teme poklapa sa koordinatnim početkom O , a tri ivice sa pozitivnim koordinatnim osama. Naći glavne momente i glavne pravce inercije.
2. Kruto telo ima oblik polusfere poluprečnika R i načinjeno je od homogenog materijala gustine ρ . Ono može da rotira oko jedne osovine, koja prolazi kroz centar osnove i zaklapa ugao γ sa pravom koja spaja centar osnove i centar mase tela. Telu je saopštena početna kinetička energija T_0 , ali usled trenja u držačima osovine ono se postepeno zaustavlja. Uzimajući da je ovo trenje takve prirode da na posmatrano telo deluje konstantan zakočni moment L , izračunati vreme za koje će se ono zaustaviti. Uticaj Zemljine teže zanemariti.
3. Merdevine dužine $2a$ naslonjene su jednim krajem na pod a drugim na vertikalni zid, tako da je ugao između njih i poda jednak α . Ove merdevine počinju da klize bez početne brzine, pri čemu donji kraj klizi po podu, a gornji po zidu. U toku kretanja merdevine ostaju u vertikalnoj ravni, a trenje sa zidom i podom se može zanemariti. Pokazati da se vreme padanja može izraziti integralom

$$\tau = \sqrt{\frac{2a}{3g}} \int_0^\alpha \frac{d\xi}{\sqrt{\sin \alpha - \sin \xi}} .$$

Merdevine pritom smatrati homogenom šipkom.

4. a) Naći kinetičku energiju homogenog troosnog elipsoida, koji rotira oko jedne od svojih osa (pravac AB), pri čemu i ta osa rotira oko pravca CD , normalnog na nju, koji prolazi kroz centar elipsoida.
b) Isto kao pod a), ali u slučaju kada pravac CD sa osom AB zaklapa ugao α , a elipsoid je simetričan u odnosu na AB .
5. Naći frekvencu malih oscilacija homogene polulopte, koja se nalazi na hrapavoj horizontalnoj površini u homogenom gravitacionom polju.
6. Ispitati pomoću Lagranževih jednačina kretanje teške simetrične čigre sa nepokretnom donjom tačkom O . (Čigra je simetrična u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku O i centar mase.)
7. U prethodnom zadatku naći uslov pod kojim će rotacija čigre oko vertikalne ose biti stabilna.
8. Ispitati kretanje čigre iz zadatka 6. u slučaju kada je kinetička energija njene sopstvene rotacije mnogo veća od njene gravitacione potencijalne energije (tzv. "brza" čigra).
9. Primenom Ojlerovih jednačina pokazati da će slobodno obrtanje čvrstog tela oko jedne glavne ose inercije biti stabilno samo ako se vrši oko ose najvećeg ili najmanjeg momenta inercije, a inače nestabilno. Naći period oscilovanja u slučaju stabilnog kretanja.
10. Homogeni štap može da se kreće u vertikalnoj ravni Oxy , koja rotira ugaonom brzinom $\omega = \omega(t)$ oko vertikalne ose Oy duž koje deluje homogeno gravitaciono polje. Sastaviti Lagranževe jednačine.

11. Izračunati ugaonu brzinu precesije Zemljine ose, smatrajući da se spoljašnji momenti sila koje deluju na Zemlju mogu zanemariti, a da je Zemlja homogeni rotacioni elipsoid, čija je polarna poluosa c manja od ekvatorijalne poluose a , pri čemu je $(a - c)/a \approx 1/300$.
12. Dva jednaka kružna diska istog poluprečnika a i iste mase M leže u vertikalnoj ravni i dodiruju se. Njihove ivice su idealno hrapave; cilindri se nalaze jedan iznad drugog i mogu da rotiraju bez trenja oko horizontalnih osa koje prolaze kroz njihove centre. Ovi poslednji su spojeni homogenom šipkom mase m i centar gornjeg diska je fiksiran. Ispitati kretanje donjeg diska i štapa koji ih spaja ako se gornji disk obrće konstantnim ugaonim ubrzanjem α .
13. Po unutrašnjoj površini šupljeg cilindra radijusa R i mase M , koji može da rotira oko jedne svoje horizontalne izvodnice, kotrlja se bez klizanja puni homogeni cilindar radijusa $r = R/4$ i iste mase M . Rešiti problem malih oscilacija oko stabilnog položaja ravnoteže.
14. Sastaviti Hamiltonove jednačine za sistem koji se sastoji od matematičkog klatna mase m i dužine l , obešenog o centar diska radijusa r i mase m_1 . Disk može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj pravoj Ox ; centar diska povezan je sa nepokretnim zidom oprugom elastičnosti k .

Generalisana energija, Hamiltonova funkcija, Hamiltonove jednačine i Hamiltonov princip

1. Čestica koja se kreće u homogenom polju Zemljine teže po glatkom krugu koji se nalazi u vertikalnoj ravni i rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko svog vertikalnog prečnika naziva se *Tejlorovo klatno*. Formirati Lagranževu funkciju, Lagranževu jednačinu, generalisanu energiju i Hamiltonovu funkciju. Ispitati da li je generalisana energija jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji i da li je integral kretanja.
2. Sastaviti Hamiltonove jednačine za dvojno matematičko klatno.
3. Električno i magnetno polje izražavaju se preko skalarnog $\varphi(\vec{r}, t)$ i vektorskog potencijala $\vec{A}(\vec{r}, t)$ kao

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad .$$

Pokazati da je funkcija

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

lagranžijan slobodne čestice mase m i naelektrisanja q , koja se kreće u elektromagnetnom polju određenom potencijalima φ i \vec{A} . Čemu su jednaki generalisani impulsi i kako izgleda Hamiltonova funkcija?

4. Rešiti problem *brahistohrone* za česticu koja se kreće u vertikalnoj ravni u homogenom polju Zemljine teže, tj. naći liniju po kojoj treba da se kreće čestica da bi iz tačke A stigla u drugu tačku B , u istoj vertikalnoj ravni, za najkraće vreme, polazeći bez početne brzine. Pretpostaviti da tačke A i B ne leže na istoj vertikali, a trenje se zanemaruje.
5. Čestica se u polju potencijala $U(x) = -Fx$ za vreme τ premesti iz tačke $x = 0$ u tačku $x = a$. Naći zakon kretanja čestice, pretpostavljajući da on ima oblik $x(t) = At^2 + Bt + C$ i birajući parametre A , B i C tako da dejstvo ima minimalnu vrednost.
6. Linearni harmonijski oscilator, mase m i frekvence ω , u početnom trenutku nalazio se na rastojanju $x(0) = a$ od koordinatnog početka i imao je početnu brzinu $\dot{x}(0) = 0$. Naći konačnu jednačinu kretanja, rešavanjem Lagranževе jednačine. Nacrtati trajektoriju reprezentacione tačke sistema u faznom i proširenom konfiguracionom prostoru. Izračunati dejstvo duž pravog puta za vreme $t = 0$ do $t = \pi/2\omega$ i dejstvo duž okolnog puta za isto vreme, ako se duž okolnog puta tačka kreće konstantnom brzinom, i uporediti ta dva dejstva.
7. Čestica mase m sa jednim stepenom slobode kreće se u polju potencijala $U(x)$. Pokazati da je dejstvo na okolnim putevima uvek (za proizvoljni vremenski interval) veće od dejstva na pravom putu ako je $\frac{d^2U}{dx^2} \leq 0$. (Uputstvo: konačnu jednačinu kretanja, koja odgovara okolnim putevima predstaviti u obliku $\bar{x}(t) = x(t) + \alpha(t)$, gde $x(t)$ odgovara stvarnom putu, a $U(x + \alpha)$ razviti u red oko x do kvadratnih članova.)
8. Materijalna tačka mase m kreće se po glatkoj sferi, čiji se poluprečnik menja po zakonu $R = R(t)$. Formirati Hamiltonovu funkciju i jednačine i ispitati da li je Hamiltonova funkcija jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji.

9. Sastaviti Hamiltonove jednačine za česticu mase m , koja se kreće u homogenom polju Zemljine teže po glatkoj cikloidi smeštenoj u vertikalnoj ravni, okrenutoj zasvođenim delom nadole, a koja rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose. Ispitati da li je H jednako ukupnoj mehaničkoj energiji.

10. Za sistem opisan u zadatku 10. u delu **Lagranževe jednačine** sastaviti i rešiti Hamiltonove jednačine.

11. Igračka se sastoji od dve jednake loptice masa m , koje su povezane oprugom koeficijenta elastičnosti k . Gornja loptica se preko iste takve opruge zakači za ruku, tako da se igračka pokreće vetikalnim pomeranjem ruke po zakonu $z = z_0 \sin \omega t$ ($z_0 = const$, $\omega = const$), pri čemu se i loptice i opruge kreću po istoj vertikali. Nominalne dužine opruga iznose l .

a) Sastaviti Lagranževe jednačine druge vrste.

b) Formirati generalisanu energiju. Da li je ona jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji? Da li je generalisana energija integral kretanja? Da li je ukupna mehanička energija integral kretanja? Obrazložiti odgovor.

c) Naći konačne jednačine kretanja loptica, pretpostavljajući da je $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$.

12. Kuglica mase m kreće se po cikloidi:

$$x = R(\phi + \sin \phi) \quad , \quad y = R(1 - \cos \phi)$$

u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ u sredini u kojoj deluje sila otpora $\vec{F}^* = -km\vec{v}$. Formirati Hamiltonovu funkciju i jednačine i naći konačne jednačine kretanja u slučaju kada je $g/R > k^2$. (Uputstvo: za generalisanu koordinatu uzeti dužinu luka.)

13. Materijalna tačka mase m može da klizi bez trenja po lančanici $z = a \operatorname{ch}(x/a)$, pri čemu ravan xOz rotira oko z -ose konstantnom ugaonom brzinom ω . Jedina aktivna sila koja deluje na tačku je $\vec{F} = kmz\vec{e}_z$. Formirati Hamiltonovu funkciju i jednačine. Ispitati da li je Hamiltonova funkcija jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji.

14. Jedan kraj horizontalne opruge je učvršćen, a za drugi je zakačena materijalna tačka mase m_1 . Za tačku m_1 zakačeno je matematičko klatno mase m_2 i dužine l . Ceo sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju, a kretanje se vrši u vertikalnoj ravni, pri čemu opruga stalno ostaje horizontalna. Koeficijent elastičnosti opruge je k , a njena dužina u neistegnutom stanju iznosi l_0 . Sastaviti Lagranževe i Hamiltonove jednačine za ovaj sistem.

15. Sastaviti Lagrange-ve i Hamiltonove jednačine kretanja deteta koje sedi na sedištu vrteške, koja se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω . Dužina lanca kojim je sedište vezano za konstrukciju vrteške je a , a dužina grede vrteške, koja nosi sedište, je R . Ceo sistem posmatrati kao sferno klatno, čija tačka oslonca kruži konstantnom ugaonom brzinom u horizontalnoj ravni.

Mehanika kontinuuma

1. Dato je pomeranje

$$u_1 = kX_2^2 \quad , \quad u_2 = u_3 = 0 \quad .$$

a) Skicirati promenu oblika jediničnog kvadrata $OABC$ sa vremenom ($O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (0, 1, 0)$).

b) Naći deformisani vektor "supstancijalnog elementa" $d\vec{X}_1 = dX_1\vec{e}_1$ i $d\vec{X}_2 = dX_2\vec{e}_2$, koji se nalazio u tački C .

2. Dato je polje brzina

$$v_1 = kx_2 \quad , \quad v_2 = v_3 = 0 \quad ,$$

gde je $k = const$ i $k > 0$.

a) Odrediti tenzor brzine deformacije.

b) Odrediti brzinu relativnog izduženja delića fluida $d\vec{x} = ds\vec{e}_1$ i $d\vec{x} = ds(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)$.

c) Izračunati brzinu promene ugla između delića u pravcu x_1 -ose i delića u pravcu x_2 -ose.

3. Dato je polje brzine

$$v_x = K_1 \exp(-k_3t)x \quad , \quad v_y = K_2y \quad , \quad v_z = 0 \quad .$$

Naći

a) jednačinu strujne linije koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0) ;

b) jednačinu trajektorije čestice koja se u trenutku $t = 0$ nalazila u tački sa koordinatama (x_0, y_0) .

4. Dato je nestacionarno polje brzine

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t} \quad , \quad v_2 = \frac{x_2}{1+t} \quad , \quad v_3 = \frac{x_3}{1+t} \quad .$$

a) Naći trajektoriju čestice fluida koja se u trenutku $t = 0$ nalazila u tački sa koordinatama (x_1^0, x_2^0, x_3^0) .

b) Naći jednačinu strujne linije kroz tačku (x_1^0, x_2^0, x_3^0) .

c) Naći polje ubrzanja.

5. Temperatura u dugačkom tunelu je oblika

$$T = T_0 - a \exp(-x/L) \sin(2\pi t/\tau) \quad ,$$

gde su T_0, a, L i τ konstante, pri čemu se koordinata x meri od ulaza u tunel. Čestica se kreće u pravcu x -ose kroz tunel konstantnom brzinom u . Naći brzinu promene temperature koju "oseća" čestica (tj. koja se zapaža u sistemu reference vezanom za česticu). Postupak ilustrovati grafički.

6. Data su polja brzine \vec{v} i temperature T :

$$\vec{v} = \frac{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad , \quad T = k(x_1^2 + x_2^2) \quad .$$

a) Odrediti brzinu u nekoliko tačaka i generalno opisati polje brzine. Kako izgledaju izoterme?

b) Naći ubrzanje i supstancijalni izvod temperature u tački $A(1, 1)$.

7. Matrica koja u koordinatnom sistemu $Oxyz$ reprezentuje tenzor napona u nekoj tački ima oblik

$$\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} MPa \quad .$$

a) Naći vektor napona i intenzitet normalnog napona na ravan koja prolazi kroz tu tačku i paralelna je ravni $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

b) Naći komponentu φ'_{12} tenzora napona u istoj tački u koordinatnom sistemu u kome x -osa ima pravac orta $\vec{e}'_1 = \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, a y -osa ima pravac orta $\vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$.

8. Tenzor napona reprezentovan je matricom

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Naći vektor napona koji deluje na ravan koja prolazi kroz tačku $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$, a tangenta je na cilindričnu površinu $x_1^2 + x_2^2 = 1$ u toj tački.

9. Tenzor napona reprezentovan je matricom

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Naći vektore napona koji deluju na površine $x_2^2 + x_3^2 = 4$, $x_1 = 0$ i $x_1 = l$.

b) Naći ukupnu silu i moment sile koji deluju na $x_1 = l$.

10. Tenzor napona neprekidne sredine dat je matricom, koja u koordinatnom sistemu $Oxyz$ (z -osa kolinearna sa \vec{g}) ima oblik

$$\begin{pmatrix} -p + \rho g z & 0 & 0 \\ 0 & -p + \rho g z & 0 \\ 0 & 0 & -p + \rho g z \end{pmatrix} \quad ,$$

gde su ρ , p i g konstante. Odrediti vektore napona koji deluju na graničnu površinu uočene zapremine kontinuuma oblika kvadra, čije se jedno teme nalazi u koordinatnom početku, a tri ivice dužina a , b i c poklapaju sa koordinatnim osama x , y i z , respektivno. Naći rezultantnu silu na strane $z = 0$ i $y = 0$ kvadra.

11. Ispitati da li matrica čiji su elementi

$$\begin{aligned} N_{11} &= x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2) \quad , & N_{12} &= -2\nu x_1 x_2 \quad , \\ N_{22} &= x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2) \quad , & N_{23} &= N_{13} = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$N_{33} = \nu(x_1^2 + x_2^2)$$

može da reprezentuje tenzor napona u sredini čiji se delići nalaze u ravnoteži, a zapreminskih sila nema.

12. Pri bilo kakvom kretanju fluida masa jednog delića ostaje konstantna. Polazeći od toga da je masa jednaka proizvodu gustine i zapremine

a) pokazati da pri infinitezimalno maloj deformaciji važi

$$\rho(1 + \text{Tr}\hat{D}) = \rho_0,$$

gde je ρ_0 početna gustina;

b) koristeći činjenicu da je $\text{Tr}\hat{D}$ mala veličina pokazati da je:

$$\rho = \rho_0(1 - \text{Tr}\hat{D}).$$

Ovde je \hat{D} tenzor deformacije.

13. Ako je polje brzine zadato sa:

$$\vec{v} = x_1 t \vec{e}_1 + x_2 t \vec{e}_2,$$

odrediti kako se gustina menja sa vremenom, pod uslovom da u Ojlerovim promenljivim ona zavisi samo od vremena.

14. Sud cilindričnog oblika poluprečnika osnove R sadrži idealan fluid gustine $\rho = \text{const}$ i rotira oko vertikalne ose u homogenom polju Zemljine teže, konstantnom ugaonom brzinom ω . Naći raspodelu pritiska u tečnosti, kao i jednačinu slobodne površine tečnosti. Odrediti za koliko se najviše podigne nivo tečnosti u sudu koji rotira u odnosu na nivo u sudu koji miruje.

15. U linearnom viskoznom fluidu polje brzine zadato je sa:

$$v_1 = -x_1 - x_2, \quad v_2 = x_2 - x_1, \quad v_3 = 0.$$

Za ravan čiji je ort normale \vec{e}_1 naći:

- a) razliku između normalne komponente napona i pritiska koji bi delovao u slučaju idealnog fluida,
- b) intenzitet tangencijalne komponente napona.

16. Kretanje fluida koje je takvo da brzine svih delića imaju isti pravac naziva se paralelni tok. Pokazati da je u slučaju paralelnog toka u linearnom viskoznom fluidu normalna komponenta napona koji deluje na ravni paralelne ili normalne na tok jednaka pritisku p .

17. Linearni viskozni nestišljivi fluid stacionarno protiče između dve beskonačne paralelne ploče, od kojih jedna miruje, a druga se kreće konstantnom brzinom v_0 u svojoj ravni. Naći profil brzine unutar fluida, ako je poznato da je rastojanje između ploča d , da je gradijent pritiska jednak nuli i da su zapreminske sile jednake nuli.

18. Linearni viskozni nestišljivi fluid stacionarno protiče između dve beskonačne paralelne ploče, koje miruju. Pokazati da je gradijent pritiska unutar fluida konstantan i naći profil brzine, ako je taj gradijent poznat, rastojanje između ploča je $2b$, koeficijent viskoznosti je μ , a zapreminske sile se mogu zanemariti.

19. Linearni viskozni nestišljivi fluid, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti μ u homogenom polju gravitacije stacionarno protiče kroz cilindričnu cev prečnika d , čija osa sa horizontalom zaklapa ugao θ . Smatrajući da se radi o paralelnom toku, kao i da brzina fluida zavisi samo od rastojanja od ose cilindra

- a) pokazati da je projekcija gradijenta pritiska na pravac ose cilindra konstanta i
- b) naći profil brzine u cevi, ako je ta projekcija poznata.

20. Dva sloja različitih linearnih viskoznih nestišljivih fluida protiču između dve beskonačne paralelne ploče, od kojih jedna miruje, a druga se kreće konstantnom brzinom v_0 u svojoj ravni. Pretpostavljajući da se slojevi tečnosti ne mešaju, da je granična ravan između njih paralelna pločama, da nema gradijenta pritiska, kao i da se zapreminske sile mogu zanemariti, naći profil brzine između ploča. Pretpostaviti da su gustine i koeficijenti viskoznosti fluida poznati, a da su debljine slojeva b_1 i b_2 .

21. Linearni viskozni nestišljivi fluid stacionarno protiče između dva beskonačna koaksijalna cilindra, poluprečnika r_1 i r_2 respektivno, usled njihove rotacije oko zajedničke ose ugaonim brzinama ω_1 i ω_2 respektivno. Zanemarujući zapreminske sile, naći profil brzine fluida, ako je poznata gustina fluida i koeficijent viskoznosti.

22. Linearni nestišljivi viskozni fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti μ nalazi se u poluprostoru $y > 0$. Granična ravan $y = 0$ kreće se brzinom $v_0(t) = a \cos \omega t$ u pravcu x -ose, gde su a i ω konstante. Naći polje brzine u fluidu zanemarujući zapreminske sile i gradijent pritiska.

23. Naći silu trenja koja deluje na svaku od dve paralelne beskonačne ploče, između kojih se nalazi sloj linearne nestišljive viskozne tečnosti, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti μ , ako se jedna ploča kreće brzinom $v_0(t) = a \cos \omega t$ u svojoj ravni. Rastojanje između ploča je h , a zapreminske sile i gradijent pritiska se zanemaruju.

24. Pretpostavimo da se materijal od kojeg se sastoji neka zvezda može tretirati kao idealan fluid u ravnoteži, pri čemu je jedina zapreminska sila gravitaciona, koja potiče od same supstance zvezde. Zvezda je sfernosimetrična, ali nije homogena, pri čemu je poznata veza između pritiska $p(r)$ i njene gustine $\rho(r)$:

$$p = \frac{1}{2}k\rho^2,$$

gde je k pozitivna konstanta. Pokazati da gustina zvezde zadovoljava jednačinu

$$\frac{d^2(r\rho(r))}{dr^2} = -\frac{4\pi\gamma}{k}r\rho(r),$$

gde je γ gravitaciona konstanta. Rešiti prethodnu jednačinu i pokazati da poluprečnik ove zvezde ne zavisi od njene ukupne mase, uzimajući u obzir granične uslove da je gustina zvezde konačna za $r = 0$ a jednaka nuli na njenoj površini.

Specijalna teorija relativnosti

1. Izvesti formule za transformaciju radijus vektora \vec{r} i vremena t pri prelasku iz jednog inercijalnog sistema u drugi, ako se drugi sistem u odnosu na prvi kreće brzinom \vec{v} proizvoljnog pravca.
2. Sistem S' kreće se u odnosu na sistem S brzinom v_1 duž x -ose, a sistem S'' kreće se u odnosu na sistem S' brzinom v_2 duž y' -ose. Naći matricu Lorencove transformacije koja opisuje prelazak sa sistema S na sistem S'' . Uveriti se na ovom primeru da Lorencove transformacije nisu komutativne.
3. Prema posmatraču iz sistema S događaj A dešava se na x -osi, a 10^{-6} s kasnije registruje se događaj B na rastojanju $600m$ od mesta na kome se desio A , takođe na x -osi. Postoji li drugi inercijalni sistem S' koji se kreće brzinom $v < c$, paralelno x -osi, tako da posmatrač iz S' ove događaje vidi simultano? Ako postoji, odrediti vektor brzine sistema S' u odnosu na S ? Koliko je rastojanje između A i B u S' ? Koliki je interval između događaja A i B ?
4. Dve rakete A i B imaju brzine $v_A = 0.6c$ i $v_B = 0.9c$ respektivno, u odnosu na Zemlju. Za posmatrača na Zemlji one se kreću u uzajamno normalnim pravcima.
 - a) Kolika je brzina rakete A u odnosu na posmatrača u raketi B ?
 - b) Ako časovnik u raketi A prema posmatraču u raketi B vrši 60 otkucaja u sekundi, koliko otkucaja meri posmatrač A na svom časovniku?
5. Posmatrač A nalazi se na Zemlji i svakih 6 minuta šalje svetlosni signal. Posmatrač B je na svemirskoj stanici koja miruje u odnosu na Zemlju. Raketa C putuje od A do B brzinom $0.6c$ u odnosu na A .
 - a) U kojim vremenskim intervalima C prima signale od A ?
 - b) Ako C pošalje signal na B čim ga primi sa A , u kojim vremenskim intervalima B prima signale od C ?
6. Dva inercijalna sistema kreću se brzinama \vec{v}_1 i \vec{v}_2 , u odnosu na treći inercijalni sistem. Koristeći invarijantnost skalarnog proizvoda kvadrivektora brzina, pokazati da relativna brzina sistema zadovoljava relaciju

$$v^2 = c^2 \frac{c^2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{(c^2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2} .$$

7. Inercijalni sistem reference S' kreće se brzinom \vec{v} u odnosu na inercijalni sistem S . Pod uglom θ' u odnosu na pravac kretanja u sistemu S' ispaljen je metak brzinom \vec{v}' . Koliki je ugao θ pod kojim je ispaljen metak kada se posmatra iz sistema S ? Koliko je θ ako je "metak" foton?
8. Kolica 1 se brzinom v kreću po dugačkom stolu. Po kolicima 1 kreću se manja kolica 2 brzinom v u odnosu na njih, u istom pravcu. Po kolicima 2, u istom pravcu relativnom brzinom v u odnosu na njih, kreću se kolica 3 itd. Ukupno ima n kolica. Naći brzinu v_n n -tih kolica u odnosu na sto? Čemu teži v_n kada $n \rightarrow \infty$?

9. U inercijalnom sistemu S čestica se kreće brzinom \vec{u} , a ubrzanje joj je \vec{a} . Inercijalni sistem S' kreće se brzinom \vec{v} u odnosu na sistem S . Pokazati da su komponente ubrzanja u pravcu paralelnom vektoru \vec{v} i normalno na njega, date izrazima

$$\vec{a}'_{\parallel} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c}\right)^3} \vec{a}_{\parallel} \quad ,$$

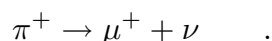
$$\vec{a}'_{\perp} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c}\right)^3} [\vec{a}_{\perp} - \vec{v} \times (\vec{a} \times \vec{u})] .$$

10. Ogledalo se kreće normalno na svoju površinu brzinom v . Koliki ugao sa normalom na ogledalo zaklapa odbijeni zrak svetlosti, ako je ugao između normale i upadnog zraka θ ? Kako se pri odbijanju menja frekvencija svetlosti? Fotone posmatrati kao kuglice koje se u sistemu u kome ogledalo miruje elastično odbijaju od njega?

11. Ogledalo se kreće paralelno svojoj ravni. Dokazati da je upadni ugao fotona jednak uglu pod kojim se foton odbija od ogledala.

12. Do posmatrača stiže signal od izvora svetlosti koji se kreće brzinom \vec{v} . U trenutku kada signal krene ugao između vektora \vec{v} i prave koja prolazi kroz izvor i posmatrača iznosi θ . Kako zavisi θ od $|\vec{v}|$, ako posmatrač ne zapaža nikakvu promenu frekvence svetlosti?

13. Pozitivni π -mezon (masa mirovanja $m_{\pi} = 273m_e$) u mirovanju raspada se na neutrino (masa mirovanja $m_{\nu} = 0$) i μ -mezon (masa mirovanja $m_{\mu} = 207m_e$)



Odrediti kinetičke energije neutrina i μ -mezona. Masa mirovanja elektrona je $m_e = 0.51MeV/c^2$.

14. Snop piona energije E_0 upravljen je duž z -ose. Neki od piona raspadaju se na mion i neutrino pri čemu neutrino izleće pod uglom θ_{ν} u odnosu na z -osu. Mase mirovanja piona i miona su m_{π} i m_{μ} , $m_{\nu} = 0$. Izračunati energiju neutrina u funkciji θ_{ν} u slučaju $E_0 \gg m_{\pi}c^2$ i $\theta_{\nu} \ll 1$.

15. Foton frekvence ν_0 rasejava se na slobodnom elektronu koji se uniformno kreće. Impuls \vec{p}_0 elektrona zaklapa ugao θ sa pravcem kretanja fotona. Naći zavisnost frekvence ν rasejanog fotona od pravca njegovog kretanja. Posebno razmotriti slučaj $p_0 = 0$.

16. Čestica mase mirovanja m i energije E sudara se sa istom takvom česticom, koja je mirovala do sudara. Naći ukupnu kinetičku energiju čestica u sistemu centra inercije.

17. Koristeći zakone održanja pokazati da slobodni elektron ne može ni da izrači ni da apsorbira foton.